# Wybrane metody modelowania, identyfikacji i sterowania systemów dynamicznych

Krzysztof Oprzędkiewicz (D), Witold Byrski (D), Józef Duda (D), Adam Kowalewski (D), Paweł Rotter (D), Maciej Klemiato (D), Andrzej Latocha (D)

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej, Kraków

Streszczenie: W pracy zaprezentowano wybrane wyniki prac naukowych prowadzonych w Zespole Modelowania i Sterowania w Katedrze Automatyki i Robotyki AGH. W pierwszej części pracy rozważono konstrukcję funkcjonału Lapunowa dla układu neutralnego z dwoma opóźnieniami. Proponowany funkcjonał może być wykorzystany m.in. do optymalizacji parametrycznej regulatora PD. W następnej kolejności rozważono problem sterowania optymalnego obiektem parabolicznym. Dalej zaprezentowano bazującą na analizie obrazów metodę identyfikacji parametrów procesu topienia szkła, pozwalającą na wspomaganie sterowania procesem. Na końcu zaprezentowano nową metodę identyfikacji transmitancji zastępczej z opóźnieniem, pozwalającą na otrzymanie modelu znacznie dokładniejszego niż klasyczny model Strejca z opóźnieniem.

Słowa kluczowe: modelowanie systemów dynamicznych, identyfikacja systemów dynamicznych, systemy nieskończenie wymiarowe, funkcjonał Lapunowa, sterowanie optymalne, analiza obrazów

### SELECTED METHODS OF MODELING, IDENTIFICATION AND CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS

**Abstract:** The paper presents selected scientific results obtained by the Team of Modeling and Control (the part of Department of Automatic Control and Robotics at AGH University). At the beginning the construction of the Lyapunov candidate for neutral system with two delays is presented. It can be used e.g. to parametric optimization of a PD controller. Next the optimum control of a parabolic system is discussed. Furthermore the image analysis based method of identification of glass metling process is given. It can be applied e.g. to optimize a control of this process. Finally a new identification method of a Strejc transfer function with delay is proposed. It assures much better accuracy of a model than well known Strejc transfer function with delay.

**Keywords:** modeling of dynamic systems, identification of dynamic systems, infinite dimensional systems, Lyapunov candidate, optimal control, image analysis

https://doi.org/10.7494/978-83-66727-83-0\_5

#### 1. Uwagi wstępne

W pracy zaprezentowano wybrane osiągnięcia naukowe autorów, związane z modelowaniem, identyfikacją i sterowaniem różnych klas systemów dynamicznych. W pierwszej części pracy rozważono konstrukcję funkcjonału Lapunowa dla układu neutralnego z dwoma opóźnieniami oraz sterowanie optymalne obiektu parabolicznego. Następnie zaprezentowano metodę identyfikacji parametrów procesu topienia szkła, bazującą na metodach analizy obrazów oraz nową metodę identyfikacji transmitancji zastępczej z opóźnieniem.

### 2. Konstrukcja funkcjonału Lapunowa dla układu neutralnego z dwoma opóźnieniami

Rozważmy funkcjonał Lapunowa dla układu neutralnego z dwoma opóźnieniami skupionymi. Układ ten opisany jest równaniem:

$$\frac{dx(t)}{dt} - D\frac{dx(t-h)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-h) + Cx(t-r)$$
(1)

z funkcją początkową  $x(\theta) = \varphi(\theta)$  dla  $\theta \in [-r, 0]$  należącą do przestrzeni funkcji przedziałami gładkich  $PC^1([-r, 0], R^n)$ . W równaniu (1)  $t \ge 0$  oznacza czas, macierze  $A, B, C, D \in R^{n \times n}$ , opóźnienia spełniają warunek r > h > 0, a stan chwilowy  $x(t) \in R^n$ . Rozwiązanie równania dla  $t \ge 0$  oraz funkcji początkowej  $\varphi \in PC^1([-r, 0], R^n)$  ma postać następującą:

$$x(t,\varphi) = \left[K(t) - K(t-h)D\right]\varphi(0) + \int_{-r}^{0} K(t-r-\theta)C\varphi(\theta)d\theta + \\ + \int_{-h}^{0} K(t-h-\theta)\left[B\varphi(\theta) + D\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta}\right]d\theta$$
(2)

gdzie K jest fundamentalną macierzą rozwiązań.

Zdefiniujemy macierz Lapunowa:

$$U(\sigma) = \int_{0}^{\infty} K^{T}(t) W K(t+\sigma) dt$$
(3)

oraz funkcjonał Lapunowa dla funkcji początkowej φ następującą całką:

$$V(\varphi) = \int_{0}^{\infty} x^{T}(t,\varphi) W x(t,\varphi) dt$$
(4)

Po obliczeniach otrzymujemy:

Przy czym macierz Lapunowa U wyznaczana jest z macierzowego równania różniczkowego:

$$\frac{dU(\sigma)}{d\sigma} - \frac{dU(\sigma-h)}{d\sigma}D = U(\sigma)A + U(\sigma-h)B + U(\sigma-r)C$$
(6)

dla  $\sigma \ge 0$  oraz  $\sigma \ne jh$ , j = 0, 1, 2, oraz z macierzowych zależności algebraicznych:

$$U(-\sigma) = U^{T}(\sigma) - W = A^{T}U(0) + U(0)A - A^{T}U(-h)D - D^{T}U^{T}(-h)A + B^{T}U^{T}(-h) + U(-h)B - B^{T}U(0)D - D^{T}U(0)B + (7) + C^{T}U^{T}(-r) + U(-r)C - C^{T}U(r-h)D - D^{T}U(h-r)C$$

Zaprezentowany funkcjonał został wykorzystany w procesie optymalizacji parametrycznej dla układu regulacji obiektu z dwoma opóźnieniami oraz z regulatorem P i PD. Dla tych układów rozwiązano powyższe układy równań oraz wyliczono wartość funkcjonału Lapunowa, która jest równa wartości kwadratowego wskaźnika jakości. Przeprowadzono również proces minimalizacji wskaźnika jakości i wyznaczono nastawy optymalne.

#### 3. Problem sterowania optymalnego dla obiektu parabolicznego

Obecnie sformułujemy problem sterowania optymalnego dla układu opisanego następującym równaniem parabolicznym:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y + y(x, t-h) = u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$
(8)

$$y(x, t') = \Phi_0(x, t'), \quad (x, t') \in \Omega \times [-h, 0)$$
(9)

$$y(x,0) = y_p(x), \quad x \in \Omega$$
<sup>(10)</sup>

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma_A} = y(x, t-h) + v, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T)$$
(11)

$$y(x, t') = \Psi_0(x, t'), \quad (x, t') \in \Gamma \times [-h, 0)$$
 (12)

gdzie:

$$\begin{split} \Omega \subset \mathbf{R}^n &- \text{otwarty, ograniczony zbiór z brzegiem } \Gamma, \\ y &\equiv y(x, t; v), u \equiv u(x, t), v \equiv v(x, t), \\ Q &= \Omega \times (0, T), \ \overline{Q} = \Omega \times [0, T], \ Q_0 = \Omega \times [-h, 0), \\ \Sigma &= \Gamma \times (0, T), \ \Sigma_0 = \Gamma \times [-h, 0), \\ h &- \text{stałe opóźnienie czasowe,} \\ \Phi_0 &- \text{funkcja początkowa określona na } Q_0, \\ \Psi_0 &- \text{funkcja początkowa określona na } \Sigma_0. \end{split}$$

Równania (8)–(12) stanowią problem Neumanna. Lewą stronę (11) można zapisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \cos(n,x_i) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x_j} = q(x,t)$$
(13)

gdzie:

 $\frac{\partial y}{\partial \gamma_A}$  – pochodna normalna do brzegu  $\Gamma$ ,  $\cos(n, x_i)$  – *i*-ty cosinus kierunkowy wektora *n* normalnego do  $\Gamma$  i skierowanego na zewnątrz  $\Omega$ . Rozważymy problem optymalnego sterowania brzegowego dla  $v \in L^2(\Sigma)$ . Oznaczmy przez  $Y = H^{3/2, 3/4}(Q)$  przestrzeń stanów oraz przez  $U = L^2(\Sigma)$  przestrzeń sterowań. Zakładamy ustalony czas sterowania *T*. Wskaźnik jakości ma postać:

$$(y,v) = \lambda_1 \iint_Q |y(x,t;v) - z_d|^2 dx dt + \lambda_2 \iint_{0\Gamma} (Nv) v d\Gamma dt$$
(14)

gdzie:

 $\lambda_i \geq 0 \text{ oraz } \lambda_1 + \lambda_2 > 0,$ 

- $z_d$  zadany element w przestrzeni  $L^2(Q)$ ,
- N ściśle dodatnio określony operator liniowy przekształcający przestrzeń  $L^2(\Sigma)$  w przestrzeń  $L^2(\Sigma).$

Wprowadzamy następujące ograniczenie na sterowanie:

$$\mathbf{v} \in U_{ad} \tag{15}$$

gdzie  $U_{ad}$  – domknięty, wypukły zbiór o niepustym wnętrzu.

Problem sterowania optymalnego (8)–(12), (14), (15) można rozwiązać jako problem optymalizacyjny, w którym funkcja v jest nieznaną funkcją.

Korzystając z twierdzenia Dubowickiego–Milutina (zob. np. Kowalewski 2018), zaprezentujemy warunki konieczne i dostateczne optymalności dla problemu optymalizacyjnego (8)–(12), (14), (15). Rozwiązanie sformułowanego problemu sterowania optymalnego jest równoważne poszukiwaniu pary  $(y^o, v^o) \in E = H^{3/2, 3/4}(Q) \times L^2(\Sigma)$ spełniającej równanie (8)–(12) oraz minimalizującej wskaźnik jakości (14) przy ograniczeniach na sterowanie (15).

#### Twierdzenie

Rozwiązanie problemu optymalizacyjnego (8)–(12), (14), (15) istnieje i jest jednoznaczne przy wyżej przytoczonych założeniach. Warunki konieczne i dostateczne optymalności są opisane następującym układem równań różniczkowych cząstkowych i nierówności:

- rozważamy system opisany równaniem parabolicznym (8)-(12),
- są spełnione następujące równania sprzężone:

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*(t)p + p(x, t+h) = \lambda_1 \left(y^o - z_d\right), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T-h)$$
(16)

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^*(t) p = \lambda_1 \left( y^o - z_d \right), \quad (x, t) \in \Omega \times (T - h, T)$$
(17)

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma_{A^*}} = p(x, t+h), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, T-h)$$
(18)

$$\frac{\partial p}{\partial \gamma_{A^*}} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (T - h, T)$$
(19)

$$p(x,T) = 0, \quad x \in \Omega \tag{20}$$

Dla powyższych założeń warunek maksimum przyjmuje następującą postać:

$$\iint_{0\Gamma} \left( p + \lambda_2 N v^o \right) \left( v - v^o \right) d\Gamma dt \ge 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

$$\tag{21}$$

Podobne warunki optymalności można wyprowadzić dla przypadku wskaźnika jakości zdefiniowanego ściśle na brzegu.

## 4. Identyfikacja parametrów procesu topienia szkła z wykorzystaniem metod analizy obrazu

Sterowanie procesem wytopu szkła odbywa się przeważnie ręcznie: operator steruje procesem wytopu, kierując się przede wszystkim ilością i rozmieszczeniem zestawu (nieroztopionego surowca) na powierzchni lustra szkła. Głównym źródłem informacji dla operatora jest obraz wnętrza wanny dostarczony przez kamerę zamontowaną w górnej części komory pieca (rys. 1).



**Rys. 1.** Obraz z kamery umieszczonej w górnej części komory pieca, na podstawie którego dokonywana jest analiza Źródło: Rotter (2017)

Wadą ręcznego sterowania procesem wytopu jest, obok konieczności stałego zaangażowania pracownika o odpowiednim doświadczeniu, brak możliwości efektywnej optymalizacji procesu sterowania. Sterowanie nawet przez doświadczonego operatora jest dalekie od optymalnego, zwłaszcza że efekty sterowania są obserwowalne dopiero po paru godzinach. Ustawienie zbyt niskiej temperatury może skutkować zepsuciem wsadu, co oznacza duże straty. Z kolei utrzymywanie niepotrzebnie wysokiej temperatury zwiększa zużycie energii mającej bardzo znaczny udział w kosztach produkcji oraz emisję zanieczyszczeń (głównie tlenków azotu). Automatyczny pomiar parametrów procesu oraz obliczanie wartości zmiennych procesowych może zapewnić powtarzalność, która może być wykorzystana w długoterminowym procesie samouczącym do znalezienia optymalnej zależności wartości sterowania od stanu procesu.

W wyniku badań prowadzonych przez Zespół Modelowania i Sterowania współautorzy zaproponowali metodę pomiaru zdefiniowanych parametrów procesu topienia szkła na podstawie automatycznej analizy obrazu. Metoda ta została zaprezentowana m.in w pracach: Rottera (2017), Rottera i Klemiato (2017) oraz Klemiato i in. (2021). Zasada działania algorytmu jest pokazana na rysunkach 2 i 3.



**Rys. 2.** Stefy określane przez użytkownika, dla których obliczane są wskaźniki pokrycia zestawem oraz wskaźniki asymetrii (a); rozkład temperatur w piecu szklarskim, oszacowany na podstawie barwy obrazu (b)

Algorytm uwzględnia ewentualną asymetrię ustawienia kamery, a także wykrywa osad, który zwykle gromadzi się na obiektywie kamery. Eksperymenty przeprowadzone na obrazach z kilku hut szkła wskazują, że proponowana metoda może być z powodzeniem stosowana do automatyzacji procesu wytopu szkła.



Rys. 3. Wirtualny trójwymiarowy obraz wnętrza pieca odtworzony na podstawie obrazu z pojedynczej kamery, pokazujący zasięg nieroztopionego surowca. Opracowany algorytm pozwala użytkownikowi dowolnie zmieniać punkt widzenia, jak również oglądać obraz 3D przy użyciu sprzętu stereoskopowego Źródło: Rotter (2017)

W szczególności zrealizowano następujące zagadnienia badawcze:

- automatyczne wykrywanie zestawu,
- szacowanie powierzchni zestawu w poszczególnych strefach pieca i ich zmienności w czasie,
- detekcja osadu, który zwykle gromadzi się na obiektywie kamery,
- analiza ewentualnej asymetrii rozmieszczenia zestawu,
- analiza rozkładu temperatury na powierzchni szkła w oparciu o barwę obrazu,
- analiza ewentualnej asymetrii (różnicy) temperatur w różnych strefach pieca,
- automatyczne diagnozowanie pracy zasypników i palników na podstawie danych zbieranych przez system wizyjny,
- trójwymiarowa wizualizacja wnętrza pieca.

### 5. Nowa metoda identyfikacji modeli transmitancyjnych systemów dynamicznych

Metodologia zaproponowana przez Vladimira Strejca w latach 50. ubiegłego wieku, ciągle powszechnie stosowana, oparta jest na jednym punkcie charakterystyki, w którym znana jest wartość odpowiedzi i jej pochodnej. Ta graficzna metoda jest kłopotliwa i prowadzi do błędów, zwłaszcza przy odpowiedziach zaszumionych.

W 2018 roku Witold Byrski opracował nową dwupunktową metodę identyfikacji transmitancji nieznanego obiektu G(s), która gwarantuje pokrycie się charakterystyki tego obiektu i modelu Strejca o wybranym rzędzie n z opóźnieniem  $G_n(s)$ , w dwóch specjalnie wybranych punktach. Metoda ta jest omówiona ze szczegółami w pracy Byrskiego (2018):

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)...(T_n s + 1)}, \quad G_n(s) = \frac{K e^{-ts}}{(T_s + 1)^n}$$
(22)

Na znormalizowanej charakterystyce skokowej nieznanego obiektu dokonuje się wyboru pierwszego punktu o wartości  $h_n$  i dla tej wartości odczytuje się czas jej wystąpienia  $t_n$ . Ta wartość  $h_n$  jest podana w tabeli i jest ona inna dla każdego rzędu *n* wybranego obiektu Strejca. Drugi czas  $T_{90}$ , który należy odczytać z charakterystyki obiektu nieznanego, odpowiada zawsze wysokości  $h_0 = 0,9$ . Na podstawie czasów  $t_n$  i  $T_{90}$  można z tabeli natychmiast odczytać stałą czasową  $T_n$  i czas opóźnienia  $\tau_n$  dla modelu Strejca rzędu *n*, którego odpowiedź też przechodzi przez te dwa punkty. Uzyskane dokładności są o wiele lepsze niż w metodzie Strejca, a nawet pozwalają otrzymać modele niższego rzędu. Na rysunku 4 pokazano przykład układu szóstego rzędu, dla którego metoda Strejca wymaga doboru modelu czwartego rzędu  $G_{ST}(s)$ , a metoda dwupunktowa daje lepszy wynik już dla modelu trzeciego rzędu  $G_3(s)$ .



**Rys. 4.** Ilustracja proponowanej metody identyfikacji Źródło: Byrski (2018)

Zastosowanie modelu czwartego rzędu (uzyskanego z użyciem parametrów z tabeli 1) daje już odpowiedź modelu pokrywającą się praktycznie całkowicie z odpowiedzią obiektu, więc takie graficzne porównanie pominięto. Tabelę można rozbudować do n = 10.

| п | $h_n$ | $T_n$                          | $\tau_n$                                 |
|---|-------|--------------------------------|--|
| 2 | 0,264 | $T_2 = 0,34605(T_{90}-t_{02})$ | $\tau_2 = 1,34605t_{02} - 0,34605T_{90}$ |
| 3 | 0,323 | $T_3 = 0,30099(T_{90}-t_{03})$ | $\tau_3 = 1,60199t_{03} - 0,60199T_{90}$ |
| 4 | 0,353 | $T_4 = 0,27168(T_{90}-t_{04})$ | $\tau_4 = 1,81505t_{04} - 0,81504T_{90}$ |
| 5 | 0,371 | $T_5 = 0,25040(T_{90}-t_{05})$ | $\tau_5 = 2,00160t_{05} - 1,00160_{90}$  |

 Tabela 1

 Parametry modeli zastępczych dla różnych rzędów n

W ramach prowadzonych badań opracowano też metodę identyfikacji pasywnej dla dowolnego sygnału sterującego, która jest zaprezentowana w pracy Byrskiego i Drapały (2020).

#### 5. Uwagi końcowe

W podsumowaniu należy stwierdzić, że prezentowane powyżej wyniki nie wyczerpują całej tematyki badań prowadzonych przez współautorów. Ze względu na ograniczoną objętość artykułu nie omówiono m.in. prac z zakresu rachunku niecałkowitego rzędu, konstrukcji obserwatorów stanu oraz zastosowania metod sztucznej inteligencji i analizy obrazów w elastycznych systemach produkcyjnych, układach detekcji uszkodzeń i systemach rozpoznawania otoczenia przez pojazd autonomiczny.

#### Literatura

- Byrski W., 2018, A new method of multi-inertial systems identification by the Strejc model, [w:] Mitkowski W., Kacprzyk J., Oprzędkiewicz K., Skruch P. (eds.), Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation: Proceedings of KKA 2017 – The 19<sup>th</sup> Polish Control Conference, Kraków, Poland, June 18–21, 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 577, Springer, Cham, s. 536–549. https:// doi.org/10.1007/978-3-319-60699-6\_52.
- Byrski W., Drapała M., 2020, Algebraic approach to solving the problem of identification by the use of modulating functions and convolution filter: glass conditioning process,
  [w:] Bartoszewicz A., Kabziński J., Kacprzyk J. (eds.), Advanced, Contemporary Control: Proceedings of KKA 2020 the 20<sup>th</sup> Polish Control Conference: [14–16 October, 2020], Łódź, Poland, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1196, Springer, Cham, s. 80–91. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50936-1\_7.

- Klemiato M., Rotter P., Skowiniak A., 2021, *Analysis of batch asymmetry and batch line position for the decision support in the glass melting process*, Production Engineering, vol. 15(5), s. 725–734. https://doi.org/10.1007/s11740-021-01053-3.
- Kowalewski A., 2018, *Extremal problems for parabolic systems with time-varying lags*, Archives of Control Sciences, vol. 28, no. 1, s. 89–104. https://doi.org/10.24425/119078.
- Rotter P., 2017, Virtual cameras and stereoscopic imaging for the supervision of industrial processes, [w:] Rutkowski L., Korytkowski M., Scherer R., Tadeusiewicz R., Zadeh L., Zurada J. (eds.), Artificial Intelligence and Soft Computing: 16<sup>th</sup> International Conference: ICAISC 2017: Zakopane, Poland, June 11–15, 2017: proceedings, Pt. 1, Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 10245, Springer, Cham, s. 561–569. https://doi.org/10.1007/978-3-319-59063-9\_50.
- Rotter P., Klemiato M., 2017, Prototype vision-based system for the supervision of the glass melting process: implementation for industrial environment, [w:] Mitkowski W., Kacprzyk J., Oprzędkiewicz K., Skruch P. (eds.), Trends in Advanced Intelligent Control, Optimization and Automation: Proceedings of KKA 2017 – the 19<sup>th</sup> Polish Control Conference, Kraków, Poland, June 18–21, 2017, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 577, Springer, Cham, s. 364–369. https://doi.org/10.1007/ 978-3-319-60699-6\_35.