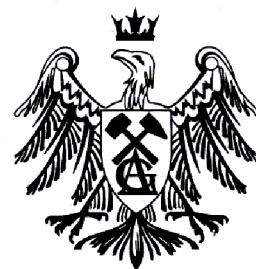


**RI** SKRYPTY UCZELNIANE

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

UCZELNIANE WYDAWNICTWA NAUKOWO-DYDAKTYCZNE

SU 1631



**Józef Giergiel  
Leszek Głuch  
Andrzej Łopata**

**ZBIÓR ZADAŃ  
Z MECHANIKI  
METODYKA ROZWIĄZAŃ**

Wydanie drugie

KRAKÓW 2001

1631 pozycja wydawnictw dydaktycznych  
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2001  
ISSN 0239-6114

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw  
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. inż. Zbigniew Engel*

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie: *zespół redakcyjny UWND*

Korekta: *Danuta Harnik*

Skład komputerowy: „Andre”, tel. 423-10-10

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych  
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków  
tel. 617-32-28, tel./fax 636-40-38

---

## Spis treści

Przedmowa .....	5
Wstęp .....	7
<b>1. Statyka</b> .....	9
1.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań ze statyki .....	9
1.2. Płaski środkowy układ sił .....	10
1.3. Przestrzenny środkowy układ sił .....	21
1.4. Płaski dowolny układ sił .....	29
1.5. Płaski układ sił równoległych .....	37
1.6. Przestrzenny dowolny układ sił .....	41
1.7. Przestrzenny układ sił równoległych .....	50
1.8. Tarcie .....	55
1.9. Środki ciężkości .....	63
<b>2. Kinematyka</b> .....	71
2.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań z kinematyki .....	71
2.2. Kinematyka punktu .....	72
2.2.1. Wyznaczanie równań ruchu, prędkości, przyspieszeń oraz toru .....	72
2.3. Kinematyka bryły .....	88
2.3.1. Ruch postępowy i obrotowy .....	88
2.3.2. Ruch płaski .....	93
2.3.3. Ruch kulisty .....	116
2.4. Ruch złożony punktu .....	128
2.5. Składanie ruchów postępowych i obrotowych .....	146
<b>3. Dynamika</b> .....	151
3.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań z dynamiki .....	151
3.2. Dynamika punktu materialnego .....	152
3.2.1. Różniczkowe równania ruchu – wyznaczanie sił .....	152
3.2.2. Różniczkowe równania ruchu – wyznaczanie równań skończonych ruchu .....	157
3.2.3. Pęd, kręt, zasada równowartości energii kinetycznej i pracy, zasada zachowania energii .....	168
3.2.4. Dynamika punktu w ruchu względnym .....	181
3.2.5. Dynamika punktu o zmiennej masie .....	197

---

3.3. Dynamika układu punktów materialnych .....	207
3.4. Dynamika bryły .....	225
3.4.1. Ruch postępowy, obrotowy i płaski .....	225
3.4.2. Reakcje dynamiczne w ruchu obrotowym .....	274
3.4.3. Ruch kulisty – przybliżona teoria żyroskopów .....	283
3.5. Dobór mocy napędu w wybranych układach mechanicznych .....	290
3.6. Elementy mechaniki analitycznej – zasada prac przygotowanych .....	306
3.7. Podstawy teorii zderzeń.....	314
Literatura .....	325

BG AGH

## Przedmowa

Skrypt *Zbiór zadań z mechaniki. Metodyka rozwiązań* składa się z trzech części: statyki, kinematyki i dynamiki. Zawarty w nim materiał jest uzupełnieniem skryptu [3] oraz zbiorów zadań [7, 8] i przeznaczony jest dla studentów wydziałów mechanicznych wyższych uczelni technicznych. Ze skryptu mogą również korzystać studenci innych wydziałów.

W skrypcie rozwiązano 127 zadań z uwzględnieniem metodyki postępowania. Układ skryptu wynika z założonego przez autorów celu, tzn. pokazania różnych metod rozwiązywania tego samego problemu.

Autorzy będą wdzięczni za uwagi krytyczne dotyczące zakresu i sposobu przedstawienia problemów zawartych w skrypcie.

*Autorzy*



## Wstęp

Mechanika jest działem fizyki zajmującym się prostszą formą ruchu materii, tj. przemieszczeniami jednych ciał lub ich cząstek względem drugich oraz przyczynami powstawania tych zjawisk.

Mechaniką ogólną nazywamy wszystkie te działy mechaniki, w których mają zastosowanie prawa Newtona, a w węższym znaczeniu zbiór zagadnień z mechaniki ciał sztywnych i ich punktowych modeli (punktów materialnych) przystosowanych do potrzeb techniki.

Punktem materialnym nazywamy punkt geometryczny, który ma pewną skończoną masę.

Ciałem sztywnym nazywamy takie ciało materialne, w którym wzajemne odległości cząstek nie ulegają zmianie. Jest to ciało nieodkształcalne. W rzeczywistości wszystkie ciała są odkształcalne, jeżeli jednak odkształcenia są małe, można je przy badaniu właściwości ruchowych ciała pominąć i traktować takie ciało jak sztywne. Sztywne ciało materialne nazywamy bryłą. Przez stan ruchowy bryły rozumiemy ruch, tj. zmianę położenia jednej bryły względem innych brył, lub spoczynek.

Zmiana stanu ruchowego bryły, czyli przejście ze spoczynku w ruch lub z ruchu w spoczynek, oraz zmiana sposobu poruszania się bryły mogą nastąpić przez oddziaływanie na bryłę innymi bryłami.

Tego rodzaju oddziaływanie jednej bryły na drugą nazywamy siłą; na przykład ciężar ciała jest siłą, z jaką na to ciało oddziałuje kula ziemiska. Siłą jest również oddziaływanie magnesu na kawałek stali lub przewodnik, w którym płynie prąd.

Przy oddziaływaniu wzajemnym więcej niż dwóch brył będziemy rozpatrywali układ sił.

Przekształcaniem oraz równowagą układów sił zajmuje się dział mechaniki zwany statyką. Drugim działem mechaniki jest kinematyka.

Kinematyka zajmuje się badaniem ruchu ciał niezależnie od przyczyn, które go wywołują. Przy ruchu ciał względem siebie odległości między punktami tych ciał zmieniają się. Zmiany te określa się w stosunku do pewnego układu odniesienia (układu współrzędnych), który podczas badania ruchu zastępuje jedno z ciał. Jeżeli wybrany układ współrzędnych przyjmuje się umownie za nieruchomy, to ruch pozostałych w stosunku do tego układu odniesienia nazywamy ruchem bezwzględnym (absolutnym).

Kinematyka odróżnia się od geometrii przede wszystkim tym, że przy rozpatrywaniu przemieszczeń ciał (lub odpowiadających im geometrycznych modeli: punktu, bryły), bierzemy pod uwagę również czas przemieszczenia. Dlatego kinematyka nazywana jest często „geometrią czterech wymiarów”; nazwa „czwarty wymiar” dotyczy czasu.

W mechanice klasycznej czas uważany jest za ten sam dla dowolnych układów odniesienia, co jest wystarczającym dokładnym przybliżeniem w stosunku do rzeczywistości wtedy, gdy prędkości rozpatrywanych ruchów są małe w porównaniu z prędkością światła.

Za jednostkę czasu przyjmuje się sekundę. Chwili początkowej, którą możemy wybierać dowolnie, przypisujemy wartość równą zero, a każdej następnej liczbie  $t$ , której bezwzględna wartość równa jest liczbie sekund, jakie upłynęły pomiędzy tymi dwiema chwilami.

Każde ciało, którego ruch badamy, może być uważane za układ punktów materialnych. W kinematyce punkt materialny traktujemy jako punkt w pojęciu geometrycznym, któremu przypisujemy pewną skończoną masę.

Jeżeli odległości pomiędzy punktami układu nie zmieniają się, to taki układ punktów materialnych nazywamy bryłą lub ciałem sztywnym.

Ruch dowolnego układu punktów względem zadanego układu odniesienia będzie określony, jeśli będziemy znać ruch każdego punktu względem tego układu odniesienia.

Badanie ruchu układu punktów musi być poprzedzone badaniem ruchu punktu. Dlatego kinematykę dzielimy, ze względów dydaktycznych, na kinematykę punktu i kinematykę bryły.

Trzeci dział mechaniki obejmuje analizę ruchu pod wpływem działania sił i nazywa się dynamiką.



# 1. Statyka

## 1.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań ze statyki

W statyce wyróżnić można dwie zasadnicze grupy zadań:

- 1) zadania związane ze stanem równowagi układów sił,
- 2) zadania związane z redukcją układów sił.

W grupie pierwszej wyznacza się siły, najczęściej nieznanne siły reakcji lub inne wielkości, np. parametry geometryczne. W grupie drugiej zadań poszukuje się najprostszyc układów sił zastępujących zadane układy sił, wykorzystując w tym celu metody redukcji. Zarówno w grupie pierwszej, jak i w grupie drugiej stosuje się metody analityczne i graficzne, przy czym metody graficzne wykorzystuje się najczęściej do rozwiązywania płaskich układów prętowych typu kratownic.

Ze względu na szeroki zakres zastosowań oraz dokładność obliczeń powszechnie wykorzystuje się analityczne metody rozwiązywania układów sił.

W przypadku rozwiązywania zadań związanych ze stanem równowagi sił należy kierować się następującym tokiem postępowania:

- określić, czy badany układ jest układem prostym (jedna bryła), czy złożonym (kilka brył połączonych ze sobą);
- w przypadku układu złożonego należy myślowo rozdzielić cały układ na układy proste (jest to metoda stosowana najczęściej), pamiętając o przyłożeniu do nich w miejscu rozdzielenia sił wzajemnego oddziaływania (dwójki zerowe);
- przyłożyć wszystkie siły czynne;
- przyłożyć wszystkie siły reakcji w zależności od rodzaju więzów występujących w badanym układzie;
- zakwalifikować otrzymany układ albo układy sił do odpowiedniej grupy (płaski, przestrzenny, środkowy, równoległy);
- przyjąć układ odniesienia (układ współrzędnych) najwygodniej dla danego przypadku, kierując się zasadą otrzymania najprostszego układu równań równowagi;
- korzystając z odpowiedniego warunku równowagi sił, ułożyć równania równowagi wszystkich sił czynnych i reakcji;

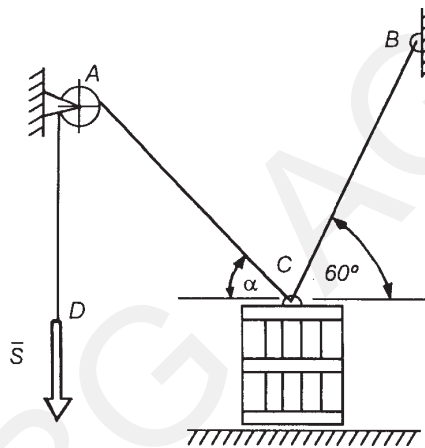
- rozwiązać równania równowagi i obliczyć szukane wielkości,
- sprawdzić wymiary wyznaczonych wielkości,
- przeprowadzić dyskusję nad rozwiązaniem zadaniem.

Szczegółowe uwagi metodyczne podano przy rozwiązaniach poszczególnych zadań.

## 1.2. Płaski środkowy układ sił

### ZADANIE 1.2.1

Skrzynia o ciężarze  $Q$  podnoszona jest dwiema linami  $CAD$  i  $BC$  (rys. 1.2.1). Lina  $BC$  przyczepiona jest w punkcie  $B$  do nieruchomej ściany, lina  $CAD$  przerzucona jest przez krążek  $A$ , przy czym obie liny przymocowane są w punkcie  $C$  do ciężaru  $Q$ . Lina  $BC$  tworzy z poziomem kąt  $60^\circ$ , natomiast część  $AC$  liny  $CAD$  kąt  $\alpha$ . Wyznaczyć kąt  $\alpha$ , przy którym siła  $\bar{S}$  w linie  $CAD$  będzie najmniejsza, oraz stosunek sił w linach dla wyznaczonego kąta  $\alpha$ .

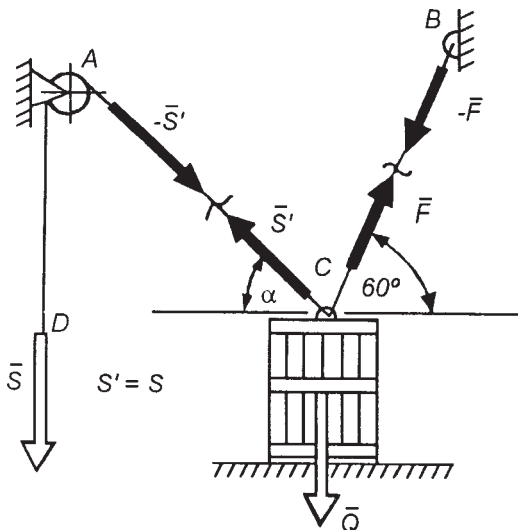


Rys. 1.2.1

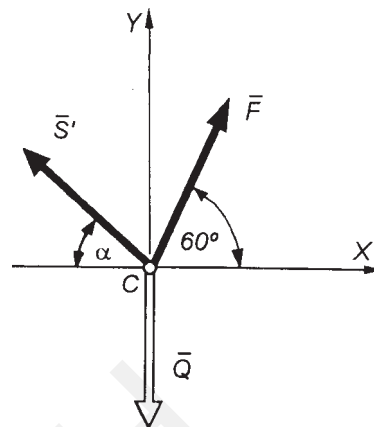
### Rozwiązanie

Przyłożmy wszystkie siły działające na rozważany układ, tzn. siły czynne (w tym przypadku jest to siła ciężkości  $\bar{Q}$  skrzyni) oraz siły reakcji (bierne) pochodzące od więzów. Ze względu na to, że więzami są liny (więzy typu ciągien), siły reakcji działają wzdłuż więzów. Siły te przyłożono w punkcie  $C$ , przez który przechodzi również siła  $\bar{Q}$  (rys. 1.2.1a). Siła  $\bar{S}$  w części  $AC$  liny  $CAD$  ma tę samą wartość co siła  $\bar{S}$ , ponieważ krążek  $A$  zmienia jedynie kierunek siły, a nie jej wartość. Uwolnienie od więzów polega w tym przypadku na wykonaniu myślowych przekrojów przez liny  $BC$  i  $AC$  i przyłożeniu dwójek zerowych odpowiednio do każdej z lin (rys. 1.2.1a).

Rozważania sprowadzone zostały w ten sposób do badania sił  $\bar{Q}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{S}'$  tworzących układ środkowy płaski (rys. 1.2.1b). Szukany kąt  $\alpha$  oraz stosunek sił  $\frac{\bar{S}}{\bar{F}}$  wyznaczono metodą analityczną, wykorzystując w tym celu analityczny warunek równowagi układu płaskiego środkowego sił.



Rys. 1.2.1a



Rys. 1.2.1b

Przyjmując układ odniesienia z początkiem na przykład w punkcie  $C$ , otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow F \cos 60^\circ - S' \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow F \sin 60^\circ + S' \sin \alpha - Q = 0,$$

przy czym  $S' = S$ .

W celu obliczenia kąta  $\alpha$ , przy którym  $S = S_{\min}$ , wyznaczono z równań równowagi siłę  $S$  jako funkcję  $\alpha$ . Po prostych przekształceniach otrzymuje się:

$$S = \frac{Q}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha}.$$

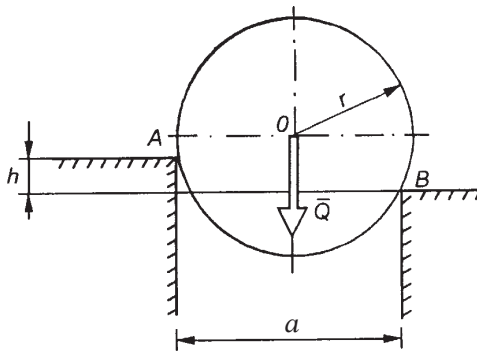
Obliczając pochodną  $\frac{dS}{d\alpha} = \frac{Q(\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha)}{(\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha)^2}$  i przyrównując ją do zera, wyzna-

czono  $\alpha = 30^\circ$ , dla której to wartości  $S = S_{\min}$ . Dla tej wartości kąta  $\alpha$  z równań równowagi wyznaczyć należy obecnie stosunek sił  $\frac{S}{F}$ . Z pierwszego równania otrzymuje się  $\frac{S}{F} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos \alpha}$ . Dla  $\alpha = 30^\circ$   $\frac{S}{F} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

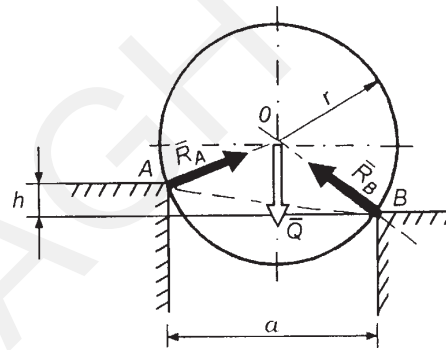
Dla zadanego kąta pochylenia linii  $BC$  kąt  $\alpha$  oraz stosunek  $\frac{S}{F}$  nie zależy od wielkości podnoszonego ciężaru  $Q$ . Od wielkości tego ciężaru zależą oczywiście wartości sił  $\bar{S}$  i  $\bar{F}$ , i w tym przypadku wynoszą one:  $S = \frac{1}{2}Q$ ,  $F = \frac{\sqrt{3}}{2}Q$ .

### ZADANIE 1.2.2

Gładki walec o promieniu  $r = 0,3$  m i ciężarze  $Q = 1000$  N opiera się o gładkie nieruchome podpory w punktach  $A$  i  $B$  (rys. 1.2.2). Rozstaw podpór  $a = 0,4$  m, różnica wysokości między podporami  $h = 0,2$  m. Obliczyć wartość sił reakcji  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$  podpór.



Rys. 1.2.2



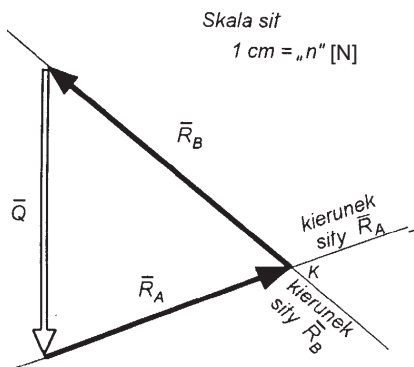
Rys. 1.2.2a

### Rozwiązanie

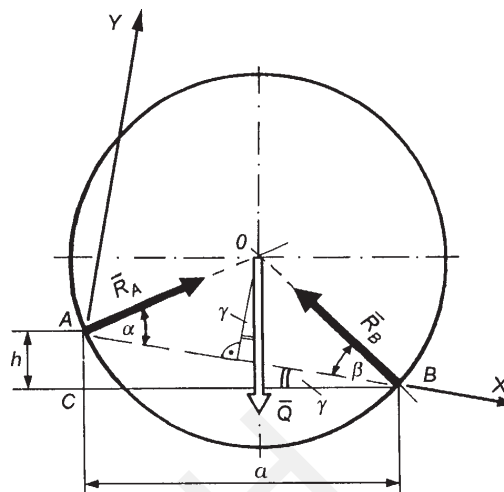
Walec będzie oparty o podpory (nie wpadnie pomiędzy podpory), jeżeli spełniony będzie warunek: odległość  $AB < 2r$ . W tym przypadku

$$AB = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,4^2} = 0,446 \text{ m} < 2r = 0,6 \text{ m}.$$

Przy założeniu, że podpory są gładkie, reakcje  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$  mają kierunek prostopadły do stycznych w punktach  $A$  i  $B$  i muszą przechodzić przez środek  $O$  walca (rys. 1.2.2a). Układ sił  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$  jest więc układem środkowym płaskim. Szukane reakcje wyznaczyć można metodą graficzną lub analityczną. Metoda graficzna polega na wykorzystaniu geometrycznego warunku równowagi układu środkowego sił, tzn. sprowadza się do narysowania w przyjętej skali sił zamkniętego wieloboku sił. Przyjmując skalę sił, np.  $1 \text{ cm} = n \text{ [N]}$ , rozpoczyna się budowę wieloboku sił od siły  $\bar{Q}$  (znana jest prosta działania i wartość) (rys. 1.2.2b).



Rys.1.2.2b



Rys. 1.2.2c

Do narysowanej siły  $\bar{Q}$  dodano wektorowo na przykład siłę  $\bar{R}_A$ , rysując jedynie jej kierunek przez koniec siły  $\bar{Q}$ . Wiedząc, że wielobok sił musi być zamknięty, tzn. koniec siły  $\bar{R}_B$  musi znaleźć się w początku siły  $\bar{Q}$ , przez początek siły  $\bar{Q}$  poprowadzono kierunek siły  $\bar{R}_B$ . Kierunki sił  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$ , przecinają się w punkcie  $K$ . Można teraz zaznaczyć zwroty wektorów  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$ , biorąc pod uwagę, że wielobok sił musi być zamknięty (zgodny obieg zwrotów wszystkich sił). Mierząc długości otrzymanych sił  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$  oraz uwzględniając przyjętą skalę sił, otrzymuje się poszukiwane wartości reakcji.

W celu analitycznego wyznaczenia szukanych reakcji wykorzystano analityczny warunek równowagi układu płaskiego środkowego sił. Przyjmując układ odniesienia jak na rysunku 1.2.2c, otrzymano następujące równania równowagi sił:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_A \cos \alpha - R_B \cos \beta + Q \sin \gamma = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_A \sin \alpha + R_B \sin \beta - Q \cos \gamma = 0.$$

W równaniach tych, poza nieznanymi reakcjami  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$ , występują również nieznanne kąty  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , które należy wyznaczyć dodatkowo. Trójkąt  $OAB$  jest trójkątem równoramiennym i  $\alpha = \beta$  oraz  $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{AB}{2r}$ ,  $\sin \alpha = \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{2r}\right)^2}$ , gdzie  $AB = \sqrt{h^2 + a^2}$ . Z  $\triangle ABC$  obliczyć można kąt  $\gamma$ , a mianowicie  $\cos \gamma = \frac{a}{AB}$ ,  $\sin \gamma = \frac{h}{AB}$ .

Uwzględniając odpowiednie funkcje kątów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  w równaniach równowagi i rozwiązując te równania, otrzymano następujące wyrażenia na szukane wartości sił reakcji:

$$R_A = Qr \frac{a\sqrt{h^2 + a^2} - h\sqrt{4r^2 - (h^2 + a^2)}}{(h^2 + a^2)\sqrt{4r^2 - (h^2 + a^2)}},$$

$$R_B = Qr \frac{a\sqrt{h^2 + a^2} + h\sqrt{4r^2 - (h^2 + a^2)}}{(h^2 + a^2)\sqrt{4r^2 - (h^2 + a^2)}}.$$

Zależności powyższe wiążą szukane reakcje z parametrami geometrycznymi badanego układu (wymiarami) i siłami czynnymi (siła  $\bar{Q}$ ). Z powyższych związków wynika, że reakcje będą miały sens fizyczny, gdy  $4r^2 - (h^2 + a^2) > 0$ , tzn. gdy  $AB < 2r$  ( $h^2 + a^2 = AB^2$ ), a więc, jeśli spełniony zostanie warunek określony na początku rozwiązywania zadania w oparciu o analizę geometrycznych wymiarów układu.

Przy zadanych wymiarach geometrycznych często wygodnie jest posługiwać się zależnością pomiędzy szukanymi reakcjami a siłami czynnymi. W tym przypadku związki te mają postać:

$$R_A = 0,369 Q,$$

$$R_B = 0,969 Q.$$

Uwzględniając ciężar walca  $Q = 1000$  N ostatecznie otrzymano:

$$R_A = 369 \text{ N},$$

$$R_B = 969 \text{ N}.$$

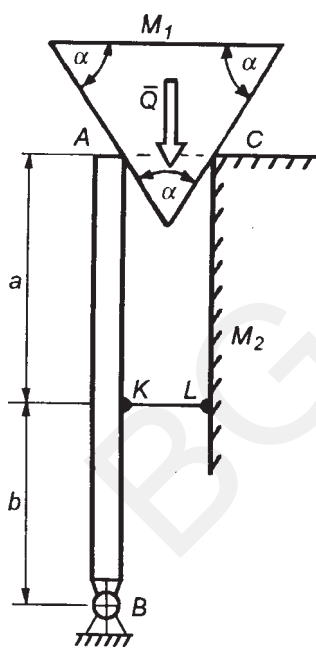
### ZADANIE 1.2.3

Bryła  $M_1$  o ciężarze  $Q = 500$  N oparta jest w punkcie  $C$  o gładką nieruchomą podporę  $M_2$  i w punkcie  $A$  o gładką nieważką pionową belkę  $AB$  o długości  $a + b = 1,2$  m, przy czym  $a = 2b$  (rys. 1.2.3). Belka zamocowana jest w przegubie nieprzesuwnym  $B$  i utrzymywana poziomą liną  $KL$ . Obliczyć wartość sił reakcji w punktach  $B$  i  $C$  oraz wartość siły  $\bar{S}$  w linii  $KL$ .

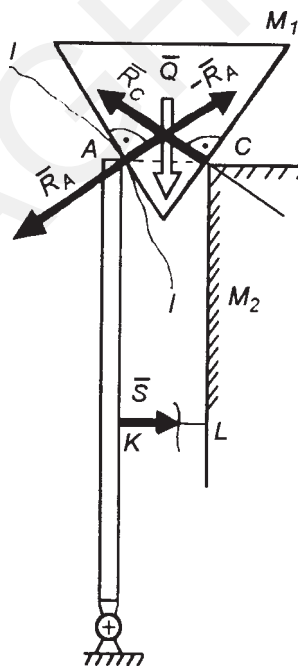
### Rozwiązanie

Układ fizyczny znajdujący się w równowadze składa się z dwóch brył. Więzami dla tego układu są: podpora nieruchoma  $M_2$ , lina  $KL$  i nieprzesuwny przegub  $B$ . Reakcja w punkcie  $C$  działa na kierunku prostopadłym do powierzchni bryły  $M_1$ , reakcja w punkcie  $K$  działa na kierunku liny (ciągna), natomiast w punkcie  $B$  prosta działania reakcji jest nieznaną ze względu na to, że jest to podpora nieprzesuwna. Nie znając kierunku wszystkich sił działających na układ, nie można ułożyć równań równowagi

dla takiego układu. Badany układ jest układem złożonym z bryły  $M_1$  i belki  $AB$ . Układ złożony jest w równowadze wówczas, gdy jego elementy składowe są również w równowadze. Rozważmy więc niezależnie równowagę bryły  $M_1$  i belki  $AB$ . W tym celu należy cały układ podzielić na części (elementy składowe), przykładając do każdej z nich wzajemne ich oddziaływania, tzn. do belki należy przyłożyć siłę pochodzącą od bryły  $M_1$ , a do bryły  $M_1$  siłę oddziaływania belki. Zgodnie z III prawem Newtona, siły te tworzą „dwójkę zerową” i w tym przypadku ich kierunek jest prostopadły w punkcie  $A$  do powierzchni bryły  $M_1$ . Na rysunku 1.2.3a pokazano siły reakcji więzów (z wyjątkiem przegubu  $B$ ) oraz siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy bryłą  $M_1$  a belką  $AB$  rozdzielonymi linią 1-1. Prostą działania reakcji  $\bar{R}_B$  można wyznaczyć zauważając, że na belkę  $AB$  działają tylko trzy siły, tj.  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{S}$  i  $\bar{R}_B$  o szukanej prostej. Z twierdzenia o trzech siłach wynika, że taki układ jest w równowadze, jeżeli proste działania sił przecinają się w jednym punkcie. Można wyznaczyć więc punkt  $M$  przecięcia się sił  $\bar{S}$  i  $\bar{R}_A$ .



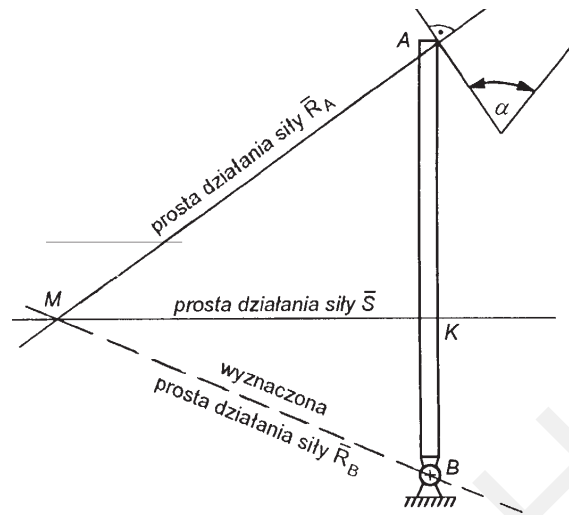
Rys. 1.2.3



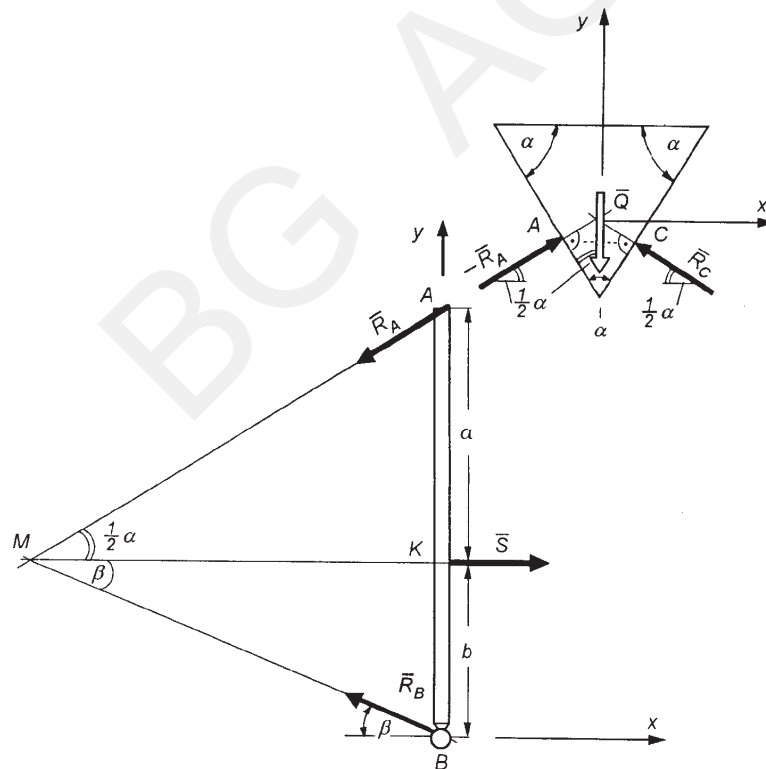
Rys. 1.2.3a

Przez ten punkt musi przechodzić prosta działania siły  $\bar{R}_B$ , a z drugiej strony musi ona przejść przez punkt  $B$  (podpora). Prowadząc przez te dwa punkty prostą, wyznacza się prostą działania siły  $\bar{R}_B$  (rys. 1.2.3b).

Mając wyznaczone kierunki wszystkich sił reakcji, należy je przyłożyć odpowiednio do bryły  $M_1$  i belki  $AB$  i napisać równania równowagi niezależnie dla obu brył. Obciążenie obu brył pokazano na rysunku 1.2.3c.



Rys. 1.2.3b



Rys. 1.2.3c



Dla przyjętego układu odniesienia równania równowagi mają postać:  
dla bryły  $M_1$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_A \cos \frac{\alpha}{2} - R_C \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_A \sin \frac{\alpha}{2} - Q + R_C \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (2)$$

dla belki  $AB$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_A \cos \frac{\alpha}{2} + S - R_C \cos \beta = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_A \sin \frac{\alpha}{2} + R_B \sin \beta = 0 \quad (4)$$

W równaniach równowagi występuje 5 niewiadomych ( $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ ,  $S$  i kąt  $\beta$ ) i do ich wyznaczenia konieczne jest piąte równanie. Z  $\Delta MKA$  i  $\Delta MKB$  wyznaczono  $MK = a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  oraz  $MK = b \operatorname{ctg} \beta$ , a następnie, po porównaniu stronami, otrzymano

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

Po rozwiązaniu układu równań (1)–(5) z uwzględnieniem wartości liczbowych otrzymuje się ostatecznie wartości szukanych reakcji:  $R_B = 833,3 \text{ N}$ ;  $R_C = 500 \text{ N}$ ;  $S = 133 \text{ N}$ .

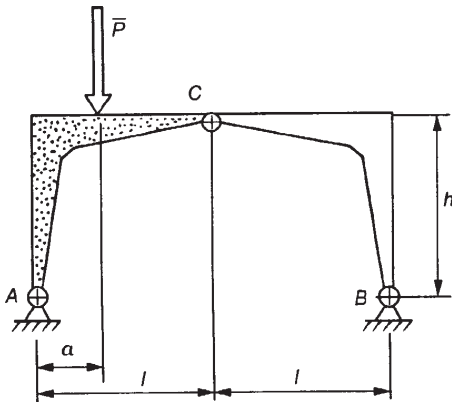
#### ZADANIE 1.2.4

Rama przegubowa z przegubem  $C$  (rys. 1.2.4) zamocowana do podłoża dwoma nieprzesuwnymi przegubami  $A$  i  $B$  obciążona jest pionową siłą  $P = 5000 \text{ N}$ . Wyznaczyć wartości reakcji podpór  $A$  i  $B$ , jeżeli ich rozstaw  $2l = 4 \text{ m}$ , wysokość ramy  $h = 1 \text{ m}$  oraz odległość od przegubu  $A$  do kierunku działania siły  $\bar{P}$  wynosi  $a = 1 \text{ m}$ . Ciężar ramy pominąć.

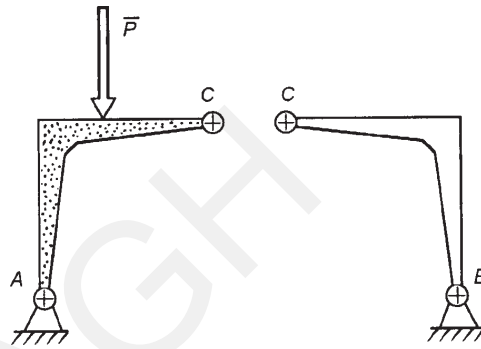
#### Rozwiązanie

Ze względu na to, że przeguby  $A$  i  $B$  są nieprzesuwne, nieznanne są kierunki reakcji tych podpór. Kierunki reakcji można wyznaczyć, rozdzielając w przegubie  $C$  ramę na dwie niezależne części i rozpatrując równowagę każdej z nich z osobna (rys. 1.2.4a). Przy rozłączeniu obu części w punkcie  $C$  należy pamiętać o przyłożeniu do każdej z nich sił wzajemnego oddziaływania (na podstawie III prawa Newtona). Punkt  $C$  speł-

nia dla każdej części rolę przegubu nieprzesuw nego (punkt  $C$  nie ma możliwości przemieszczania się) i w związku z tym nie jest znany kierunek sił wzajemnego oddziaływania w tym punkcie. Na lewą część ramy działają 3 siły:  $\bar{P}$  o znanym kierunku i znanej wartości,  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_C$  o nieznanymi kierunkach. Nie znając dwóch kierunków sił, nie można wykorzystać twierdzenia o trzech siłach do wyznaczenia szukanych kierunków, nie można bowiem wyznaczyć punktu przecięcia się kierunków sił.

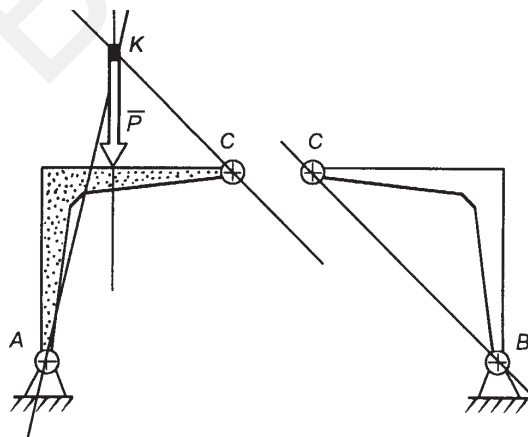


Rys. 1.2.4



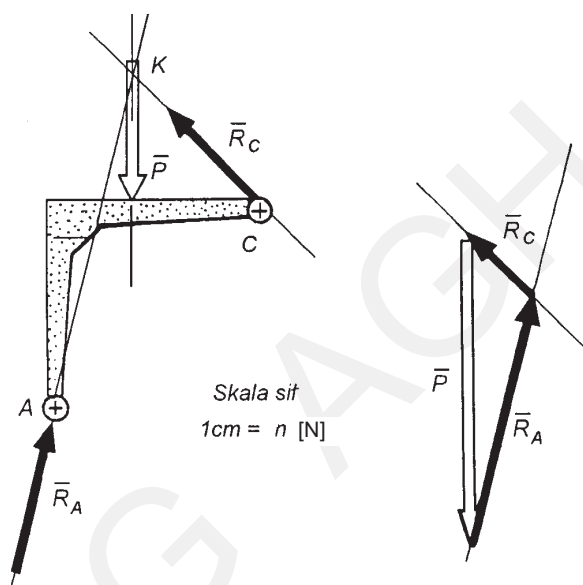
Rys. 1.2.4a

Na prawą część ramy działają dwie siły:  $\bar{R}_B$  i  $\bar{R}_C$  o nieznanymi kierunkach. Można jednak w tym przypadku wyznaczyć te kierunki, wiedząc, że w położeniu równowagi dwie siły tworzą „dwójkę zerową”, a więc muszą leżeć na jednej prostej, muszą mieć te same wartości i przeciwne zwroty. Siła  $\bar{R}_B$  musi przechodzić przez punkt  $B$ , siła  $\bar{R}_C$  przez punkt  $C$  i w związku z tym kierunkiem obu tych sił jest kierunek  $BC$  (rys. 1.2.4b).



Rys. 1.2.4b

Znając kierunek siły  $\bar{R}_C$ , nanosi się go na lewą część ramy i korzystając z twierdzenia o trzech siłach, znajduje się punkt  $K$  przecięcia się kierunków sił  $\bar{R}_C$  i  $\bar{P}$ , a następnie wyznacza się kierunek reakcji  $\bar{R}_A$ , prowadząc prostą przez punkty  $A$  i  $K$ . Wartości liczbowe szukanych reakcji wyznaczono metodą graficzną i analityczną. Metoda graficzna polega na zbudowaniu zamkniętego wieloboku sił. Budowę wieloboku sił rozpoczyna się od siły  $\bar{P}$  (znany kierunek i wartość), a następnie przez jej koniec prowadzi się kierunek np. siły  $\bar{R}_A$ . Wielobok sił zamknięto, prowadząc przez początek siły  $\bar{P}$  kierunek siły  $\bar{R}_C$  (rys. 1.2.4c).



Rys. 1.2.4c

Wyznaczone siły przyłożono do lewej części ramy. Rozkład sił działających na prawą część pokazano na rysunku 1.2.4d. Mając obliczoną siłę  $\bar{R}_C$ , znamy również wartość siły  $\bar{R}_B$ , wiedząc, że obie siły tworzą „dwójkę zerową”. W celu analitycznego wyznaczenia wartości szukanych sił wykorzystano rozkład sił przedstawiony na rysunku 1.2.4e.

Układ sił  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{P}$  i  $\bar{R}_B$  jest układem płaskim środkowym. Siły wzajemnego oddziaływania w punkcie  $C$  tworzą, jak wiadomo, „dwójkę zerową” i nie będą uwzględniane w warunku równowagi. W przyjętym układzie odniesienia otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_A \cos \alpha - R_B \cos \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_A \sin \alpha - P + R_B \sin \beta = 0 \quad (2)$$

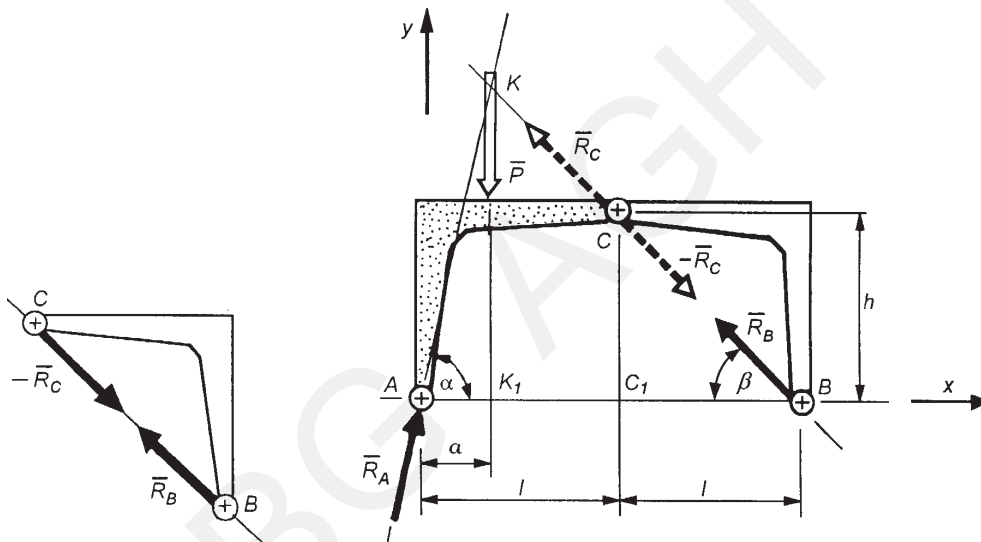
Z równań tych wyznaczyć można wartość sił  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$ , jeżeli znane będą kąty  $\alpha$  i  $\beta$ . Dodatkowe równania ułożyć można z zależności geometrycznych (rys. 1.2.4e).

Z  $\Delta CC_1B$  wynika

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{l} \quad (3)$$

Porównując wysokość  $KK_1$  w  $\Delta AKK_1$  i  $\Delta KK_1B$ , otrzymuje się

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2l - a}{a} \cdot \frac{h}{l} \quad (4)$$



Rys. 1.2.4d

Rys. 1.2.4e

Z równań (1)–(4) po ich rozwiązaniu otrzymano wartości szukanych reakcji w postaci ogólnej:

$$R_A = P \frac{\sqrt{a^2 l^2 + (2l - a)^2 h^2}}{2hl},$$

$$R_B = P \frac{a \sqrt{h^2 + l^2}}{2hl}.$$

Wartości liczbowe wynoszą:  $R_A = 0,9P = 4500 \text{ N}$ ,  $R_B = 0,56P = 2800 \text{ N}$ .

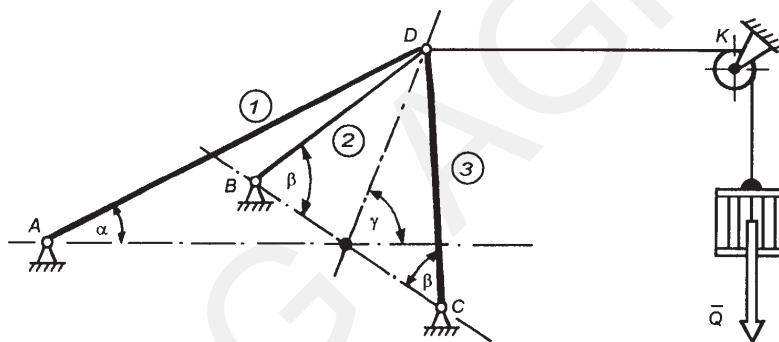
### 1.3. Przestrzenny  rodkowy ukł ad sił

#### ZADANIE 1.3.1

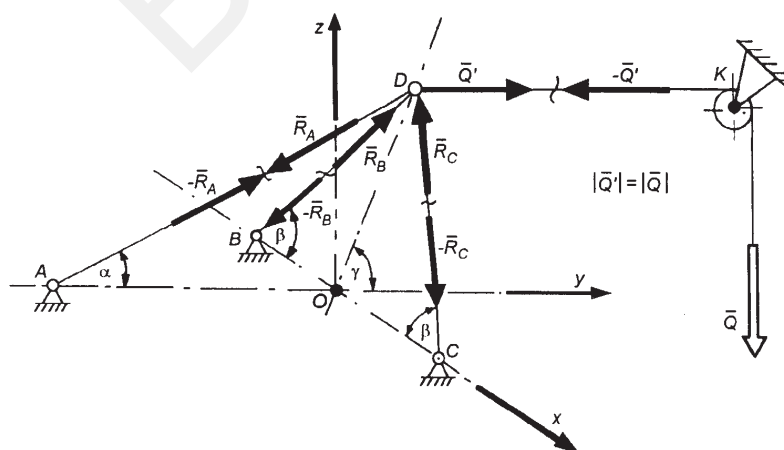
Trzy nieważkie pręty połączone przegubem  $D$  zamocowane są do poziomej powierzchni przegubami  $A$ ,  $B$  i  $C$  (rys. 1.3.1). Ukł ad obci zony jest cięŜazem  $Q$  zamocowanym na linie przerzuconej przez kr ezek  $K$ . Pręt 1 nachylony jest do poziomu pod kątem  $\alpha$ , pręty 2 i 3 pod kątami  $\beta$ , natomiast płaszczyzna  $BCD$  pod kątem  $\gamma$ . Obliczyć wartości sił reakcji  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_C$ , jeŜeli  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $Q = 1000$  N.

#### Rozwi zanie

Nieważkie pręty zamocowane przegubowo pracuj  jako cięŜna i w zwi zku z tym przenoszą jedynie siły działające wzdł z osi prętów. Uwalniaj c ukł ad od więzów znamy kierunki wszystkich sił reakcji przegubów  $A$ ,  $B$  i  $C$  (rys. 1.3.1a). Siła  $\bar{Q}'$  przył ozona w punkcie  $D$  r wna jest co do wartości sile cięŜkości  $\bar{Q}$  ciała  $Q$  ze względu na to, Ŝe linia zmienia jedynie kierunek działania siły, a nie jej warto  . Siły  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_C$  przył ozone w punkcie  $D$  s  siłami reakcji, tzn. oddziaływania przegubów na punkt  $D$ .



Rys. 1.3.1



Rys. 1.3.1a

Po drugiej stronie myślowych przekrojów można przyłożyć, na podstawie III prawa Newtona, siły oddziaływania punktu  $D$  na podpory. Układ tak przyłożonych sił tworzy odpowiednio na kierunkach prętów „dwójki zerowe”. Do rozpatrzenia równowagi punktu  $D$  bierze się pod uwagę jedynie siły działające na ten punkt po odrzuceniu więzów, tzn.  $\bar{R}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{Q}'$ , tworzące przestrzenny środkowy układ sił. Korzystając z analitycznego warunku równowagi, dla takiego układu napisano równania równowagi w przyjętym układzie odniesienia:

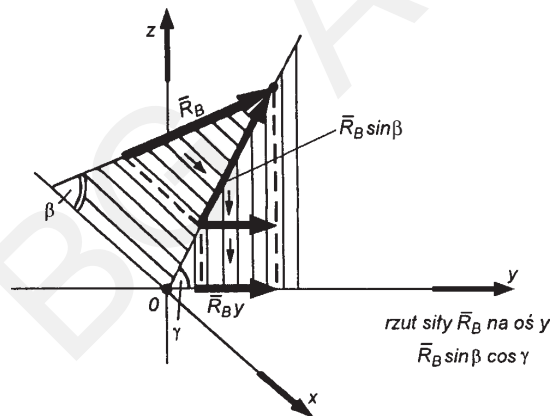
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -R_C \cos \beta + R_B \cos \beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow Q' - R_A \cos \alpha + R_B \sin \beta \cos \gamma + R_C \sin \beta \cos \gamma = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow R_B \sin \beta \sin \gamma + R_C \sin \beta \sin \gamma - R_A \sin \alpha = 0,$$

gdzie  $Q' = Q$ .

Rzuty sił  $\bar{R}_B$  i  $\bar{R}_C$  na osie  $y$  i  $z$  otrzymuje się, rzutując te siły najpierw na kierunku  $OD$ , a następnie otrzymane składowe na tym kierunku rzutuje się na odpowiednie osie; np. rzut siły  $\bar{R}_B$  na oś  $y$  otrzymuje się w sposób pokazany na rysunku 1.3.1b.



Rys. 1.3.1b

Rozwiązując układ równań równowagi otrzymano:

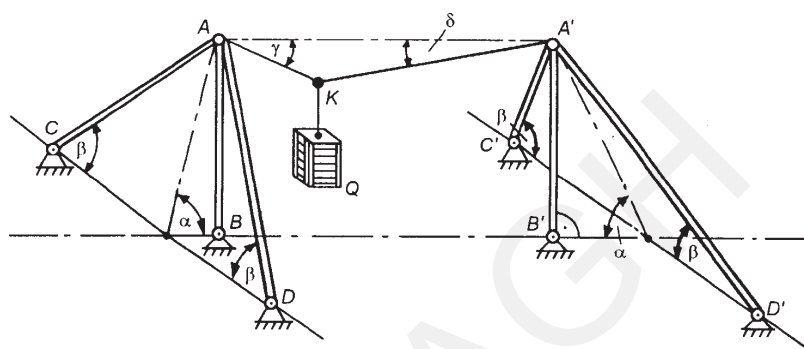
$$R_A = Q \frac{\sin \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)},$$

$$R_B = R_C = \frac{1}{2} Q \frac{\sin \alpha}{\sin \beta \sin (\alpha + \gamma)}.$$

Dla danych liczbowych  $R_A = 0,74Q = 740 \text{ N}$ ,  $R_B = R_C = 0,3Q = 300 \text{ N}$ .

**ZADANIE 1.3.2**

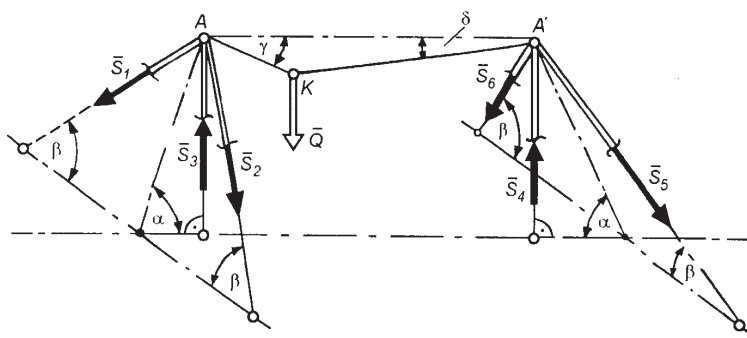
Ciężar  $Q$  podwieszony jest na dwóch linach  $AK$  i  $A'K$  zamocowanych do pionowych masztów  $AB$  i  $A'B'$  (rys. 1.3.2). Maszty utrzymywane są w położeniu pionowym prętami  $AC$ ,  $AD$ ,  $A'C'$  i  $A'D'$ . Obliczyć wartości sił w linach  $AK$  i  $A'K$  oraz w prętach  $AC$ ,  $AD$ ,  $AB$ ,  $A'C'$ ,  $A'D'$  i  $A'B'$  w położeniu równowagi układu, przyjmując, że  $Q = 10$  kN,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $\delta = 45^\circ$ , oraz zakładając, że wszystkie pręty zamocowane są do podłoża za pomocą przegubów nieprzesuwnych, jak również, że pręty w punktach  $A$  i  $A'$  połączone są przegubowo.



Rys. 1.3.2

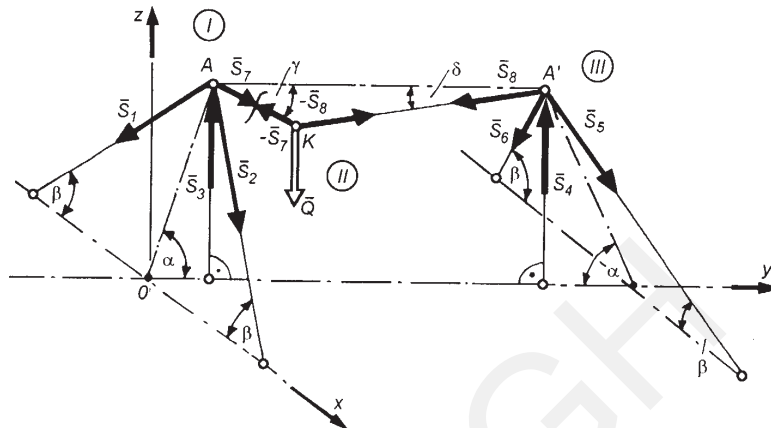
**Rozwiązanie**

Pręty  $AC$ ,  $AB$ ,  $AD$ ,  $A'B'$ ,  $A'C'$  i  $A'D'$  podobnie jak w przykładzie 1.3.1 przenoszą jedynie siły działające wzdłuż osi tych prętów. Odrzucając więzy, tj. podpory  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , i przykładając w ich miejsce odpowiednie siły reakcji, otrzymuje się układ sił jak na rysunku 1.3.2a. W miejsce ciężaru  $Q$  przyłożono siłę ciężkości  $\bar{Q}$  działającą wzdłuż liny, na której zawieszony jest ten ciężar. Mając do dyspozycji trzy równania równowagi dla układu środkowego przestrzennego, nie można wyliczyć sześciu niewiadomych  $S_1, \dots, S_6$ .



Rys. 1.3.2a

Wydzielając jednak z całego układu złożonego (rys. 1.3.2a) trzy układy proste I, II, III z węzłami w punktach  $A$ ,  $K$ ,  $A'$ , otrzymuje się równania równowagi w ilości odpowiadającej liczbie niewiadomych sił. Rozkład sił dla poszczególnych podukładów przedstawiono na rysunku 1.3.2b.



Rys. 1.3.2b

Układy I i III są układami środkowymi przestrzennymi, natomiast układ II jest układem środkowym płaskim. Opisując układy I i III trzema równaniami równowagi oraz układ II dwoma równaniami równowagi, otrzymuje się osiem równań do wyznaczenia ośmiu niewiadomych.

W przyjętym jak na rysunku 1.3.2b układzie odniesienia równania mają poniższą postać.

#### Układ I

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -S_1 \cos \beta + S_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -S_1 \sin \beta \cos \alpha - S_2 \sin \beta \cos \alpha + S_7 \cos \gamma = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow -S_1 \sin \beta \cos \alpha - S_2 \sin \beta \sin \alpha + S_3 - S_7 \sin \gamma = 0.$$

#### Układ II

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -S_7 \cos \gamma + S_8 \cos \delta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow S_7 \sin \gamma + S_8 \sin \delta - Q = 0.$$



**Układ III**

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow S_5 \cos \beta - S_6 \cos \beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = \rightarrow S_5 \sin \beta \cos \alpha + S_6 \sin \beta \cos \alpha - S_8 \cos \delta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = \rightarrow -S_5 \sin \beta \sin \alpha - S_6 \sin \beta \sin \alpha + S_4 - S_8 \sin \delta = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymuje się:

$$S_1 = S_2 = Q \frac{\cos \gamma}{2 \sin \beta \sin (\alpha + \gamma)},$$

$$S_3 = Q \left( \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\sin (\alpha + \gamma)} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{tg} \delta} \right),$$

$$S_4 = Q \frac{\cos \gamma (\sin \delta + \cos \delta \operatorname{tg} \alpha)}{\sin (\gamma + \delta)},$$

$$S_5 = S_6 = Q \frac{\cos \gamma \cos \delta}{2 \cos \alpha \sin \beta \sin (\gamma + \delta)},$$

$$S_7 = Q \frac{1}{\sin \gamma + \cos \gamma \operatorname{tg} \delta},$$

$$S_8 = Q \frac{\cos \gamma}{\sin (\gamma + \delta)},$$

a po podstawieniu danych liczbowych wartości szukanych sił:

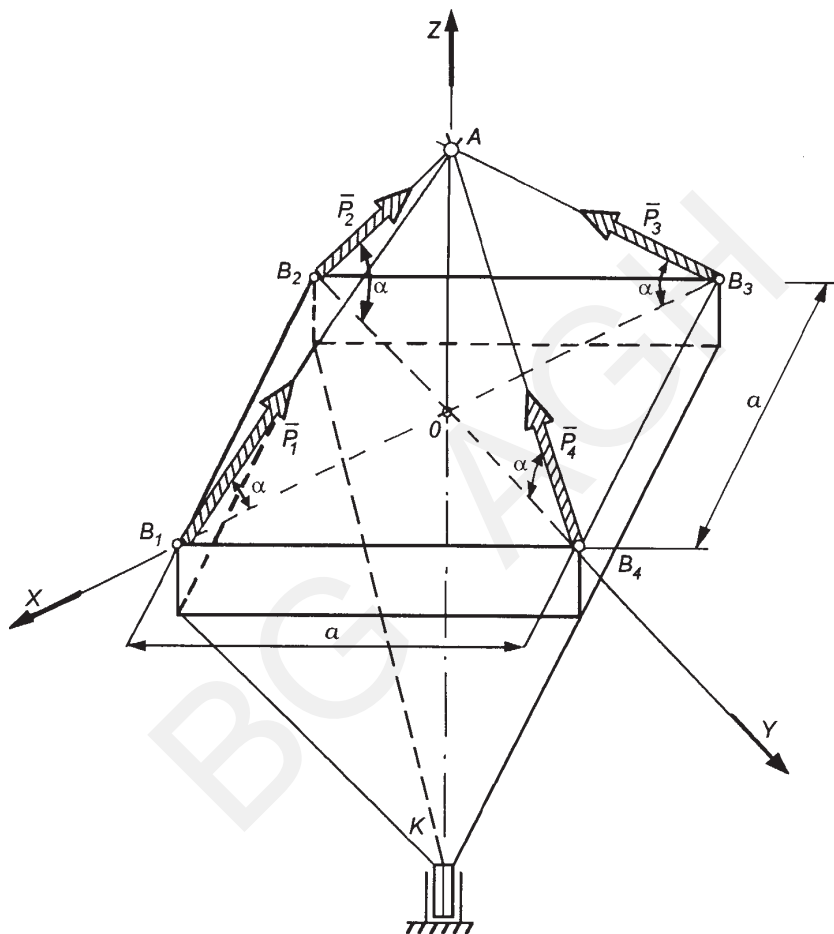
$$S_1 = S_2 = 6,1 \text{ kN}, S_3 = 11,1 \text{ kN}, S_4 = 17,4 \text{ kN}, S_5 = S_6 = S_8 = 9 \text{ kN}, S_7 = 7,33 \text{ kN}.$$

**Uwaga.** Rzuty sił  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_5, \bar{S}_6$  na osi  $y$  i  $z$  przyjętego układu odniesienia wyznaczyć można kierując się wskazówkami z zadania 1.3.1.

**ZADANIE 1.3.3**

Na bryłę  $K$  działa układ sił  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$  przecinających się w punkcie  $A$  (rys. 1.3.3.). Zastąpić ten układ jedną siłą równoważną zadanemu układowi.

Dane:  $OA = h = 2a, P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ .



Rys. 1.3.3

**Rozwiązanie**

Układ sił działających na bryłę  $K$  jest układem środkowym przestrzennym o kierunkach przecinających się w punkcie  $A$ . Zastąpienie układu sił jedną siłą równoważną mu sprowadza się do wyznaczenia wypadkowej tego układu, przy czym wypadkowa ta

musi przechodzić przez punkt  $A$ . Ze względu na to, że siła wypadkowa jest równa geometrycznej sumie wszystkich sił układu, jej rzut na daną oś jest równy sumie rzutów na tę oś wszystkich sił tego układu. Otrzymuje się więc:

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = -P_1 \cos \alpha + P_3 \cos \alpha,$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = -P_4 \cos \alpha + P_2 \cos \alpha,$$

$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = P_1 \sin \alpha + P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \alpha + P_4 \sin \alpha.$$

Uwzględniając dane, obliczono

$$W_x = 0, W_y = 0, W_z = 4P \sin \alpha$$

oraz

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = 4P \sin \alpha.$$

W tym przypadku wartość wypadkowej równa jest wartości  $W_z$ , co można było stwierdzić po obliczeniu rzutów wypadkowej. Na podstawie obliczonych rzutów można również stwierdzić, że kierunek wypadkowej pokrywa się z kierunkiem osi  $z$  i zwrot jej jest zgodny ze zwrotem osi  $z$ .

Kierunek wypadkowej można również określić, obliczając kąty, jakie zawiera ona z kierunkami poszczególnych osi układu odniesienia. Oznaczając odpowiednio przez  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  kąty zawarte pomiędzy kierunkiem wypadkowej z osiami  $x, y, z$ , otrzymuje się:

$$\cos \alpha_1 = \frac{W_x}{W} = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2},$$

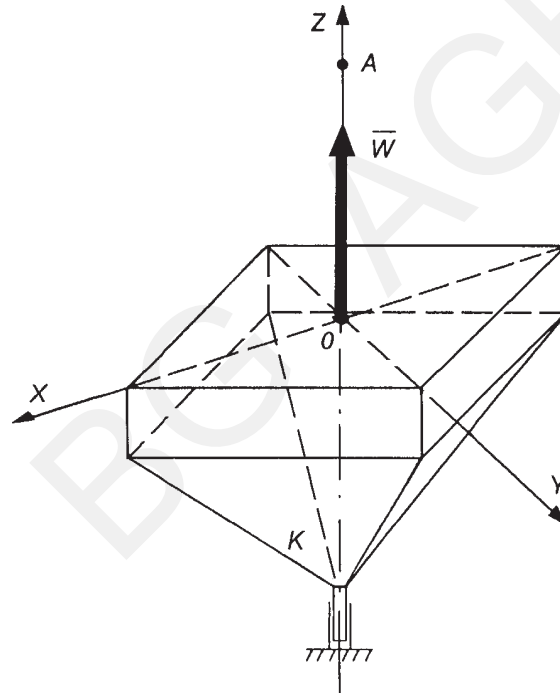
$$\cos \alpha_2 = \frac{W_y}{W} = 0 \rightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{W_z}{W} = 1 \rightarrow \alpha_3 = 0.$$

Jak widać, wypadkowa leży na kierunku osi  $z$  i ma zgodny z nią zwrot. Tak więc zamiast sił  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  można przyłożyć do bryły  $K$  jedną siłę  $\bar{W}$  jak na rysunku 1.3.3a.

Wartość siły wypadkowej obliczyć można po wyznaczeniu kąta  $\alpha$ . Z  $\triangle AOB_1$  (rys. 1.3.3) wynika:

$$\sin \alpha = \frac{AO}{AB_1} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} \quad \text{i} \quad W = \frac{4h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} P.$$



Rys. 1.3.3a

Uwzględniając dane, otrzymano  $W = \frac{8}{3} P\sqrt{2}$ .

**Uwaga.** Proponuje się wykonać obliczenia dla danych  $P_1 = 2P, P_2 = P_3 = P_4 = P$ .

## 1.4. Płaski dowolny układ sił

### ZADANIE 1.4.1

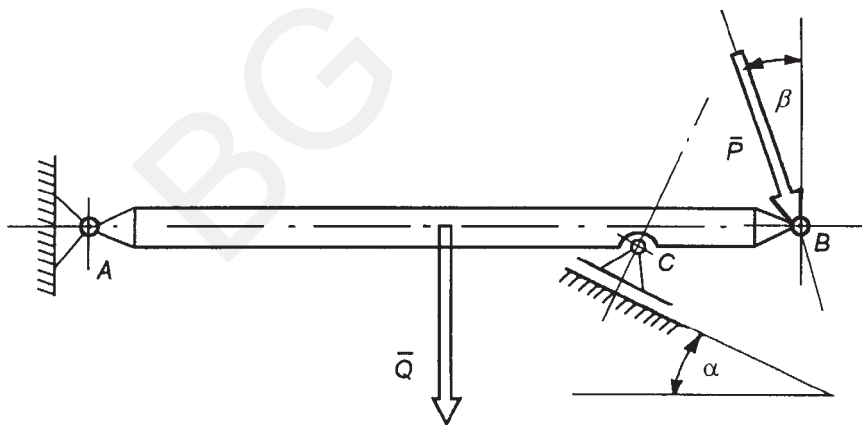
Pozioma belka jednorodna  $AB$  o ciężarze  $Q$  (rys. 1.4.1.) zamocowana jest w punkcie  $A$  przegubowo (przegub nieprzesuwny), a w punkcie  $C$  za pomocą przegubu przesuwne pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Belka obciążona jest w punkcie  $B$  siłą  $\bar{P}$  o wartości  $P = \sqrt{3}Q$ , tworzącą z kierunkiem pionowym kąt  $\beta$ .

Wyznaczyć wartość reakcji podpór w położeniu równowagi, jeżeli:

$$AC = \frac{3}{4}AB \text{ i } CB = \frac{1}{4}AB, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ.$$

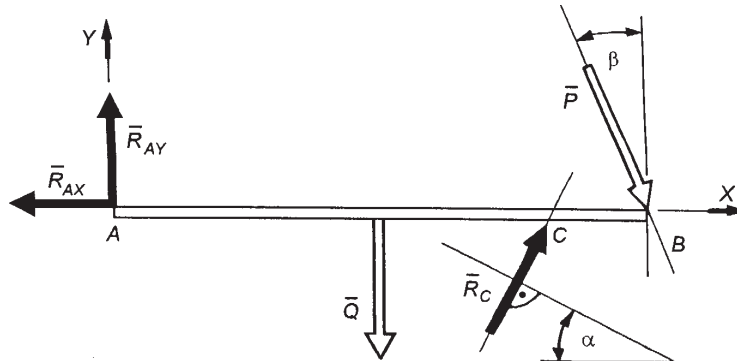
### Rozwiązanie

Na belkę działają siły czynne  $\bar{P}$  i  $\bar{Q}$  oraz siły reakcji  $\bar{R}_A$  w punkcie  $A$  i  $\bar{R}_C$  w punkcie  $C$ . Ze względu na to, że przegub  $A$  jest przegubem nieprzesuwным, nieznana jest prosta działania reakcji  $\bar{R}_A$ , natomiast w punkcie  $C$  prosta działania reakcji  $\bar{R}_C$  jest prostopadła do kierunku możliwego przesunięcia.



Rys. 1.4.1

Reakcję  $\bar{R}_A$  wyznaczyć można, obliczając dwie jej składowe wzajemnie prostopadłe zgodnie z przyjętym układem odniesienia. Belkę  $AB$  po uwolnieniu od więzów przedstawiono na rysunku 1.4.1a.



Rys. 1.4.1a

Siły czynne i reakcje działające na belkę tworzą układ płaski dowolny sił, dla którego analityczny warunek równowagi daje trzy równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -R_{Ax} + R_C \sin \alpha + P \sin \beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_{Ay} - Q + R_C \cos \alpha - P \cos \beta = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} AB \cdot Q + R_C \cos \alpha - AB \cdot P \cos \beta = 0.$$

Biegun, względem którego obliczana jest algebraiczna suma momentów wszystkich sił, przyjąć można dowolnie, lecz ze względów obliczeniowych wygodnie jest obrać go w punkcie przecięcia się największej liczby nieznanych sił, tzn. w tym przypadku w punkcie  $A$  lub  $C$ . Rozwiązując układ równań równowagi, otrzymuje się

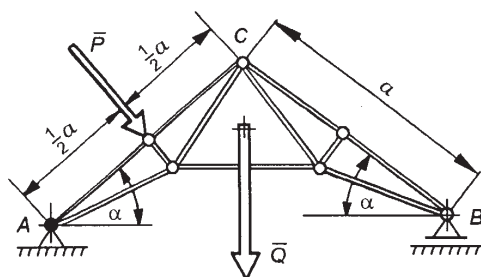
$$R_{Ax} = \frac{19}{6} \sqrt{3} Q, \quad R_{Ay} = -\frac{1}{6} Q, \quad R_C = \frac{16}{3} Q.$$

Znak „-” przy  $R_{Ay}$  oznacza, że błędnie założono zwrot siły  $\bar{R}_{Ay}$  i że w rzeczywistości działa ona zwrócona przeciwnie do zwrotu osi  $y$  przyjętego układu odniesienia. Całkowitą wartość reakcji  $\bar{R}_A$  obliczyć można z zależności  $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$ , a kierunek określając kąt, jaki tworzy ona z osią  $x$  – z zależności  $\cos(\bar{R}_A, x) = \frac{R_{Ax}}{R_A}$ .

#### ZADANIE 1.4.2

Kratownica  $ABC$  spoczywa na dwóch podporach: przegubie nieprzesuwnym  $A$  i przegubie przesuwnym  $B$  (rys. 1.4.2). Ciężar kratownicy wynosi  $Q = 100\,000$  N. Strona  $AC$

kratownicy narażona jest na równomiernie rozłożone i prostopadłe do  $AC$  obciążenie wynikające z parcia wiatru. Wypadkowa tego obciążenia ma wartość  $P = 8000$  N. Obliczyć wartość reakcji podpór w położeniu równowagi, jeżeli  $AC = CB = a = 6$  m,  $\alpha = 30^\circ$ .



Rys. 1.4.2

### Rozwiązanie

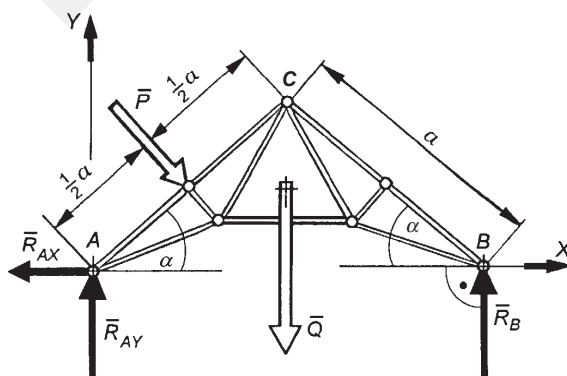
Po odrzuceniu więzów (przeguby  $A$  i  $B$ ) na kratownicę działają siły:  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  i  $\bar{R}_B$  (rys. 1.4.2a). Dla tego układu sił warunek analityczny równowagi daje trzy równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -R_{Ax} + P \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -R_{Ay} - P \cos \alpha - Q + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow -P \cdot \frac{1}{2}a - Qa \cos \alpha + R_B \cdot 2a \cos \alpha = 0.$$

Rozwiązując układ równań, otrzymuje się:  $R_{Ax} = 4000$  N,  $R_{Ay} = 54\,617$  N,  $R_B = 52\,311$  N i ostatecznie  $R_A = 54\,763$  N.

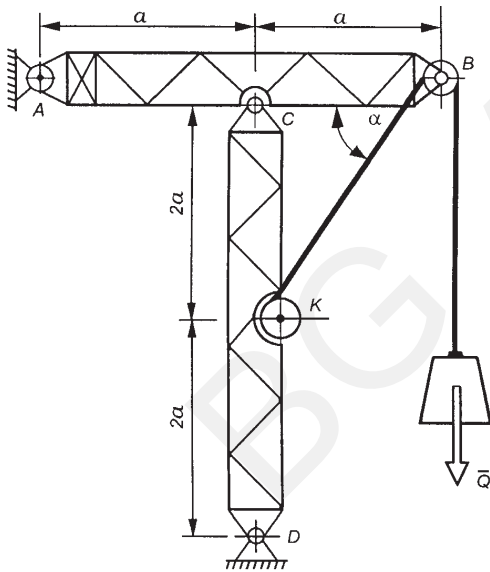


Rys. 1.4.2a

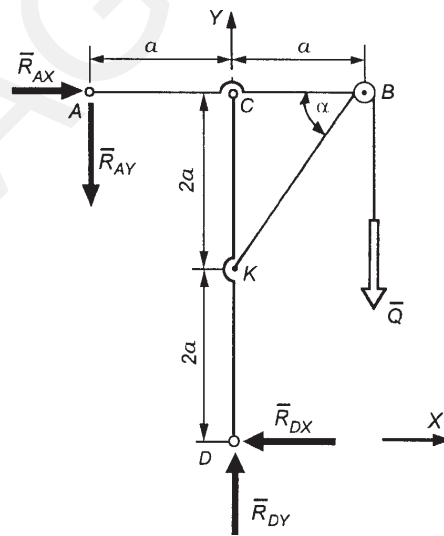
**Uwaga.** Do obliczania wartości sił w prętach kratownicy wystarcza rozważyć równowagę każdego węzła (przegubu łączącego pręty) kratownicy, stosując dla poszczególnych węzłów warunki równowagi układu środkowego płaskiego sił. Przedtem należy jednak wyznaczyć siły reakcji podpór  $A$  i  $B$ .

### ZADANIE 1.4.3

Ręczny podnośnik stacjonarny składa się z dwóch belek,  $AB$  i  $CD$ , połączonych przegubem  $C$ . Obie belki zamocowane są w przegubach nieprzesuwnych, odpowiednio  $A$  i  $D$  (rys. 1.4.3). W punkcie  $B$  ułożyskowany jest krążek linowy, przez który przerzucona jest lina obciążona ciężarem  $Q$ . Drugi koniec liny nawinięty jest na zablokowany bęben  $K$ . Obliczyć wartość reakcji podpór  $A$  i  $D$  w położeniu równowagi, mając długość  $a$  i kąt  $\alpha$ . Tarcie na krążku linowym oraz wymiary tego krążka i bębna  $K$  pominać.



Rys. 1.4.3



Rys. 1.4.3a

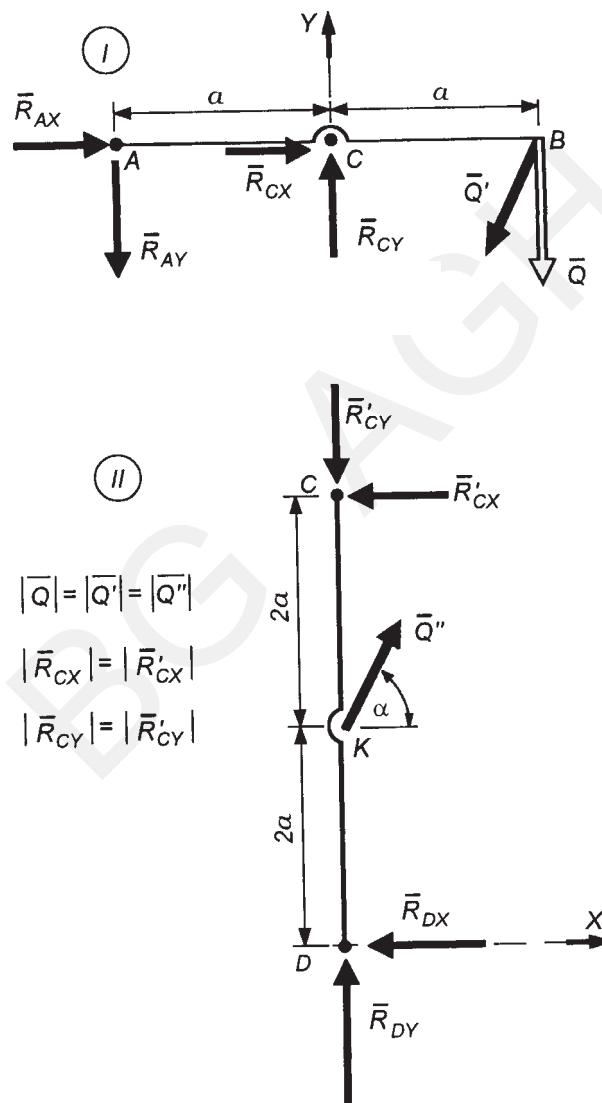
### Rozwiązanie

Jako model obliczeniowy przyjąć można zastępczy schemat podnośnika z przyłożonymi siłami reakcji po odrzuceniu podpór  $A$  i  $D$  (rys. 1.4.3a).

Układ sił działających na podnośnik zawiera cztery niewiadome ( $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Dx}$ ,  $\bar{R}_{Dy}$ ), których nie wyznaczy się, dysponując trzema równaniami równowagi dla układu płaskiego dowolnego sił.



Celem wyznaczenia szukanych niewiadomych rozpatrzono równowagę belki  $AB$  i belki  $CD$  osobno, przy czym rozdzielając układ na dwa podukłady I i II, przyłożono siły wzajemnego oddziaływania w miejscu, w którym obie belki są połączone (punkt  $C$ , spełniający rolę przegubu nieprzesuwne), oraz oddziaływania liny w punkcie  $K$  na belkę  $CD$  i w punkcie  $B$  na belkę  $AB$  (rys. 1.4.3b).



Rys. 1.4.3b

Utworzenie dwóch podukładów I i II zwiększyło liczbę niewiadomych do sześciu ( $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}, \bar{R}_{Dx}, \bar{R}_{Dy}, \bar{R}_{Cx}, \bar{R}_{Cy}$ ), ale można obecnie ułożyć po trzy równania równowagi, odpowiednio dla belki  $AB$  (podukład I) i  $CD$  (podukład II), co daje sześć równań do wyznaczenia sześciu niewiadomych.

#### Podukład I

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_{Ax} + R_{Cx} - Q \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -R_{Ay} + R_{Cy} - Q \sin \alpha - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(B)} = 0 \rightarrow R_{Ax} \cdot 2a - R_{Cx} \cdot a = 0.$$

#### Podukład II

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow -R_{Cx} + Q \cos \alpha - R_{Dx} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -R_{Cy} + Q \sin \alpha + R_{Dy} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(K)} = 0 \rightarrow R_{Cx} \cdot 2a - R_{Dx} \cdot 2a = 0.$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymuje się:

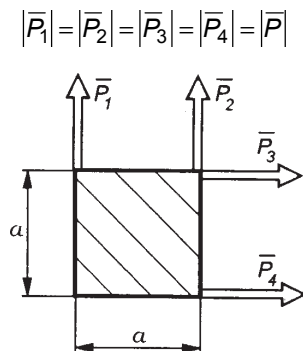
$$R_{Ax} = \frac{1}{2} Q \cos \alpha, \quad R_{Ay} = Q(1 + \sin \alpha),$$

$$R_{Dx} = \frac{1}{2} Q \cos \alpha, \quad R_{Dy} = Q(2 + \sin \alpha)$$

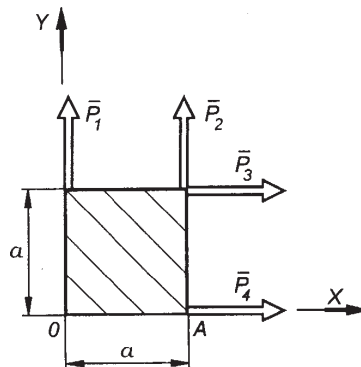
oraz  $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}, \quad R_D = \sqrt{R_{Dx}^2 + R_{Dy}^2}.$

#### ZADANIE 1.4.4

Na bryłę o bokach  $a$  działają siły  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  i  $\bar{P}_4$  o wartościach równych  $P$  i kierunkach pokrywających się z odpowiednimi bokami bryły (rys. 1.4.4). Jakim prostszym układem sił można zastąpić zadany układ sił.



Rys. 1.4.4



Rys. 1.4.4a

**Rozwiązanie**

Poszukiwanie układu zastępującego zadany układ sił polega na przeprowadzeniu redukcji układu zadanego, w wyniku czego otrzymuje się równoważny zadanemu układ sił, lecz w znacznie prostszej postaci. Redukcja układu sił polega na wyznaczeniu wektora głównego  $\bar{W}_g$  i wektora momentu głównego  $\bar{M}_g$  w przyjętym układzie odniesienia, w wyniku czego stwierdzić można, do jakiego przypadku redukcji sprowadzony został zadany układ sił. Obierając układ odniesienia jak na rysunku 1.4.4a, obliczono współrzędne wektora głównego  $\bar{W}_g$  oraz wartość momentu głównego  $\bar{M}_g$ , przyjmując biegun redukcji w punkcie 0:

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} = P_3 + P_4 = 2P,$$

$$W_{gy} = \sum_{i=1}^n P_{iy} = P_1 + P_2 = 2P,$$

$$W_g = \sqrt{W_{gx}^2 + W_{gy}^2} = 2P\sqrt{2},$$

$$\cos(\bar{W}_g, x) = \frac{W_{gx}}{W_g} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \sphericalangle(\bar{W}_g, x) = \frac{\pi}{4},$$

$$M_g = \sum_{i=1}^n M_{i(0)} = P_2 \cdot a - P_3 \cdot a = 0.$$

Otrzymano  $\bar{W}_g = 2P\sqrt{2}$  i  $M_g = 0$ , a więc wystąpił przypadek, gdy układ sił można zastąpić siłą wypadkową  $W = W_g$ , której prosta działania przechodzi przez biegun redukcji. Tak więc, zadany układ sił  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  zastąpić można siłą wypadkową o wartości  $\bar{W}_g = 2P\sqrt{2}$ , której prosta działania przechodzi przez punkt 0 i jest nachylna pod kątem  $45^\circ$  do osi  $x$  (rys. 1.4.4b).

Identyczny rezultat otrzymuje się, obierając biegun redukcji w dowolnym innym punkcie, np. w punkcie  $A$  (rys. 1.4.4a). Ponieważ wektor  $\vec{W}_g$  nie zależy od obioru bieguna redukcji, ograniczono się do wyznaczenia momentu głównego względem punktu  $A$

$$M_g = \sum_{i=1}^n M_{i(A)} = -P_1 \cdot a - P_3 \cdot a = -2Pa.$$

Wynik obliczeń:  $W_g = 2P\sqrt{2}$  i  $|M_g| = 2Pa$ , odpowiada przypadkowi redukcji, gdy układ sił zastąpić można siłą wypadkową o wartości  $W = W_g$ , przesuniętą względem bieguna redukcji o odległość  $d = \frac{|M_g|}{W_g}$ , tak aby jej moment względem bieguna redukcji równy był momentowi głównemu co do wartości i co do znaku. Dla tego przypadku  $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , co odpowiada połowie długości przekątnej kwadratu (rys. 1.4.4c).

Prostą działania wypadkowej można również wyznaczyć, korzystając z równania tej prostej w postaci

$$W_{gy}(x - x_0) - W_{gx}(y - y_0) = M_g,$$

gdzie:  $x_0, y_0$  – współrzędne przyjętego bieguna redukcji.

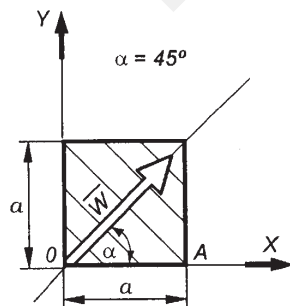
W przypadku przyjęcia bieguna redukcji w punkcie  $O$  otrzymuje się

$$2P \cdot x - 2Py = 0,$$

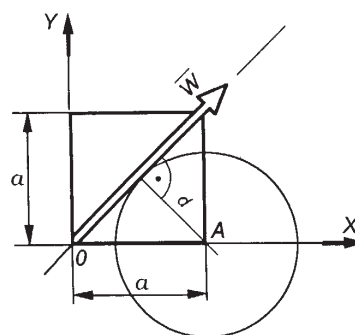
a w przypadku przyjęcia bieguna redukcji w punkcie  $A$

$$2P(x - a) - 2Py = -2Pa,$$

co daje dla obu położenia bieguna redukcji to samo równanie prostej działania wypadkowej  $y = x$  i co pokrywa się z wyznaczonym kierunkiem prostej działania wypadkowej poprzednimi sposobami (rys. 1.4.4b i 1.4.4c).



Rys. 1.4.4b



Rys. 1.4.4c

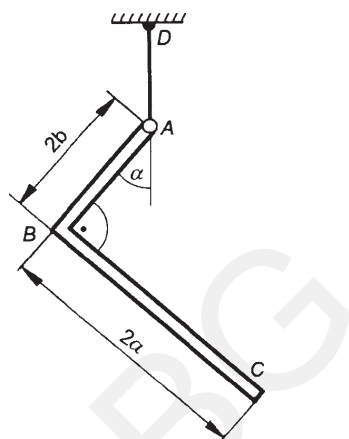
## 1.5. Płaski układ sił równoległych

### ZADANIE 1.5.1

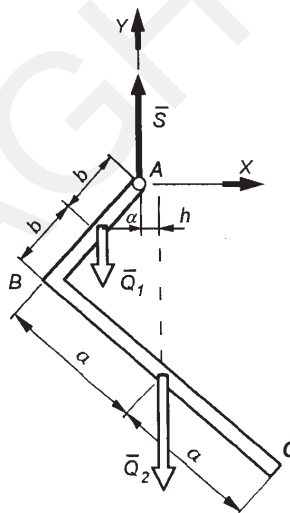
Jednorodny pręt  $ABC$  zakrzywiony pod kątem prostym w punkcie  $B$  zawieszony jest na linie pionowej zamocowanej do powierzchni nieruchomej w punkcie  $D$ . Znając:  $\gamma$  – ciężar jednostki długości pręta,  $AB = 2b$ ,  $BC = 2a$  ( $a > b$ ), wyznaczyć kąt  $\alpha$  w położeniu równowagi (rys. 1.5.1).

### Rozwiązanie

Po uwolnieniu od więzów (lina  $AD$ ) otrzymuje się układ obciążony jak na rysunku 1.5.1a, gdzie:  $Q_1 = 2b\gamma$ ,  $Q_2 = 2a\gamma$  – wartości sił ciężkości odcinków pręta  $AB$  i  $BC$ ,  $\bar{S}$  – siła w linie  $AD$ .



Rys. 1.5.1



Rys. 1.5.1a

Siły czynne i reakcje tworzą w tym przypadku układ sił równoległych, dla którego w przyjętym układzie odniesienia równania równowagi mają postać

$$\sum_{i=1}^n P_{i(y)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0.$$

Ze względu na to, że wyznaczyć należy tylko kąt  $\alpha$ , wystarczy wykorzystać jedynie drugie z równań równowagi, otrzymując

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow Q_1 \cdot b \sin \alpha - Q_2 \cdot h = 0.$$

Podstawiając  $Q_1 = 2b\gamma$ ,  $Q_2 = 2a\gamma$ ,  $h = a \cos \alpha - 2b \sin \alpha$ , otrzymuje się

$$(b^2 + 2ab) \sin \alpha - a^2 \cos \alpha = 0,$$

skąd

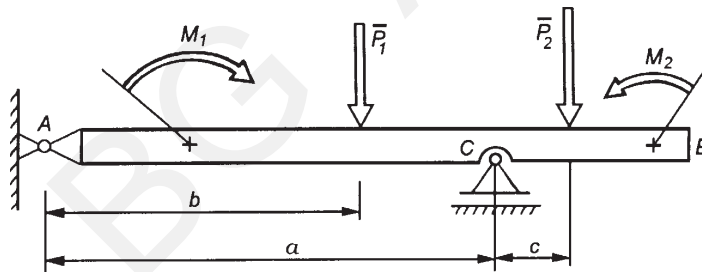
$$\alpha = \arctg \frac{a^2}{b^2 + 2ab}.$$

### ZADANIE 1.5.2

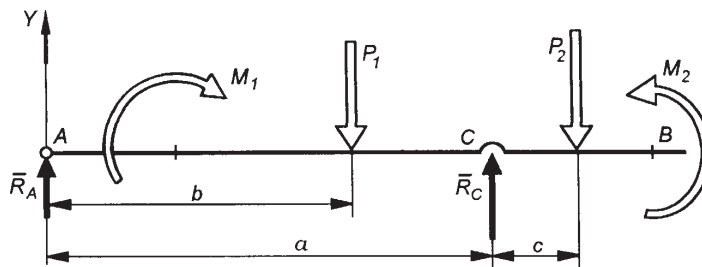
Belka  $AB$  obciążona jest siłami  $P_1 = 600 \text{ N}$ ,  $P_2 = 40 \text{ N}$  oraz dwiema parami sił działających w płaszczyźnie sił  $\bar{P}_1$  i  $\bar{P}_2$  o momentach  $M_1 = 400 \text{ Nm}$  i  $M_2 = 300 \text{ Nm}$  (rys. 1.5.2). Pomijając ciężar belki, wyznaczyć w położeniu równowagi reakcje podpór  $A$  i  $C$ , wiedząc, że  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ ,  $c = 0,5 \text{ m}$ .

### Rozwiązanie

Siły zewnętrzne działające na belkę  $AB$  tworzą układ sił równoległych. Reakcja  $\bar{R}_C$  podpory  $C$  (przegub przesuwny) leży na kierunku prostopadłym do kierunku możliwego ruchu i jest równoległa do prostych działania sił  $\bar{P}_1$  i  $\bar{P}_2$ . Podpora  $A$  jest przegubem nieprzesuwным, jednakże w tym przypadku znany jest kierunek działania reakcji  $\bar{R}_A$ , ponieważ wszystkie pozostałe siły (czynne i reakcja  $\bar{R}_C$ ) są do siebie równoległe, a więc i reakcja  $\bar{R}_A$  musi być do nich równoległa (rys. 1.5.2a).



Rys. 1.5.2



Rys. 1.5.2a

W przyjętym układzie odniesienia, korzystając z analitycznego warunku równowagi dla układu płaskiego sił równoległych, otrzymuje się następujące równania równowagi:

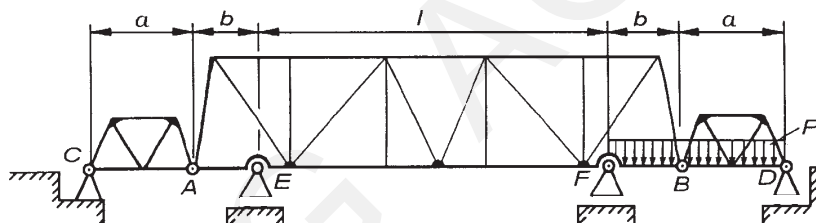
$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_A - P_1 + R_C - P_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow -M_1 - P_1 \cdot b + R_C \cdot a - P_2(a + c) + M_2 = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, po uwzględnieniu danych liczbowych, otrzymano  $R_A = 240 \text{ N}$ ,  $R_C = 400 \text{ N}$ .

**ZADANIE 1.5.3**

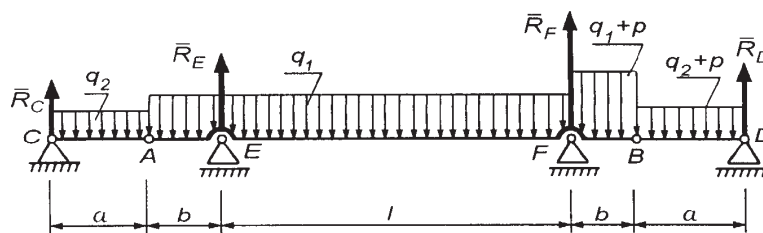
Most składa się z kratownicy głównej  $AB$  i dwóch kratownic bocznych  $AC$  i  $BD$  (rys. 1.5.3). Ciężar jednostki długości dla części  $AB$  wynosi  $q_1 = 15\,000 \text{ N/m}$ , a dla części  $AC$  i  $BD$   $q_2 = 10\,000 \text{ N/m}$ . Obliczyć reakcje podpór  $C, E, F, D$  w położeniu równowagi dla przypadku, gdy przęsło  $FD$  obciążone jest pojazdami wywołującymi obciążenie  $p = 30\,000 \text{ N/m}$ . Wymiary mostu wynoszą:  $AC = BD = a = 20 \text{ m}$ ,  $AE = FB = b = 15 \text{ m}$ ,  $EF = l = 50 \text{ m}$ .



Rys. 1.5.3

**Rozwiązanie**

Zastępczy schemat obliczeniowy mostu z uwzględnieniem obciążeń ciągłych poszczególnych jego części przyłożonymi reakcjami podpór  $C, E, F, D$  pokazano na rysunku 1.5.3a.



Rys. 1.5.3a

Obciążenie ciągłe  $q_1, q_2$  i  $p$  oraz siły  $\bar{R}_C, \bar{R}_E, \bar{R}_F$  i  $\bar{R}_D$  tworzą układ sił równoległych, dla którego można napisać dwa równania równowagi, które nie wystarczają do ob-

liczenia czterech niewiadomych sił reakcji podpór. Jednakże most składa się z trzech części  $CA$ ,  $AB$  i  $BD$  połączonych przegubami w punktach  $A$  i  $B$ , można więc rozpatryć równowagę każdej z tych części niezależnie, przykładając w miejscach łączenia (punkty  $A$  i  $B$ ) odpowiednie siły wzajemnego oddziaływania. Otrzymuje się w ten sposób trzy układy I, II, III z przyłożonymi w odpowiednich punktach sześcioma nieznanymi reakcjami  $\bar{R}_C, \bar{R}_A, \bar{R}_E, \bar{R}_F, \bar{R}_B, \bar{R}_D$  (rys. 1.5.3b). Dla każdego z układów można ułożyć po dwa równania równowagi, otrzymując układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi.

Równania równowagi mają poniższą postać.

#### Układ I

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_C + R_A - q_2 \cdot a = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(C)} = 0 \rightarrow R_A \cdot a - q_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

#### Układ II

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -R_A + R_E + R_F - R_B - q_1(b+l) - (q_1+p)b = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow R_E \cdot b + R_F(b+l) - R_B(2b+l) - q_1(b+l) \frac{b+l}{2} -$$

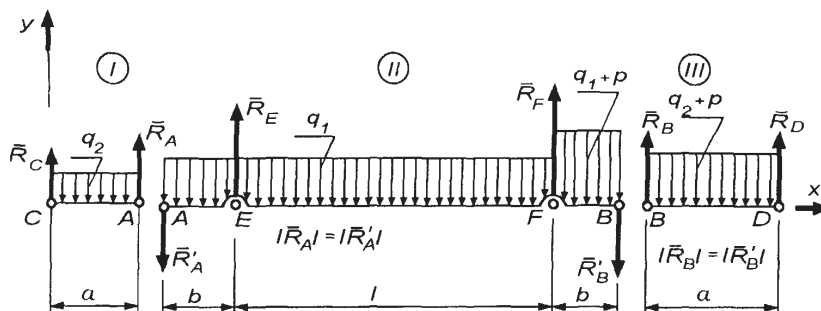
$$-(q_1+p)b \left( b+l + \frac{b}{2} \right) = 0.$$

#### Układ III

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_B + R_D - (q_2+p) \cdot a = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(B)} = 0 \rightarrow R_D \cdot a - (q_2+p) \cdot a \cdot \frac{1}{2} a = 0.$$

Z powyższego układu równań, po jego rozwiązaniu, otrzymuje się:  $R_C = 100\,000$  N,  $R_E = 542\,500$  N,  $R_F = 1\,607\,500$  N,  $R_D = 400\,000$  N.



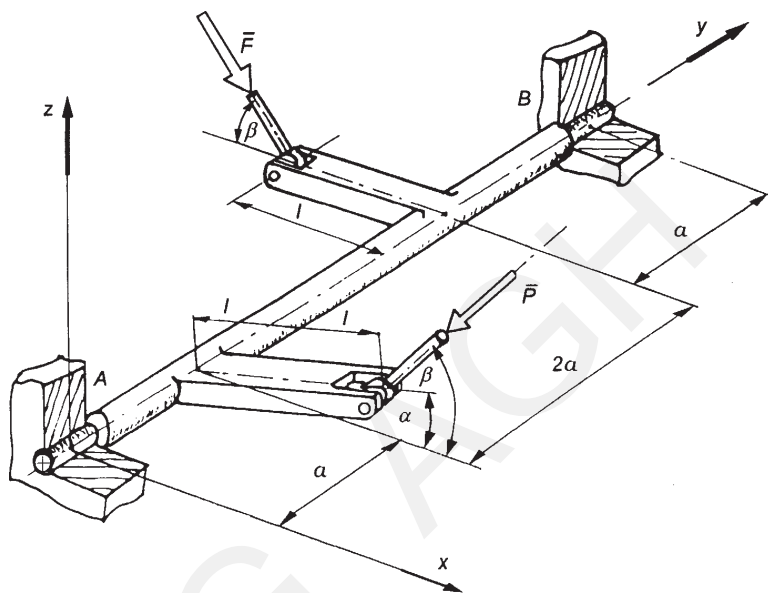
Rys. 1.5.3b



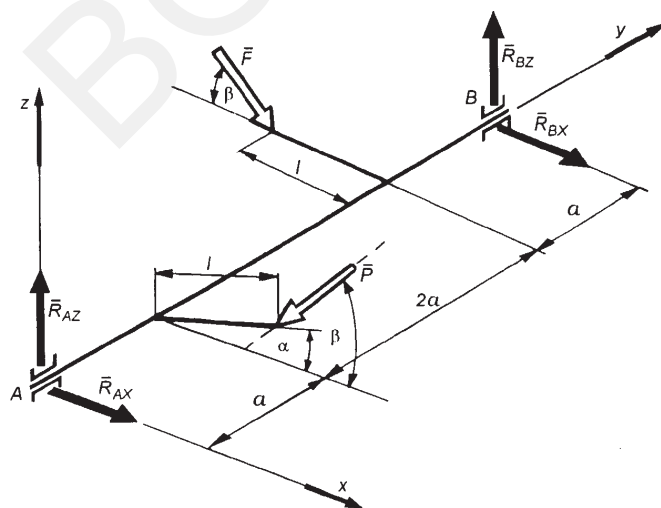
## 1.6. Przestrzenny dowolny układ sił

### ZADANIE 1.6.1

Wałek zamocowany w łożyskach  $A$  i  $B$  (rys 1.6.1) obciążono siłami  $\bar{P}$  [N] i  $\bar{F}$  [N] działającymi w płaszczyznach prostopadłych do osi wału. Wyznaczyć wartości reakcji łożysk  $A$  i  $B$  oraz wartość siły  $\bar{F}$  w położeniu równowagi, jeżeli znamy:  $l$  [m] – długość dźwigni wału,  $a$  [m] – rozstaw pomiędzy dźwigniami i łożyskami,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .



Rys. 1.6.1



Rys. 1.6.1a

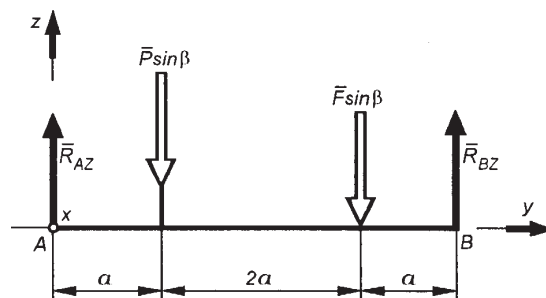
**Rozwiązanie**

Kierunki reakcji  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_B$  leżą w tym przypadku w płaszczyznach prostopadłych do osi, przy czym nieznanne są ich proste działania. Reakcje obliczyć można, wyznaczając ich składowe wzajemnie prostopadłe zgodnie z przyjętym układem odniesienia. Schemat obliczeniowy wału z przyłożonymi reakcjami podpór (łożysk  $A$  i  $B$ ) pokazano na rysunku 1.6.1a.

Z analitycznego warunku równowagi dla układu dowolnego przestrzennego sił otrzymuje się następujące równania równowagi:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 &\rightarrow R_{Ax} - P \cos \beta + F \cos \beta + R_{Bx} = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 &\rightarrow 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 &\rightarrow R_{Az} - P \sin \beta - F \sin \beta + R_{Bz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 &\rightarrow -a \cdot P \sin \beta - 3a \cdot F \sin \beta + 4a \cdot R_{Bz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 &\rightarrow -l \cdot P \sin \beta \cos \alpha - l \cdot P \cos \beta \sin \alpha - l \cdot F \sin \beta = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 &\rightarrow a \cdot P \cos \beta - 3a \cdot F \cos \beta - 4a \cdot R_{Bx} = 0 \end{aligned} \right\} \text{I}$$

Powyższe równania, a w szczególności równanie momentów sił względem osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , układu się łatwiej w oparciu o rysunki pomocnicze 1.6.1b, c, d, przedstawiające wał od strony strzałek poszczególnych osi układu odniesienia.



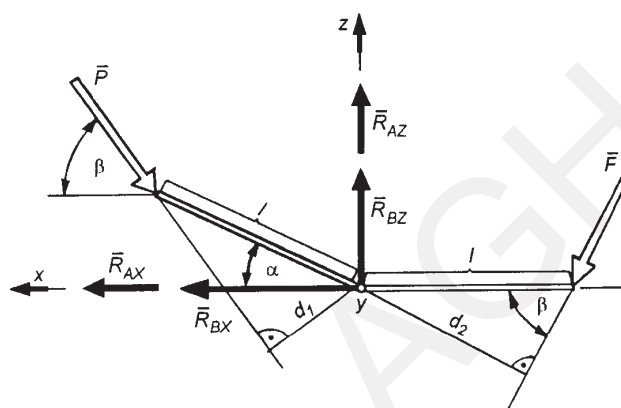
Rys. 1.6.1b

Algebraiczną sumę momentów sił względem osi  $y$  można policzyć dwoma sposobami: jako sumę momentów składowych sił  $\vec{P}$  i  $\vec{F}$ , otrzymując równanie jak w układzie I, lub jako sumę momentów sił, uwzględniając ramiona  $d_1$  i  $d_2$  sił  $\vec{P}$  i  $\vec{F}$  (rys. 1.6.1.c).

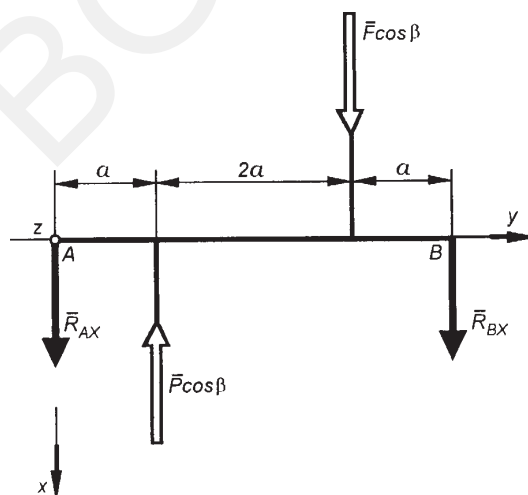
Otrzymuje się wówczas równanie

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \rightarrow P \cdot d_1 - F \cdot d_2 = 0,$$

gdzie:  $d_1 = l \sin(\beta - \alpha)$ ,  $d_2 = l \sin \beta$ , równoważne odpowiedniemu równaniu w układzie I.



Rys. 1.6.1c



Rys. 1.6.1d

Rozwiązując układ równań I, otrzymuje się:

$$F = \frac{1}{3}P\sqrt{3} \text{ [N]},$$

$$R_{Ax} = \frac{1}{8}P\left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \text{ [N]},$$

$$R_{Az} = \frac{1}{8}P\sqrt{3}\left(3 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \text{ [N]},$$

$$R_{Bx} = \frac{1}{8}P(1 - \sqrt{3}) \text{ [N]},$$

$$R_{Bz} = \frac{1}{8}P\sqrt{3}(3 + \sqrt{3}) \text{ [N]}$$

oraz:

$$R_A = \frac{1}{4}P\sqrt{\frac{1}{3}(28 + 3\sqrt{3})} \text{ [N]},$$

$$R_B = \frac{1}{4}P\sqrt{4 + \sqrt{3}} \text{ [N]}.$$

Ujemna wartość reakcji  $\bar{R}_{Bx}$  nie zmienia wartości reakcji  $\bar{R}_B$ , świadczy jedynie o przeciwnym zwrocie tej składowej w stosunku do przyjętego na rysunku 1.6.1a układu odniesienia.

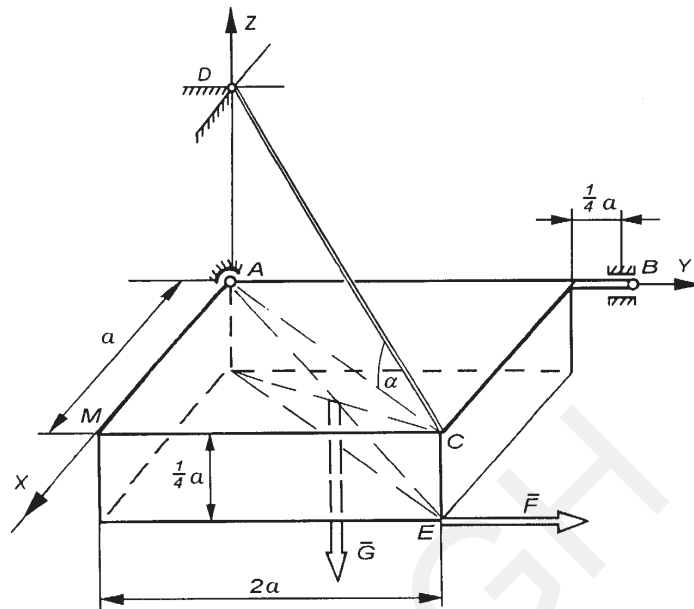
### ZADANIE 1.6.2

Jednorodna płyta o ciężarze  $G$  zamocowana jest w łożysku kulistym – punkt  $A$ , łożysku przesuwным – punkt  $B$  i utrzymana w położeniu poziomym liną  $CD$  (rys. 1.6.2). Prosta działania siły  $\bar{F}$  zaczepionej w punkcie  $E$  jest równoległa do osi  $y$ . Obliczyć reakcje łożysk oraz siłę w linie w położeniu równowagi, jeżeli  $F = 9G$  [N],  $\alpha = 45^\circ$ . Wymiary jak na rysunku.

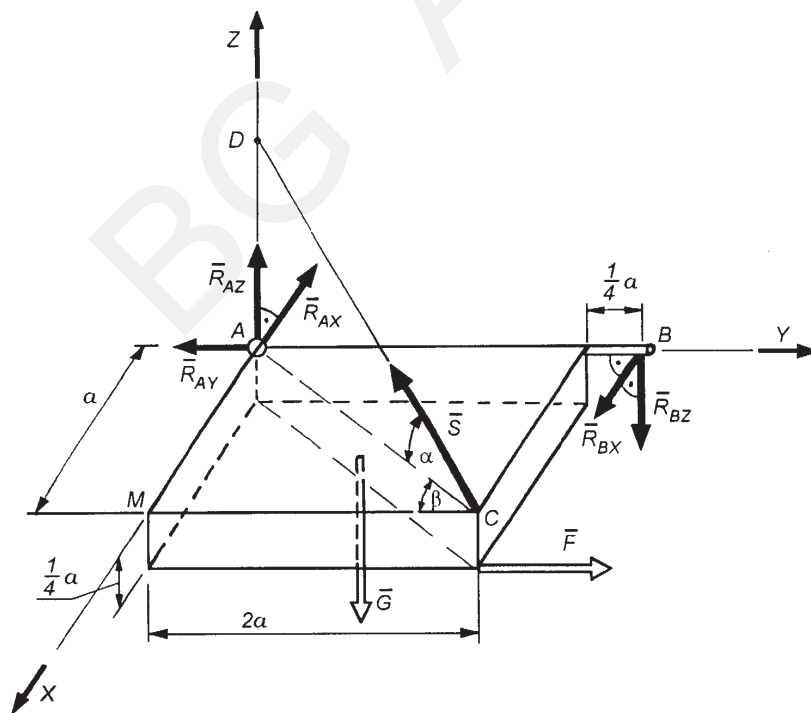
### Rozwiązanie

Uwalniając płytę od więzów przyłożono w punkcie  $A$  trzy składowe reakcje całkowitej, tj.  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  i  $\bar{R}_{Az}$  w punkcie  $B$  dwie składowe  $\bar{R}_{Bx}$  i  $\bar{R}_{Bz}$  oraz w miejsce liny  $CD$  w punkcie  $C$  siłę  $\bar{S}$  o prostej działania pokrywającej się z kierunkiem liny. Płytę z przyłożonymi siłami czynnymi i reakcjami przedstawiono na rysunku 1.6.2a.

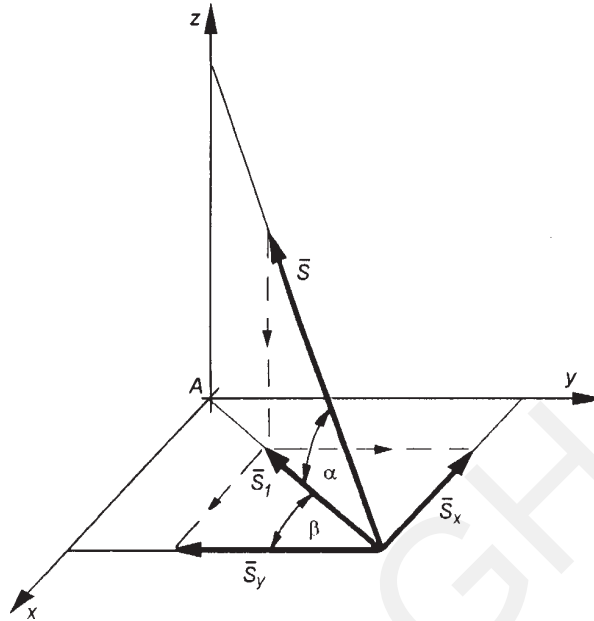
Do obliczenia niewiadomych sił reakcji wykorzystano analityczny warunek równowagi układu dowolnego przestrzennego. Rzuty siły  $\bar{S}$  na osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  otrzymano, rzutując je najpierw na płaszczyznę  $xy$  (składowa  $\bar{S}_1$ ) i na kierunek pionowy (równoległy do osi  $z$ ), a następnie rzutując składową poziomą  $\bar{S}_1$  na kierunek równoległy do osi  $x$  i  $y$  – rysunek 1.6.2b (s. 46). W przyjętym układzie odniesienia moment siły  $\bar{S}$  względem osi  $z$  jest równy zeru, ponieważ prosta działania tej siły przecina oś  $z$  w punkcie  $D$  (rys. 1.6.2a).



Rys. 1.6.2



Rys. 1.6.2a



Rys. 1.6.2b

Równania równowagi sił mają następującą postać:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 &\rightarrow -R_{Ax} + R_{Bx} - S \cos \alpha \sin \beta = 0 \\
 \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 &\rightarrow -R_{Ay} + F - S \cos \alpha \cos \beta = 0 \\
 \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 &\rightarrow R_{Az} - R_{Bz} + S \sin \alpha - G = 0 \\
 \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 &\rightarrow -G \cdot a + 2Sa \sin \alpha + \frac{1}{4}Fa - \frac{9}{4}R_{Bz}a = 0 \\
 \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 &\rightarrow G \frac{a}{2} - Sa \sin \alpha = 0 \\
 \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 &\rightarrow Fa - \frac{9}{4}R_{Bx}a = 0
 \end{aligned} \right\} I$$

Nieznany kąt  $\beta$  w równaniach I obliczyć można z  $\Delta ACM$  (rys. 1.6.2a), przy czym ze względów obliczeniowych wygodnie jest wyznaczyć funkcje  $\sin\beta$  i  $\cos\beta$ .  
Mamy więc:

$$\left. \begin{aligned} \sin\beta &= \frac{AM}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \cos\beta &= \frac{CM}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{aligned} \right\} \text{II}$$

Rozwiązując układ równań I z uwzględnieniem związków II, otrzymuje się:

$$R_{Ax} = \frac{1}{10}(40 - \sqrt{5})G \text{ [N]}, \quad R_{Ay} = \frac{1}{5}(45 - \sqrt{5})G \text{ [N]}, \quad R_{Az} = \frac{1}{2}G \text{ [N]},$$

$$R_{Bx} = 4G \text{ [N]}, \quad R_{Bz} = G \text{ [N]}, \quad S = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ [N]}.$$

Całkowite wartości reakcji łożysk  $A$  i  $B$  oraz ich kierunki określono ze znanych związków:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}, \quad \cos(x, \bar{R}_A) = \frac{R_{Ax}}{R_A},$$

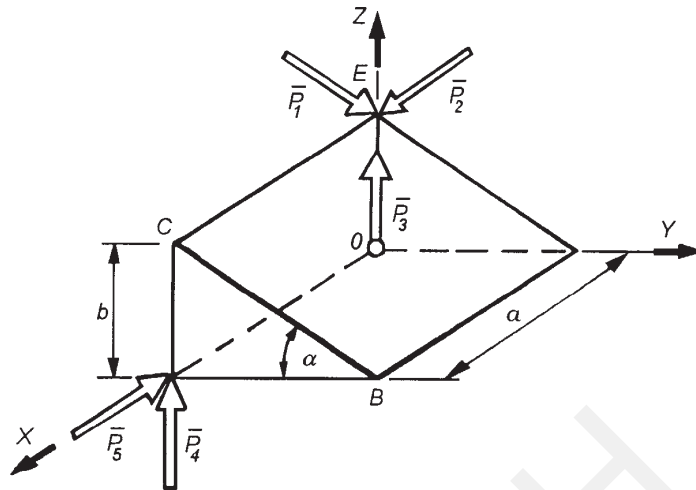
$$\cos(y, \bar{R}_A) = \frac{R_{Ay}}{R_A},$$

$$\cos(z, \bar{R}_A) = \frac{R_{Az}}{R_A},$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{Bz}^2}, \quad \cos(x, \bar{R}_B) = \frac{R_{Bx}}{R_B}.$$

### ZADANIE 1.6.3

Gnaniastosłup obciążono siłami jak na rysunku 1.6.3, przy czym:  $P_1 = 40 \text{ N}$ ,  $P_2 = P_5 = 10 \text{ N}$ ,  $P_3 = 15 \text{ N}$ ,  $P_4 = 5 \text{ N}$ ,  $a = 2b = 20 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Jakim prostym układem sił można zastąpić zadany układ sił?



Rys. 1.6.3

**Rozwiązanie**

Poszukiwanie prostego układu sił zastępującego układ zadany polega na przeprowadzeniu redukcji zadanego układu sił w przyjętym układzie odniesienia. Poszukuje się układu złożonego z jednej siły i jednej pary sił, a następnie, w wyniku obliczeń, otrzymuje się układ sił równoważny zadanemu i odpowiadający jednemu ze znanych przypadków redukcji. Obierając układ odniesienia jak na rysunku 1.6.3, obliczono współrzędne wektora głównego  $\vec{W}_g$  i momentu głównego  $\vec{M}_g$ , przyjmując biegun redukcji w punkcie 0:

$$\left. \begin{aligned} W_{gx} &= \sum_{i=1}^5 P_{ix} = P_2 - P_5 = 0 \\ W_{gy} &= \sum_{i=1}^5 P_{iy} = P_1 \cos \alpha = 20\sqrt{3} \text{ N} \\ W_{gz} &= \sum_{i=1}^5 P_{iz} = P_4 + P_3 - P_1 \sin \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \text{I}$$

Wartość wektora głównego  $W_g = \sqrt{W_{gx}^2 + W_{gy}^2 + W_{gz}^2} = 20\sqrt{3} \text{ N}$ .



$$\left. \begin{aligned} M_{gx} &= \sum_{i=1}^5 M_{ix} = -P_1 \cdot b \cdot \cos \alpha = -200\sqrt{3} \text{ N} \cdot \text{cm} \\ M_{gy} &= \sum_{i=1}^5 M_{iy} = P_2 \cdot b - P_4 \cdot a = 0 \\ M_{gz} &= \sum_{i=1}^5 M_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} \text{II}$$

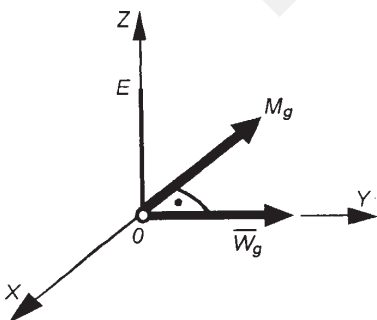
Wartość momentu głównego  $M_g = \sqrt{M_{gx}^2 + M_{gy}^2 + M_{gz}^2} = 200\sqrt{3} \text{ N}$ .

Kąt pomiędzy wektorami  $\vec{W}_g$  i  $\vec{M}_g$  obliczono z zależności

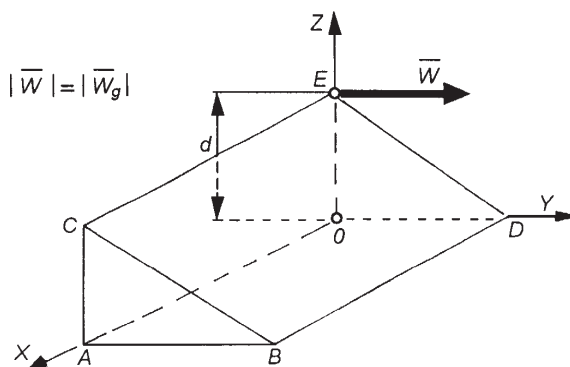
$$\cos \delta = \frac{M_{gx} \cdot W_{gx} + M_{gy} \cdot W_{gy} + M_{gz} \cdot W_{gz}}{M_g \cdot W_g} = 0, \quad \text{skąd } \delta = \frac{\pi}{2}.$$

Wzajemną prostopadłość wektorów  $\vec{W}_g$  i  $\vec{M}_g$  można było w tym przypadku stwierdzić, analizując ich współrzędne obliczone z równań (I) i (II).

W wyniku redukcji otrzymano układ sił złożony z siły równej  $\vec{W}_g$  i pary sił o momencie równym  $\vec{M}_g$ , odpowiadający przypadkowi, gdy  $\vec{W}_g \neq 0$ ,  $\vec{M}_g \neq 0$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$  (rys. 1.6.3a).



Rys. 1.6.3a



Rys. 1.6.3b

Dla takiego przypadku redukcji układ zadany sił można zastąpić siłą wypadkową  $\bar{W}$  równą co do wartości sile  $\bar{W}_g$  i przesuniętą względem przyjętego bieguna redukcji o odległość  $d = \frac{M_g}{W_g}$ . Obliczając  $d = \frac{200\sqrt{3}}{20\sqrt{3}} = 10$  cm, otrzymano ostatecznie układ równoważny zadanemu, złożony z jednej siły  $\bar{W}$  ( $|\bar{W}| = |\bar{W}_g|$ ) zaczepionej w punkcie  $E$  (rys. 1.6.3b) i równoległej do osi  $y$ .

Prostą działania siły  $\bar{W}$  można określić w inny sposób niż podany powyżej, a mianowicie wykorzystując równania prostej centralnej w postaci

$$\begin{aligned} \frac{M_{gx} + W_{gz}(y_0 - y) - W_{gy}(z_0 - z)}{W_{gx}} &= \frac{M_{gy} + W_{gx}(z_0 - z) - W_{gz}(x_0 - x)}{W_{gy}} = \\ &= \frac{M_{gz} + W_{gy}(x_0 - x) - W_{gx}(y_0 - y)}{W_{gz}}, \end{aligned}$$

gdzie:  $x_0, y_0, z_0$  są współrzędnymi bieguna redukcji w przyjętym układzie odniesienia.

Podstawiając do równania prostej centralnej obliczone współrzędne wektorów  $\bar{W}_g$  i  $\bar{M}_g$  oraz  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  (biegun redukcji przyjęto w punkcie 0), otrzymano równania prostej działania siły  $\bar{W}$  w postaci:  $x = 0, z = 10$  cm, co odpowiada wynikowi redukcji przedstawionemu na rysunku 1.6.3b.

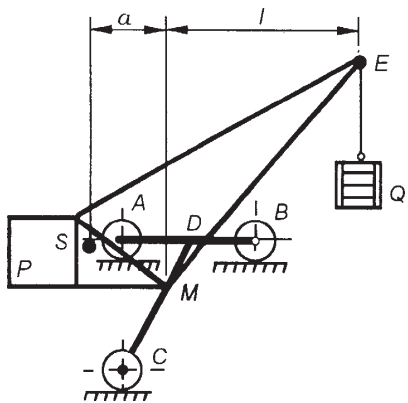
## 1.7. Przestrzenny układ sił równoległych

### ZADANIE 1.7.1

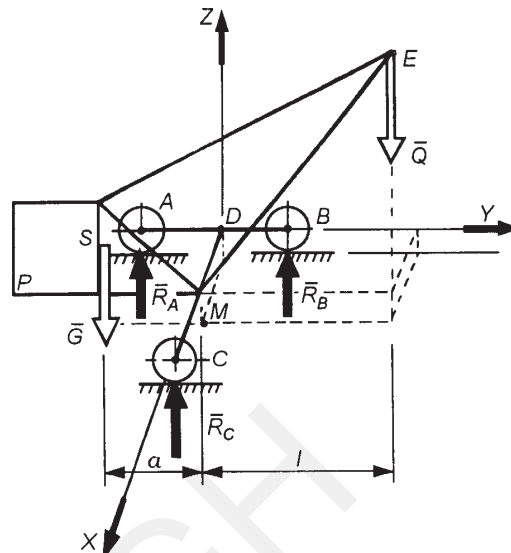
Obliczyć siły nacisku kół jezdnych dźwigu na szyny w przypadku podnoszenia ciężaru  $Q = 30$  kN w płaszczyźnie pionowej równoległej do osi szyn. Ciężar dźwigu wraz z przeciwcieżarem  $P$  wynosi  $G = 100$  kN i jest przyłożony w punkcie  $S$  (rys. 1.7.1). Dźwig wraz z podnoszonym ciężarem znajduje się w położeniu równowagi.  $AD = DB = CM = 1$  m,  $CD = 1,5$  m,  $l = 4$  m,  $a = 0,5$  m.

### Rozwiązanie

Ze względu na rodzaj więzów działających na dźwig reakcje w punktach  $A, B$  i  $C$  leżą na prostych prostopadłych w tych punktach do więzów – szyn jezdnych. Układ sił z przyłożonymi siłami reakcji oraz siłami czynnymi pokazano na rysunku 1.7.1a.



Rys. 1.7.1



Rys. 1.7.1a

Siły działające na dźwign tworzą układ przestrzenny o prostych równoległych, dla których z warunku analitycznego równowagi otrzymuje się trzy równania:

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C - G - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \rightarrow G \cdot a + R_B \cdot DB - R_A \cdot AD - Q \cdot l = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \rightarrow G \cdot MD - R_C \cdot CD + Q \cdot MD = 0.$$

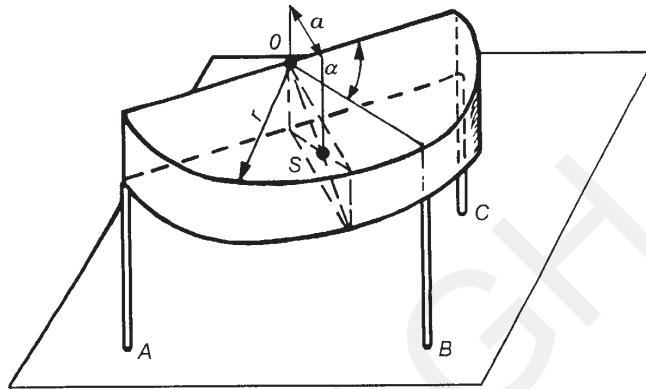
Podstawiając wartości liczbowe i rozwiązując powyższy układ równań, otrzymano wartości sił reakcji:

$$R_A = 8 \frac{1}{3} \text{ kN}, \quad R_B = 78 \frac{1}{3} \text{ kN}, \quad R_C = 43 \frac{1}{3} \text{ kN}.$$

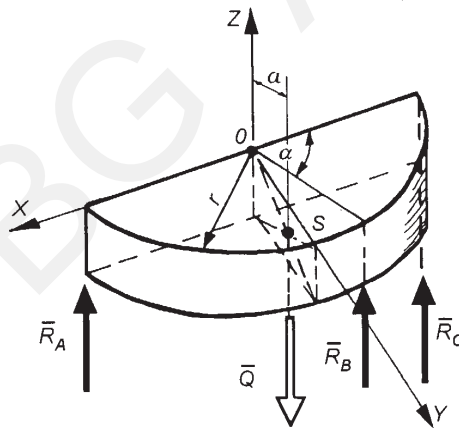
Siły nacisku kół jezdnych na szyny są równe co do wartości obliczonym wartościom reakcji w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$  i mają w stosunku do nich przeciwne zwroty.

**ZADANIE 1.7.2**

Obliczyć siły działające w prętach podpierających płytę w kształcie półkola o ciężarze  $\bar{Q}$ . Siła ciężkości  $\bar{Q}$  przyłożona jest w osi symetrii w punkcie  $S$  w odległości  $a = \frac{4r}{3\pi}$ . Pręty stojące na gładkim podłożu zamocowane są prostopadłe do płyty, przy czym położenie pręta  $B$  określa kąt  $\alpha$  (rys. 1.7.2).



Rys. 1.7.2



Rys. 1.7.2a

**Rozwiązanie**

Siły reakcji w punktach  $A$ ,  $B$ ,  $C$  gładkiego podłoża działają wzdłuż osi prętów i równe są siłom występującym w prętach. Po przyłożeniu do prętów sił reakcji oraz sił czynnych otrzymuje się przestrzenny układ sił równoległych (rys. 1.7.2a), dla których ułożyć można trzy równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \rightarrow R_B r \sin \alpha - Q \cdot a = 0,$$

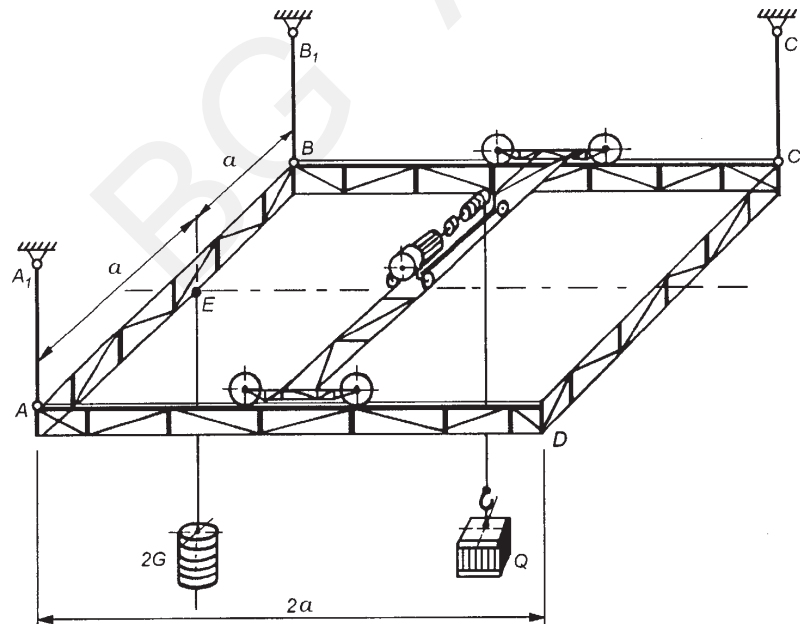
$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \rightarrow R_A \cdot r + R_C \cdot r + R_B \cdot r \cos \alpha = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymuje się wartości sił działających w poszczególnych prętach

$$R_A = \frac{1}{2} Q - 2Q \frac{1 - \cos \alpha}{3\pi \sin \alpha}, \quad R_B = 4Q - 2Q \frac{1}{3\pi \sin \alpha}, \quad R_C = \frac{1}{2} Q - 2Q \frac{1 + \cos \alpha}{3\pi \sin \alpha}.$$

### ZADANIE 1.7.3

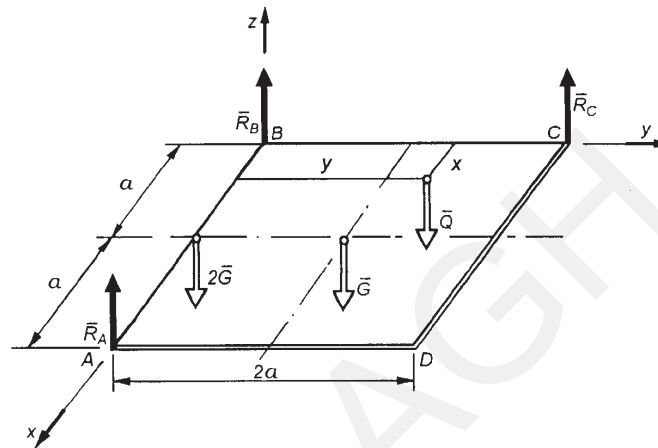
W którym miejscu ramy  $ABCD$  o ciężarze  $G = 500$  N należy ustawić wciągarkę obciążoną ciężarem  $Q = 1500$  N, aby pręty utrzymujące ramę w położeniu poziomym równowagi były rozciągane i obciążone siłami o jednakowych wartościach. W punkcie  $E$  ramy podwieszony jest dodatkowo ciężar  $2G = 1000$  N (rys. 1.7.3). Obliczyć ponadto wartości sił działających w prętach.



Rys. 1.7.3

### Rozwiązanie

Wciągarkę z jej układem jezdnym i ramą traktuje się jako jedną całość (bryłę) z więzami typu cięgien w postaci prętów  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Uwalniając ten układ od więzów, przyłożono do ramy w punktach  $A$ ,  $B$  i  $C$  siły reakcji o prostych działaniach zgodnych z osiami prętów (rys. 1.7.3a). Układ sił czynnych i reakcji jest przestrzennym układem sił równoległych, dla którego można ułożyć trzy równania równowagi. Do wyznaczenia jest pięć niewiadomych: wartość trzech reakcji  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{R}_B$ ,  $\bar{R}_C$  oraz położenie punktu podwieszenia siły  $\bar{Q}$  określone dwiema współrzędnymi  $x$  i  $y$ .



Rys. 1.7.3a

Dodatkowe dwa równania, konieczne do obliczenia pięciu niewiadomych, otrzymuje się, wykorzystując warunek równości sił w prętach. Odpowiednie równania mają postać:

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \rightarrow R_A + R_B + R_C - 2G - G - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 \rightarrow -G \cdot a - Q \cdot y + R_C \cdot 2a = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 \rightarrow 2G \cdot a + G \cdot a + Q \cdot x - R_A \cdot 2a = 0,$$

$$R_A = R_B,$$

$$R_A = R_C.$$

Z powyższego układu równań otrzymuje się

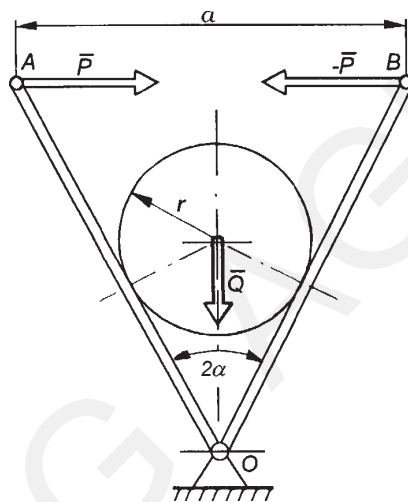
$$R_A = R_B = R_C = 1000 \text{ N}, \quad x = a, \quad y = \frac{1}{3}a.$$

Proponuje się w ramach samodzielnego rozwiązania wyznaczenie innego położenia wciągaraki, np. przy założeniu, że pręt  $BB_1$  jest ściskany, pręty  $AA_1$  i  $CC_1$  rozciągane, wartości sił w prętach są jednakowe.

## 1.8. Tarcie

### ZADANIE 1.8.1

Pomiędzy dwiema płytami  $AO$  i  $BO$  połączonymi przegubowo umieszczony jest jednorodny walec o ciężarze  $Q$  i promieniu  $r$  (rys. 1.8.1). W punktach  $A$  i  $B$  przyłożone są poziome siły o jednakowych wartościach  $P$  i zwrotach przeciwnych. Współczynnik tarcia walca o płyty wynosi  $\mu$ . Obliczyć wartość sił  $\bar{P}$  w położeniu równowagi układu, jeżeli odległość  $AB = a$  i kąt  $AOB = 2\alpha$ .



Rys. 1.8.1

### Rozwiązanie

Jeżeli układ nie będzie w równowadze, to istnieje możliwość przemieszczenia się walca w dwóch kierunkach. Przy za małych wartościach sił  $\bar{P}$  walec może się zsunąć w kierunku przegubu  $O$ , natomiast przy za dużych wartościach tych sił może on zostać wypchnięty w kierunku do góry. W związku z tym równowaga walca możliwa jest przy siłach, których wartości zmieniają się od pewnej wartości minimalnej  $P_{\min}$  do pewnej wartości maksymalnej  $P_{\max}$ . Wyznaczenie szukanych wartości sił  $\bar{P}$  sprowadza się więc do obliczenia wartości granicznych  $P_{\min}$  i  $P_{\max}$ , co jest równoznaczne z wyznaczeniem obszaru zmienności wartości sił  $\bar{P}$  odpowiadającemu położeniu równowagi układu.

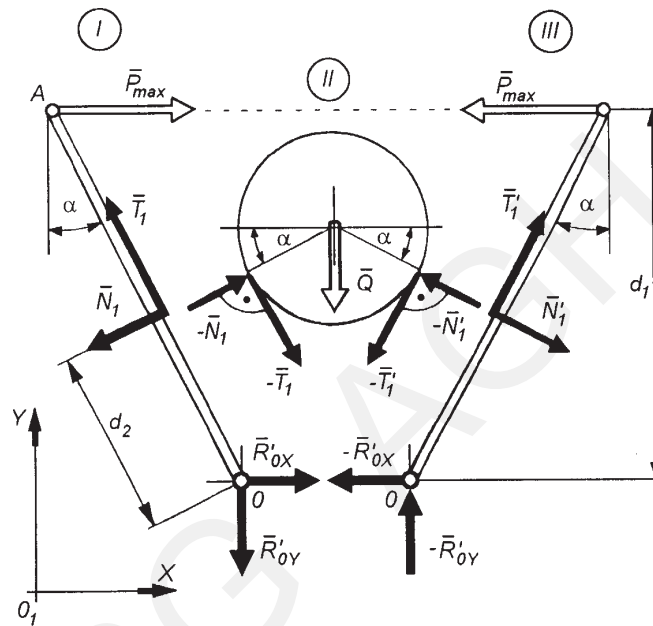
Ze względu na to, że rozpatrywany układ brył jest układem złożonym, rozdzielić można go na poszczególne części (bryły) i rozważyć równowagę każdej z nich z osobna.

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków granicznych równowagi:

- 1) w punktach  $A$  i  $B$  działają siły o wartościach  $P_{\min}$ ,
- 2) w punktach  $A$  i  $B$  działają siły o wartościach  $P_{\max}$ .

**Ad 1)**

Na rysunku 1.8.1a pokazano układ brył po ich rozdzieleniu z przyłożonymi siłami czynnymi, reakcjami i siłami wzajemnego oddziaływania pomiędzy bryłami.



Rys. 1.8.1a

Ze względu na symetrię układu (siły tarcia  $T = T'$  oraz siły normalne  $N = N'$ ) wystarczy rozpatrzyć równowagę brył I i II. Układ sił działających na bryłę I jest układem dowolnym płaskim, dla którego można ułożyć trzy równania równowagi. W danym przypadku nie interesuje nas reakcja w przegubie 0 i dlatego wykorzystano z równań równowagi dla tej bryły jedynie równanie momentów, przyjmując biegun w punkcie 0. Z równań równowagi dla bryły II wykorzystano tylko równanie rzutów sił na oś  $y$ .

W związku z powyższym otrzymano równania:

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 \rightarrow -P_{\min} \cdot d_1 + Nd_2 = 0 \quad (\text{dla bryły I}),$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -Q + 2T \cos \alpha + 2N \sin \alpha = 0 \quad (\text{dla bryły II}).$$



Trzecie równanie otrzymać można z zależności pomiędzy siłą tarcia  $T$  i reakcją normalną  $N$ , tj.

$$T = \mu N.$$

Odległości  $d_1$  i  $d_2$  (ramiona sił  $\bar{P}_{\min}$  i  $\bar{N}$  względem punktu 0) obliczono w oparciu o rysunek 1.8.1

$$d_1 = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha,$$

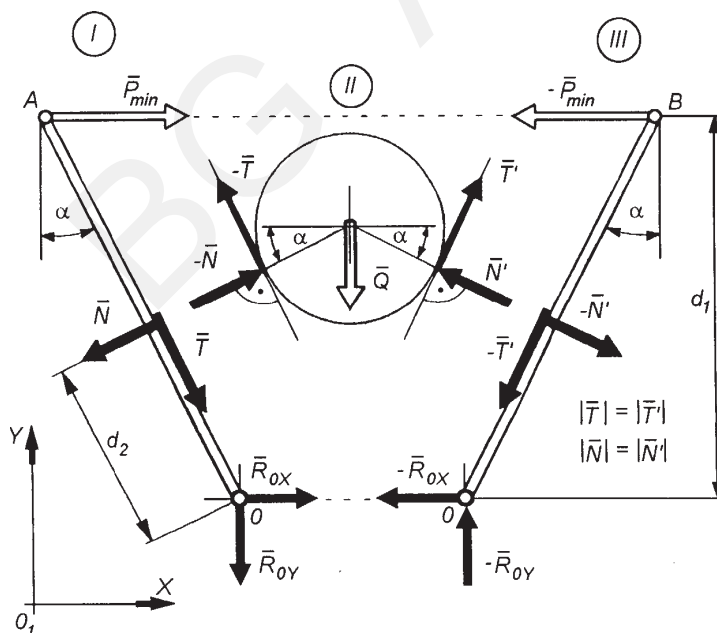
$$d_2 = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymano

$$P_{\min} = \frac{Q}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \cdot \frac{r}{a}.$$

Ad 2)

Układ sił przyłożonych do brył w tym przypadku pokazano na rysunku 1.8.1b.



Rys. 1.8.1b

Rozumując analogicznie jak w przypadku poprzednim, otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 \rightarrow -P_{\max} \cdot d_1 + N_1 \cdot d_2 = 0 \quad (\text{dla bryły I}),$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow -Q - 2T_1 \cos \alpha + 2N_1 \sin \alpha = 0 \quad (\text{dla bryły II}),$$

$$T = \mu N_1,$$

$$d_1 = \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$d_2 = r \operatorname{ctg} \alpha.$$

Rozwiązując ten układ równań, wyznaczono:

$$P_{\max} = \frac{Q}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \cdot \frac{r}{a}.$$

Obliczone graniczne wartości sił  $\bar{P}$  wyznaczają zakres zmienności wartości tych sił, przy których układ brył pozostaje w równowadze, tj.

$$\frac{Q}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \cdot \frac{r}{a} \leq P \leq \frac{Q}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \cdot \frac{r}{a}.$$

### ZADANIE 1.8.2

Obliczyć minimalną średnicę  $D_{\min}$  walców walcarki, przy której możliwe jest jeszcze uchwycenie walcowanego materiału, jeżeli współczynnik tarcia między walcami a materiałem walcowanym wynosi  $\mu$ , a walcowany pręt posiada przekrój prostokątny o początkowej wysokości  $h_0$  i wysokości po walcowaniu  $h$  (rys. 1.8.2).

#### Rozwiązanie

Siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy walcami a materiałem walcowanym pokazano na rysunku 1.8.2a, gdzie  $\bar{N}$  są siłami (normalnymi) docisku, a  $\bar{T}$  siłami tarcia. Walcowany pręt będzie wciągany pomiędzy walce, jeżeli suma rzutów sił działających na pręt, na kierunku walcowania (kierunek osi  $x$ ), będzie większa od zera lub w przypadku granicznym równa zero, tzn.

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} \geq 0 \rightarrow 2T \cos \alpha - 2N \sin \alpha \geq 0 \quad (1)$$

Z równania tego, po podstawieniu  $T = \mu N$ , otrzymuje się  $\mu \geq \tan \alpha$ , względnie  $\rho \geq \alpha$ , gdzie  $\rho = \arctan \mu$  jest kątem tarcia.

Ponieważ  $\alpha > 0$ , z nierówności (1) wynika tzw. warunek chwytu walców

$$\rho \geq \alpha > 0 \quad (2)$$

Minimalną średnicę  $D_{\min}$  obliczyć można z zależności geometrycznych

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}D - \frac{1}{2}(h_0 - h)}{\frac{1}{2}D} = 1 - \frac{\Delta h}{D},$$

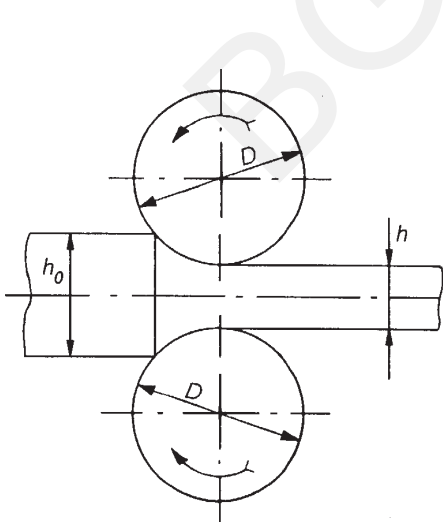
gdzie  $\Delta h = h_0 - h$  jest tzw. gniołem bezwzględnym. Uwzględniając zależność (1) otrzymuje się

$$D \geq \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2}-1} \Delta h \quad (3)$$

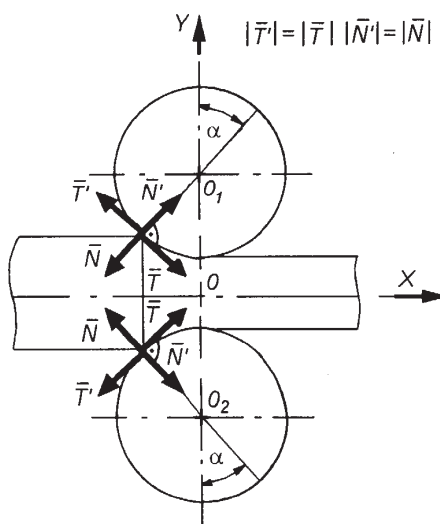
i ostatecznie minimalną średnicę walców

$$D_{\min} \geq \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2}-1} (h_0 - h) \quad (4)$$

Mając zadaną średnicę walców  $D$ , współczynnik tarcia  $\mu$  oraz żądany wymiar  $h$  pręta po walcowaniu, z nierówności (3) obliczyć można maksymalną grubość  $h_0$  pręta, który przy zadanych parametrach może być uchwycony przez walce.



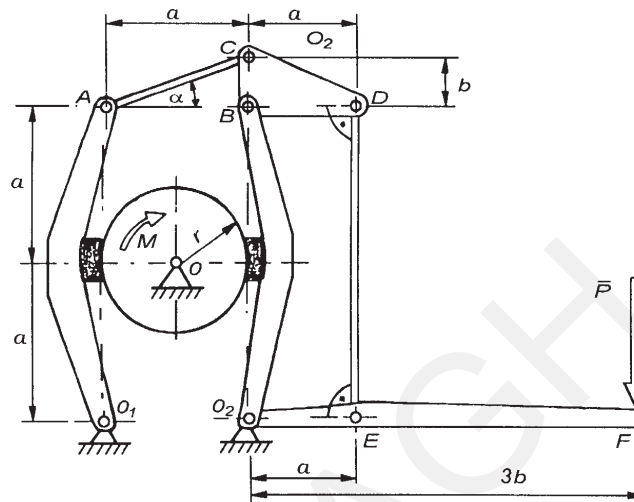
Rys. 1.8.2



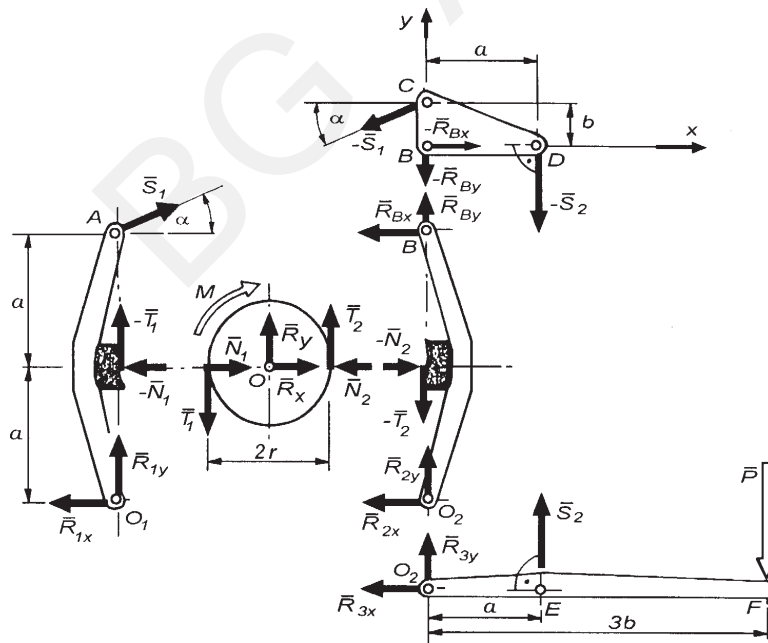
Rys. 1.8.2a

## ZADANIE 1.8.3

Wyznaczyć wartość siły  $\bar{P}$  potrzebnej do zahamowania obciążonego momentem  $M$  koła o promieniu  $r$  dwustronnym hamulcem przedstawionym na rysunku 1.8.3, jeżeli:  $r = 0,5 \text{ m}$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $M = 360 \text{ N} \cdot \text{m}$ .



Rys. 1.8.3



Rys. 1.8.3a

**Rozwiązanie**

Układ hamulcowy przedstawiony na rysunku 1.8.3 jest układem złożonym. Rozpatrzono stan równowagi tego układu, badając równowagę jego części składowych. Poszczególne elementy (bryły) wraz z przyłożonymi do nich siłami wzajemnego oddziaływania i obciążeniem siłami czynnymi pokazano na rysunku 1.8.3a, przy czym łączniki  $AC$  i  $DE$  traktuje się jako cięgna. Ponadto reakcje  $\bar{R}_2$  i  $\bar{R}_3$  nie są siłami oddziaływania pomiędzy dźwigniami  $O_2B$  i  $O_2F$ , lecz oddziaływaniem zamocowania tych dźwigni do podłoża.

Ze względu na to, że nie interesują nas wartości reakcji  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$ ,  $\bar{R}_3$ ,  $\bar{R}$  i  $\bar{R}_B$  z równań równowagi wykorzystać można jedynie równania momentów sił działających na poszczególne bryły, odpowiednio względem punktów  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O$  i  $B$ , oraz równanie rzutów sił na oś  $x$  dla belki  $CBD$ .

Otrzymujemy:

dla belki  $O_1A$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O_1)} = 0 \rightarrow N_1 \cdot a - 2S_1 a \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

dla belki  $O_2B$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O_2)} = 0 \rightarrow N_2 \cdot a + 2R_{Bx} a = 0 \quad (2)$$

dla belki  $CBD$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(B)} = 0 \rightarrow S_1 \cdot b \cos \alpha - S_2 a = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow S_1 \cos \alpha + R_{Bx} = 0 \quad (4)$$

dla belki  $O_2F$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O_2)} = 0 \rightarrow S_2 \cdot a - 3P_1 b = 0 \quad (5)$$

dla koła

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O)} = 0 \rightarrow -M + T_2 \cdot r + T_1 \cdot r = 0 \quad (6)$$

W równaniach (1)–(6) występuje dziewięć niewiadomych, tj.  $N_1$ ,  $T_1$ ,  $N_2$ ,  $T_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $R_{Bx}$ ,  $P$ ,  $\alpha$ . Brakujące równania otrzymano, pisząc związki pomiędzy siłami tarcia a siłami normalnymi oraz z zależności geometrycznych w oparciu o rysunek 1.8.3:

$$T_1 = \mu N_1, \quad T_2 = \mu N_2 \quad (7)$$

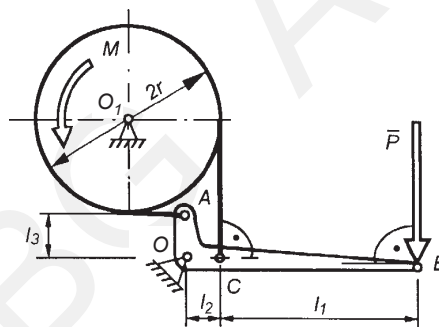
$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (8)$$

Rozwiązując układ równań (1)–(8), wyznaczono  $P = \frac{M}{12\mu r}$ .

Otrzymany wynik świadczy o tym, że przy tak narzuconych wymiarach  $a$  i  $b$  wartość siły  $P$  zależy jedynie od wartości momentu  $M$ , współczynnika tarcia  $\mu$  i promienia  $r$ , nie zależy natomiast od wymiarów  $a$  i  $b$ . Podstawiając dane liczbowe do wzoru (10), otrzymuje się ostatecznie  $P = 200$  N.

#### ZADANIE 1.8.4

Obliczyć wartość siły  $\bar{P}$  potrzebnej do zahamowania bębna hamulcem taśmowym (rys. 1.8.4), jeżeli znamy:  $M = 300$  Nm,  $r = 0,5$  m,  $\mu = 0,2$ ,  $l_1 = 5l_2$ ,  $l_2 = l_3$ .



Rys. 1.8.4

#### Rozwiązanie

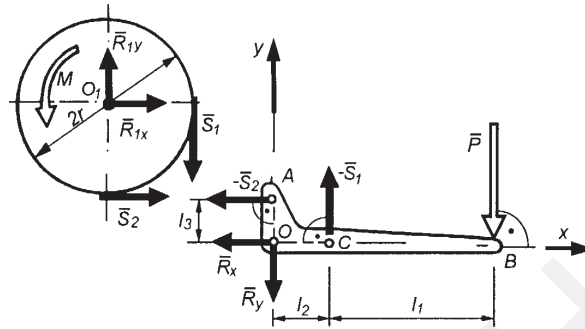
Rozważono w położeniu równowagi dwa podukłady, tzn. bęben z taśmą hamulcową i belkę  $OAB$ . Oba podukłady z przyłożonymi siłami biernymi i czynnymi pokazane są na rysunku 1.8.4a. Podobnie jak w zadaniu poprzednim ułożono odpowiednie równania równowagi momentów względem punktów  $O_1$  i  $O$ , otrzymując:

dla bębna

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O_1)} = 0 \rightarrow M - S_1 \cdot r + S_2 \cdot r = 0 \quad (1)$$

dla belki  $OAB$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(O)} = 0 \rightarrow S_2 \cdot l_3 + S_1 \cdot l_2 - P(l_1 + l_2) = 0 \quad (2)$$



Rys. 1.8.4a

W równaniach powyższych występują trzy niewiadome, tj.  $S_1, S_2, P$ , do wyznaczenia których wykorzystano dodatkowo wzór Eulera na tarcie cięgien

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha} \quad (3)$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia pomiędzy taśmą a bębniem, a  $\alpha$  jest kątem opasania bębna. W tym przypadku  $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ . Rozwiązując układ równań (1)–(3), otrzymuje się

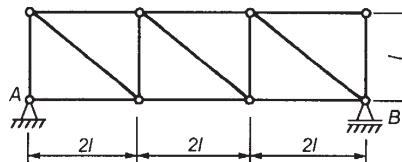
$$P = \frac{M}{r} \cdot \frac{l_2 e^{\mu\alpha} + l_3}{(e^{\mu\alpha} - 1)(l_1 + l_2)},$$

a po uwzględnieniu danych liczbowych  $P = 200$  N.

## 1.9. Środki ciężkości

### ZADANIE 1.9.1

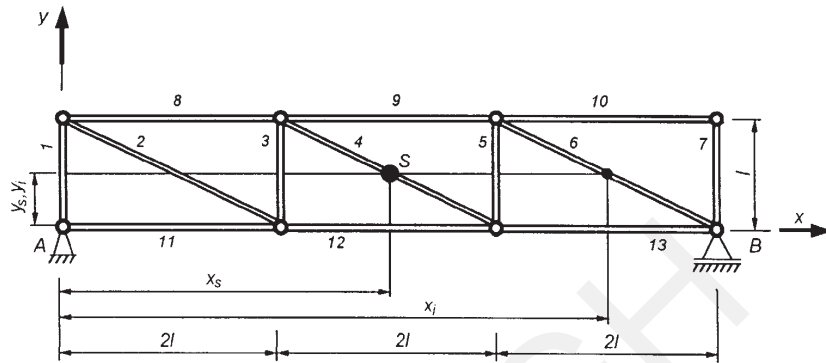
Wyznaczyć środek ciężkości kratownicy płaskiej zbudowanej z jednorodnych prętów o jednakowych i stałych przekrojach poprzecznych (rys. 1.9.1).



Rys. 1.9.1

**Rozwiązanie**

Pręty kratownicy oznaczono przez 1, 2, 3, ..., 13 oraz przyjęto układ odniesienia jak na rysunku 1.9.1a, gdzie przez  $x_i, y_i$  oznaczono współrzędne środka ciężkości  $S_i$   $i$ -tego pręta kratownicy ( $i = 1, 2, 3, \dots, 13$ ).



Rys. 1.9.1a

Współrzędne środka ciężkości wyznaczone ze wzorów:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{13} l_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{13} l_i} \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^{13} l_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{13} l_i} \quad (1)$$

gdzie  $l_i$  jest długością  $i$ -tego pręta kratownicy.

Długość poszczególnych prętów oraz ich środki ciężkości w przyjętym układzie odniesienia wynoszą:

$$l_1 = l_3 = l_5 = l_7 = l,$$

$$l_8 = l_9 = l_{10} = l_{11} = l_{12} = l_{13} = 2l,$$

$$l_2 = l_4 = l_6 = \sqrt{l^2 + 4l^2} = l\sqrt{5},$$

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = x_8 = x_{11} = l, \quad x_5 = 4l,$$

$$x_3 = 2l, \quad x_6 = x_{10} = x_{13} = 5l,$$

$$x_4 = x_9 = x_{12} = 3l, \quad x_7 = 6l,$$



$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = \frac{1}{2}l,$$

$$y_8 = y_9 = y_{10} = l,$$

$$y_{11} = y_{12} = y_{13} = 0.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzorów (1) otrzymuje się:

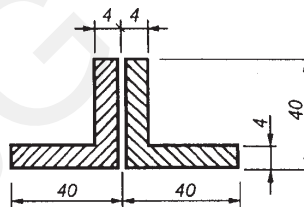
$$x_S = \frac{l^2\sqrt{5} + 2l^2 + 3l^2\sqrt{5} + 4l^2 + 5l^2\sqrt{5} + 6l^2 + 2l^2 + 6l^2 \cdot 10l^2 + 2l^2 + 6l^2 \cdot 10l^2}{l + l\sqrt{5} + l + l\sqrt{5} + l + l\sqrt{5} + l + 2l + 2l + 2l + 2l + 2l + 2l} = 3l,$$

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}l^2\sqrt{5} + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}l^2\sqrt{5} + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}l^2\sqrt{5} + \frac{1}{2}l^2 + 2l^2 \cdot 2l^2 + 2l^2}{l + l\sqrt{5} + l + l\sqrt{5} + l + l\sqrt{5} + l + 2l + 2l + 2l + 2l + 2l + 2l} = \frac{1}{2}l.$$

Położenie środka ciężkości o współrzędnych  $x_S = 3l$ ,  $y_S = \frac{1}{2}l$  można było w tym przypadku przewidzieć, uważnie analizując konstrukcję kratownicy, tj. rozłożenie jej prętów.

### ZADANIE 1.9.2

Obliczyć współrzędne środka ciężkości pola przekroju złożonego z dwóch jednakowych kątowników (rys. 1.9.2) o wymiarach  $40 \times 40 \times 4$  mm.



Rys. 1.9.2

### Rozwiązanie

Ze względu na symetrię przekroju przyjęto układ odniesienia jak na rysunku 1.9.2a i w związku z tym współrzędna  $x_S$  środka ciężkości wynosi:  $x_S = 0$ . Współrzędną  $y$  obliczono ze wzoru

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3)$$

gdzie  $A_i$  jest  $i$ -tym polem figury o znanej współrzędnej  $y_i$  jego środka ciężkości.

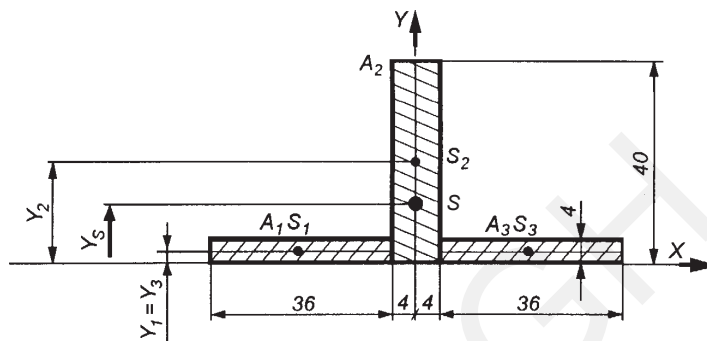
W związku z tym dokonać należy podziału przekroju na poszczególne powierzchnie o regularnych kształtach i znanych polach oraz współrzędnych środków ciężkości. Przyjęto trzy składowe powierzchnie całego przekroju (rys. 1.9.2a), dla których:

$$A_1 = A_3 = 36 \times 4 = 144 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = 40 \times 8 = 320 \text{ mm}^2,$$

$$y_1 = y_3 = 2 \text{ mm},$$

$$y_2 = 20 \text{ mm}.$$



Rys. 1.9.2a

Korzystając ze wzoru (1), obliczono

$$y_s = \frac{144 \cdot 2 + 320 \cdot 20 + 144 \cdot 2}{144 + 320 + 144} = 11,4 \text{ mm}.$$

Środek ciężkości przekroju leży w punkcie  $S$  o współrzędnych:

$$x_s = 0, \quad y_s = 11,4 \text{ mm}.$$

### ZADANIE 1.9.3

Obliczyć współrzędne środka ciężkości figury płaskiej pokazanej na rysunku 1.9.3. W figurze wycięte są dwa otwory: kołowy o promieniu 5 cm i kwadratowy o boku 10 cm.

#### Rozwiązanie

Zadanie można rozwiązać, stosując metodę podziału całego pola na pola elementarne, podobnie jak w zadaniu 1.9.2. Wycięte otwory uwzględnia się, odejmując iloczyn ich pól i środków ciężkości oraz powierzchnie otworów we wzorach na współrzędne środka ciężkości. Przyjęto podział na pola elementarne oraz układ odniesienia jak na rysunku 1.9.3a.

Powierzchnie pól elementarnych oraz współrzędne ich środków ciężkości wynoszą odpowiednio:

$$A_1 = 200 \cdot 600 = 12 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

$$A_2 = 200 \cdot 300 = 6 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot 10^4}{4} = 0,785 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

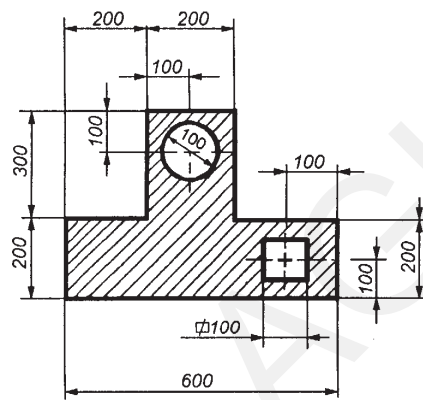
$$A_4 = 100 \cdot 100 = 10^4 \text{ mm}^2,$$

$$x_1 = 300 \text{ mm}, \quad y_1 = 100 \text{ mm},$$

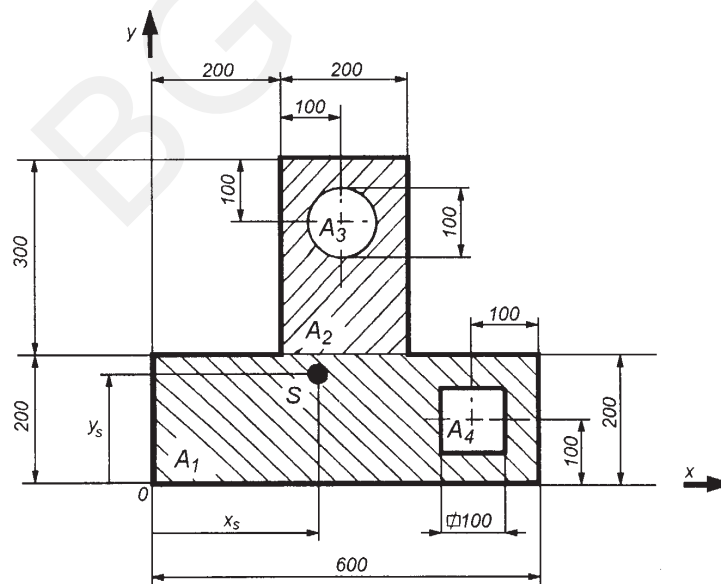
$$x_2 = 300 \text{ mm}, \quad y_2 = 200 + 150 = 350 \text{ mm},$$

$$x_3 = 300 \text{ mm}, \quad y_3 = 500 - 100 = 400 \text{ mm},$$

$$x_4 = 600 - 100 = 500 \text{ mm}, \quad y_4 = 100 \text{ mm}.$$



Rys. 1.9.3



Rys. 1.9.3a

Współrzędne środka ciężkości obliczono ze wzorów:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^4 A_i}, \quad y_S = \frac{\sum_{i=1}^4 A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} \quad (1)$$

Podstawiając odpowiednie wartości do wzorów (1), otrzymano:

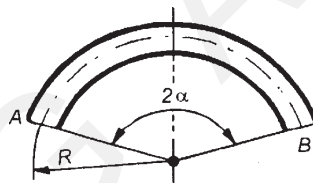
$$x_S = \frac{(12 \cdot 300 + 6 \cdot 300 - 0,785 \cdot 300 - 1 \cdot 500) \cdot 10^4}{(12 + 6 - 0,785 - 1) \cdot 10^4} = 287,7 \text{ mm},$$

$$y_S = \frac{(12 \cdot 100 + 6 \cdot 350 - 0,785 \cdot 400 - 1 \cdot 100) \cdot 10^4}{(12 + 6 - 0,785 - 1) \cdot 10^4} = 178 \text{ mm}.$$

Położenie środka ciężkości pokazane jest na rysunku 1.9.3a

#### ZADANIE 1.9.4

Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego pręta  $AB$  wygiętego w kształcie łuku o promieniu  $R$  i kącie środkowym  $2\alpha$ . (rys. 1.9.4).



Rys. 1.9.4

#### Rozwiązanie

W odróżnieniu od poprzednich zadań w tym przypadku nie można zastosować metody podziału na elementarne odcinki (jak w zadaniu 1.9.1) i wykorzystać wzory sumacyjne na współrzędne środka ciężkości. Wykorzystano wzory całkowe dotyczące linii płaskich w postaci:

$$x_S = \frac{\int_{AB} x dl}{\int_{AB} dl}, \quad y_S = \frac{\int_{AB} y dl}{\int_{AB} dl},$$

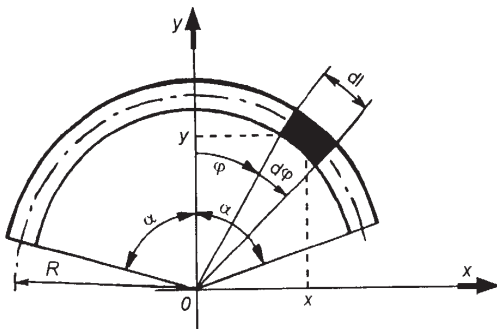
gdzie  $dl$  jest długością elementarnego łuku wydzielonego z łuku  $AB$ . Ze względu na to, że łuk  $AB$  jest w kształcie wycinka okręgu, wygodnie jest uzależnić współrzędne  $x$  i  $y$  oraz  $dl$  od kąta  $\varphi$ . W przyjętym układzie odniesienia jak na rysunku 1.9.4a, ze względu na symetrię względem osi  $y$ ,  $x_S = 0$ .

Uwzględniając oznaczenia jak na rysunku 1.9.4a, otrzymuje się:

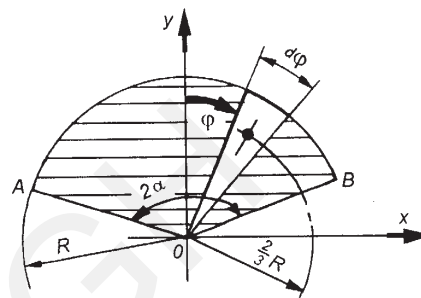
$$x = R \sin \varphi,$$

$$y = R \cos \varphi,$$

$$dl = R d\varphi.$$



Rys. 1.9.4a



Rys. 1.9.4b

Otrzymuje się zatem:

$$x_s = 0,$$

$$y_s = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R \cos \varphi R d\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R d\varphi} = \frac{R^2 \sin \varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R\varphi \Big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

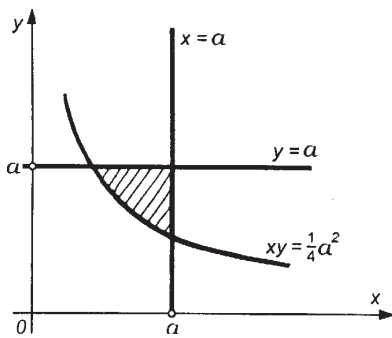
Wzór na współrzędną  $y_s$  można wykorzystać do wyznaczenia położenia środka ciężkości wycinka kołowego o promieniu  $R$  i kącie  $2\alpha$  (rys. 1.9.4b).

Wydzielając elementarny wycinek o kącie  $d\varphi$ , można traktować go jak trójkąt, w którym środek ciężkości leży w odległości  $\frac{2}{3}R$  od środka koła (punkt 0). Środki ciężkości wszystkich składowych elementarnych wycinków będą więc leżeć na łuku o promieniu  $\frac{2}{3}R$ . Współrzędne środka ciężkości wycinka kołowego wynoszą

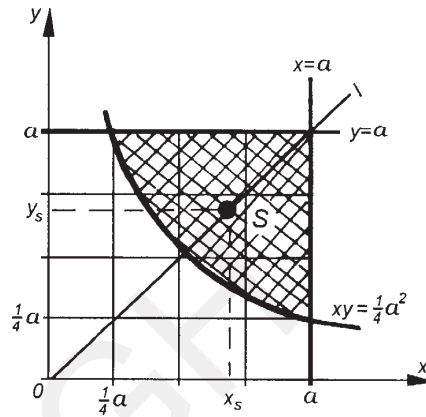
$$x_s = 0, \quad y_s = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

**ZADANIE 1.9.5**

Obliczyć środek ciężkości jednorodnej figury płaskiej ograniczonej hiperbolą  $xy = \frac{1}{4}a^2$  i prostymi  $x = a, y = a$  (rys. 1.9.5).



Rys. 1.9.5



Rys. 1.9.5a

**Rozwiązanie**

Do wyznaczenia środka ciężkości wykorzystano wzory całkowe dla figur płaskich:

$$x_s = \frac{\iint_A x dx dy}{\iint_A dx dy}, \quad y_s = \frac{\iint_A y dx dy}{\iint_A dx dy}.$$

Figura posiada oś symetrii – oś  $0l$  (rys. 1.9.5a), a więc  $x_s = y_s$ , wystarczy więc obliczyć tylko jedną współrzędną, np.  $x_s$ .

Obliczając całki:

$$\iint_A x dx dy = \int_{\frac{a}{4}}^a x dx \int_{\frac{a^2}{4x}}^a dy = \int_{\frac{a}{4}}^a \left( ax - \frac{a^2}{4} \right) dx = \frac{9}{32} a^3,$$

$$\iint_A dx dy = \int_{\frac{a}{4}}^a dx \int_{\frac{a^2}{4x}}^a dy = \int_{\frac{a}{4}}^a \left( a - \frac{a^2}{4x} \right) dx = \frac{a^2}{4} (3 - \ln 4),$$

a następnie  $x_s = \frac{9a}{8(3 - \ln 4)}$ , otrzymuje się  $x_s = y_s = 0,697a$ .

## 2. Kinematyka

### 2.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań z kinematyki

Kinematyka jest działem mechaniki, który zajmuje się badaniem ruchu ciał bez uwzględnienia przyczyn wywołujących ruch. Ruch jest pojęciem względnym i dlatego badając go, należy zawsze określić układ odniesienia względem którego ruch jest rozpatrywany. Wyróżnia się dwa zasadnicze układy odniesienia: względny (ruchomy) i bezwzględny, traktowany w danym przypadku jako nieruchomy. Jeżeli wybrany układ odniesienia przyjmuje się umownie za nieruchomy, to ruch względem takiego układu nazywa się ruchem bezwzględnym. W przeciwnym przypadku ruch nazywa się względnym. Podstawowym celem kinematyki jest opisanie ruchu brył, tzn. takie podanie opisu, aby można było na tej podstawie określić tor, prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu brył. W kinematyce wykorzystuje się dwie grupy metod: metody analityczne i metody graficzne, przy czym metody graficzne stosowane są do wyznaczania parametrów ruchu w określonych, chwilowych położeniach układów materialnych. Bryła traktowana jest jako zbiór punktów materialnych i w związku z tym badanie ruchu brył poprzedzone jest badaniem ruchu punktu.

Kinematykę, ze względów dydaktycznych, dzielimy na kinematykę punktu i kinematykę bryły.

Do opisanie ruchu punktu wykorzystuje się w przyjętym układzie odniesienia określone współrzędne, podając je w zależności od czasu. Otrzymuje się w ten sposób kinematyczne równania ruchu punktu będące podstawą do wyznaczenia trajektorii, prędkości i przyspieszenia punktu. W przypadkach szczególnych, tj. w ruchu jednostajnym i jednostajnie zmiennym, można korzystać ze znanych wzorów na przemieszczenie i prędkość punktu. W innych przypadkach wykorzystuje się w tym celu rachunek różniczkowy i całkowy.

Opis ruchu brył zależy od rodzaju ruchu brył. W zależności od narzuconych więzów wyróżnia się ruchy proste, np. ruch postępowy, i ruchy złożone, np. ruch płaski. Każdy z ruchów brył opisuje się odpowiednimi dla danego przypadku kinematycznymi równaniami ruchu odpowiadającymi liczbie stopni swobody bryły. Kinematyczne równania ruchu bryły pozwalają na wyznaczenie w przyjętym układzie odniesienia równań ruchu dowolnego punktu bryły, a zatem toru, prędkości i przyspieszenia tego punktu.

Celem wyznaczenia parametrów kinematycznych dowolnego punktu bryły można więc przyjąć następujący tok postępowania:

- rozpoznać ruch bryły,
- przyjąć układ odniesienia,
- wykorzystać kinematyczne równania ruchu bryły do zapisania równań ruchu wybranego punktu,
- wyznaczyć szukane parametry ruchu.

W przypadku zastosowania metod graficznych wykorzystuje się przede wszystkim wektorowe równania prędkości i przyspieszeń właściwe dla danego rodzaju ruchu bryły, a następnie wyznacza się parametry kinematyczne w chwilowym położeniu bryły. Analiza ruchu pod wpływem działania sił omówiona jest w części dotyczącej dynamiki ruchu.

## 2.2. Kinematyka punktu

### 2.2.1. Wyznaczanie równań ruchu, prędkości, przyspieszeń oraz toru

#### ZADANIE 2.2.1

Ruch punktu  $K$  opisany jest wektorem wodzącym  $\vec{r} = (1-t)\vec{i} + (t-1)\vec{j}$ ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  – wersory płaskiego kartezjańskiego układu odniesienia,  $r$  w [m],  $t$  w [s]. Wyznaczyć równanie toru, prędkość i przyspieszenie oraz prawo ruchu po torze.

#### Rozwiązanie

Prędkość punktu jest równa

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i} + \vec{j}.$$

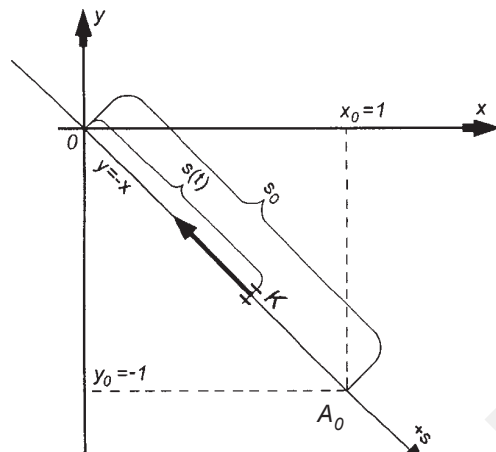
Współrzędne wektora prędkości wynoszą:  $v_x = -1$  m/s,  $v_y = 1$  m/s, a wartość prędkości  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2}$  m/s.

Przyspieszenie punktu jest równe

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0.$$

Dla wyznaczenia równania toru wykorzystać można współrzędne wektora  $\vec{r}$ , tj.  $x = 1 - t$  [m],  $y = t - 1$  [m] (równania skończone ruchu). Rzucając z powyższych równań parametr  $t$  (czas), otrzymuje się:  $y = -x$ , czyli równanie prostej w układzie  $Oxy$ , przy czym torem jest półprosta dla  $t \geq 0$  (rys. 2.2.1).





Rys. 2.2.1

Prawo ruchu po torze otrzymać można wykorzystując zależność

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \text{ gdzie } dx = \dot{x}(t)dt \text{ i } dy = \dot{y}(t)dt,$$

czyli  $dx = -dt$ ,  $dy = dt$ , a następnie rozwiązując równanie

$$ds = \pm\sqrt{2} dt$$

wraz z warunkami początkowymi ruchu, tj. dla  $t = t_0 = 0$ ,  $x = x_0 = 1$  m,  $y = y_0 = -1$  m skąd  $s = s_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{2}$  m.

Dokonując odpowiednich obliczeń, otrzymano prawo ruchu po torze  $y = -x$  w postaci  $s = \sqrt{2}(1 - t)$  [m].

### ZADANIE 2.2.2

Z podanych równań ruchu punktu wyprowadzić równanie toru oraz wyznaczyć prędkość i przyspieszenie w funkcji czasu:

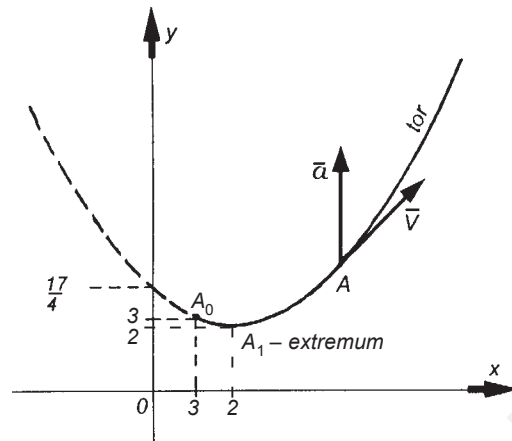
a)  $x = 2t + 1$ ,  $y = t^2 - 2t + 3$ ,

b)  $x = 2t^2 - 4t$ ,  $y = 0,5t^2 - t$ , gdzie  $x, y, w$  [m],  $t$  w [s].

### Rozwiązanie

#### Ad a)

Rugując z obu równań parametr  $t$  (czas), otrzymuje się równanie paraboli  $y = \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 17)$ , przy czym torem punktu jest gałąź paraboli, dla  $t \geq 0$ , tj. dla  $x \geq 1$ , a położenie początkowe  $A_0$  punktu dla  $t = t_0 = 0$  określone jest współrzędnymi  $x = x_0 = 1$  m,  $y = y_0 = 3$  m (rys. 2.2.2).



Rys. 2.2.2

Współrzędne prędkości  $\bar{v}$  są równe:  $v_x = \dot{x} = 2$  m/s,  $v_y = \dot{y} = 2t + 2$  m/s, a współrzędne przyspieszenia  $\bar{a}$ :  $a_x = 0$ ,  $a_y = 2$  m/s<sup>2</sup>. Obliczając  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  i  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ , otrzymano zależność prędkości i przyspieszenia od czasu w postaci:  $v = 2\sqrt{t^2 - 2t + 2}$  m/s,  $a = 2$  m/s<sup>2</sup> (const).

**Ad b)**

Rugując z obu równań parametr czasu  $t$ , otrzymuje się równanie prostej  $y = \frac{1}{4}x$ . Punkt porusza się po półprostej dla  $x \geq -2$  i  $y \geq -\frac{1}{2}$ , co wynika z analizy równań:

$$2t^2 - 4t - x = 0 \text{ i } 0,5t^2 - t - y = 0 \text{ dla czasów rzeczywistych.}$$

Obliczając współrzędne prędkości  $v_x = \dot{x} = 4(t-1)$  m/s,  $v_y = t-1$  m/s, otrzymuje się wartość  $v = \sqrt{5} |t-1|$  m/s, a następnie obliczając  $a_x = \ddot{x} = 4$  m/s<sup>2</sup> i  $a_y = \ddot{y} = 1$  m/s<sup>2</sup>, wartość przyspieszenia  $a = \sqrt{17}$  m/s<sup>2</sup>.

**ZADANIE 2.2.3**

Dane są trzy równania skończone ruchu punktu:

a)  $x = 2 \cos\left(\frac{1}{\pi}t^2\right), \quad y = 2 \sin\left(\frac{1}{\pi}t^2\right),$

b)  $x = 2t^2, \quad y = 1,5t^2,$

c)  $x = t, \quad y = 0,5t^2, \quad x, y \text{ w [m], } t \text{ w [s].}$

Obliczyć prędkość, przyspieszenie i promień krzywizny toru dla  $t_1 = \frac{1}{2}\pi$  [s]. Wyznaczyć także równanie toru i prawo ruchu po torze.

**Rozwiązanie****Ad a)**

Obliczając  $v_x = \dot{x} = -\frac{4}{\pi} t \sin\left(\frac{1}{\pi} t^2\right)$ ,  $v_y = \dot{y} = \frac{4}{\pi} t \cos\left(\frac{1}{\pi} t^2\right)$ , wartość prędkości wyznaczono z zależności

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{4}{\pi} t \quad \text{skąd } v(t_1) = 2 \text{ m/s.}$$

Obliczając

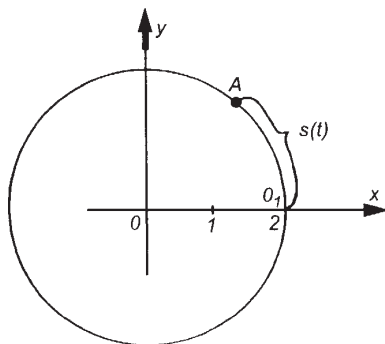
$$a_x = \ddot{x} = -\frac{4}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{1}{\pi} t^2\right) + \frac{2}{\pi} t^2 \cos\left(\frac{1}{\pi} t^2\right) \right],$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{4}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{1}{\pi} t^2\right) - \frac{2}{\pi} t^2 \sin\left(\frac{1}{\pi} t^2\right) \right],$$

wyznaczono

$$a(t) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{\pi^2 + 4t^4} \quad \text{i} \quad a(t_1) = \frac{2}{\pi} \sqrt{4 + \pi^2} \text{ m/s}^2.$$

Promień krzywizny toru wyznacza się z zależności  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ , skąd  $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ . Ponieważ  $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ , stąd  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ , gdzie  $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{4}{\pi} \text{ m/s}^2$ . Podstawiając obliczone wartości prędkości, przyspieszenia całkowitego i stycznego, otrzymuje się  $\rho(t) = \rho(t_1) = 2 \text{ m}$ . Równanie toru otrzymano z równań skończonych ruchu rugując z nich parametr  $t$ . Tor jest okrąg (rys. 2.2.3a) o równaniu  $x^2 + y^2 = 4$ , którego promień krzywizny w każdym punkcie równy jest promieniowi okręgu i wynosi 2 m, co jest zgodne z obliczonym promieniem krzywizny  $\rho(t)$ . Prawo ruchu po torze wyznacza się z zależności  $s = \int v dt + C$ , a zatem  $s = \int \frac{4}{\pi} t dt + C = \frac{2}{\pi} t^2 + C$  (punkt  $O_1$  pokrywa się z położeniem początkowym).



Rys. 2.2.3a

Przyjmując warunki początkowe:  $t = 0, s = 0$ , obliczono stałą całkowania  $C = 0$ , i prawo ruchu po torze ma ostatecznie postać  $s = \frac{2}{\pi} t^2 \text{ m}$ .

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że punkt porusza się po okręgu ruchem jednostajnie przyspieszonym.

**Ad b)**

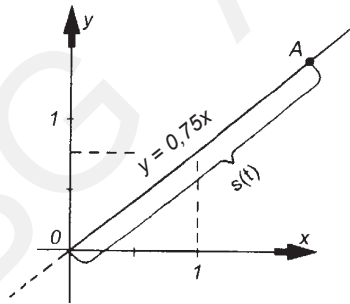
Dokonując obliczeń analogicznie jak w przypadku (a), otrzymano:

$$v_x = \dot{x} = 4t, \quad v_y = \dot{y} = 3t, \quad v(t) = 5t, \quad v(t_1) = \frac{5}{2}\pi \text{ m/s}^2,$$

$$a_x = \ddot{x} = 4, \quad a_y = \ddot{y} = 3, \quad a(t) = a(t_1) = 5 \text{ m/s}^2,$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}},$$

gdzie  $a_\tau = \frac{dv(t)}{dt} = 5 \text{ m/s}^2$  i  $a_\tau = a = a(t)$ , z czego wynika, że promień krzywizny  $\rho = \infty$  i punkt porusza się po torze prostoliniowym. Rugując z równań skończonych ruchu parametr  $t$ , otrzymuje się równanie prostej  $y = \frac{3}{4}x$ . Torem jest półprosta odpowiednio dla  $t \geq 0$ , tzn. dla  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  (rys. 2.2.3b). Przyjmując warunki początkowe ruchu:  $t = 0, s = 0$ , otrzymano prawo ruchu po torze w postaci  $s = \frac{5}{2}t^2$ , tak więc w tym przypadku punkt porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym.



Rys. 2.2.3b

**Ad c)**

Postępując identycznie jak w przypadkach (a) i (b), otrzymano:

$$v_x = \dot{x} = 1, \quad v_y = \dot{y} = t, \quad v(t) = \sqrt{1+t^2}, \quad v(t_1) = \frac{1}{2}\sqrt{4+\pi^2}$$

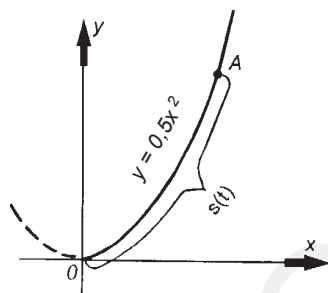
$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = 1, \quad a(t) = a(t_1) = 1 \text{ m/s}^2,$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - a_\tau^2}},$$

gdzie  $a_\tau = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $a_\tau(t_1) = \frac{\pi}{\sqrt{4+\pi^2}} \text{ m/s}^2$ ,

$$\rho(t) = (1+t^2)\sqrt{1+t^2}, \quad \rho(t_1) = \frac{1}{8}(4+\pi^2)\sqrt{4+\pi^2} \text{ m.}$$

Torem jest część paraboli  $y = 0,5x^2$ , (równanie paraboli otrzymuje się z równań skończonych ruchu po wyrugowaniu parametru  $t$ ) dla  $t \geq 0$ , tzn. dla  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  (rys. 2.2.3c).



Rys. 2.2.3c

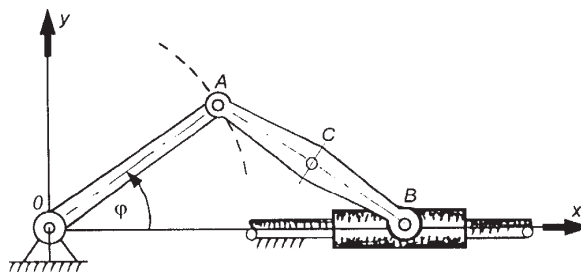
Przyjmując warunki początkowe ruchu:  $t = 0$ ,  $s = 0$ , z zależności  $s = \int v dt + C$ , otrzymano prawo ruchu po torze w postaci

$$s = \frac{1}{2} \left( t\sqrt{1+t^2} + \ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right).$$

Ruch punktu w tym przypadku jest ruchem krzywoliniowym niejednostajnie zmiennym.

#### ZADANIE 2.2.4

Na rysunku 2.2.4 przedstawiono schemat mechanizmu korbowego o zadanych długościach  $OA = R = 1 \text{ m}$ ,  $AC = CB = \frac{1}{2}AB = 0,5 \text{ m}$ . Mając dane równanie ruchu korby  $OA$ ,  $\varphi = 2t \text{ rad}$ , obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  łącznika oraz punktu  $B$  suwaka w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8} \text{ s}$ .



Rys. 2.2.4

**Rozwiązanie**

Równania skończone ruchu punktu  $C$  otrzymano, obliczając współrzędne  $x_c$  i  $y_c$  (trójkąt  $OAB$  jest trójkątem równoramiennym w każdym położeniu mechanizmu):

$$x_C = OA \cos \varphi + AC \cos \varphi = \frac{3}{2} R \cos(2t),$$

$$y_C = OA \sin \varphi - AC \sin \varphi = \frac{1}{2} R \sin(2t).$$

Współrzędne prędkości oraz wartość prędkości punktu  $C$  wynoszą:

$$v_x = \dot{x}_C = -3R \sin(2t),$$

$$v_y = \dot{y}_C = R \cos(2t),$$

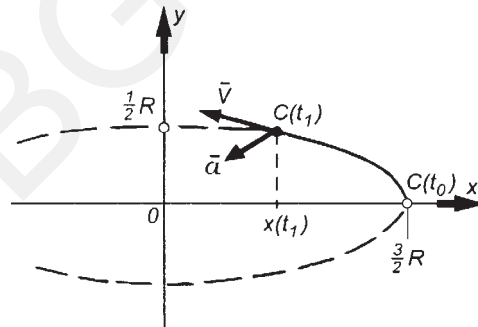
$$v_c = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = R\sqrt{8\sin^2(2t) + 1}, \quad v_C(t_1) = \sqrt{5} \text{ m/s.}$$

Współrzędne przyspieszenia oraz wartość przyspieszenia punktu  $C$  wynoszą

$$a_x = \ddot{x}_C = -6R \cos(2t),$$

$$a_y = \ddot{y}_C = -2R \sin(2t),$$

$$a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2} = 2R\sqrt{8\cos^2(2t) + 1}, \quad a_C(t_1) = 2\sqrt{5} \text{ m/s.}$$



Rys. 2.2.4a

Torem punktu  $C$  jest elipsa (rys. 2.2.4a) opisana równaniem

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}R\right)^2} = 1,$$

otrzymanym z równań skończonych ruchu po wyrugowaniu parametru  $t$ . Położenie początkowe punktu  $C$  na torze odpowiada chwili  $t_0 = 0$  i jest określone współrzędnymi

$$x_C(0) = \frac{3}{2}R, \quad y_C(0) = 0, \quad \text{zaś} \quad x_C(t_1) = \frac{3}{4}\sqrt{2}R.$$

Promień krzywizny toru w chwili  $t_0 = 0$  jest równy  $\rho_0 = \frac{1}{6}R$  i jest mniejszy od półosi elipsy równej  $\frac{3}{2}R$ . Otrzymamy go ze wzoru  $\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}}$ .

Obliczając prędkość i przyspieszenie punktu  $B$ , otrzymuje się:

$$x_B = 2R \cos 2t, \quad x_B(t_1) = \frac{1}{4}\sqrt{2}R,$$

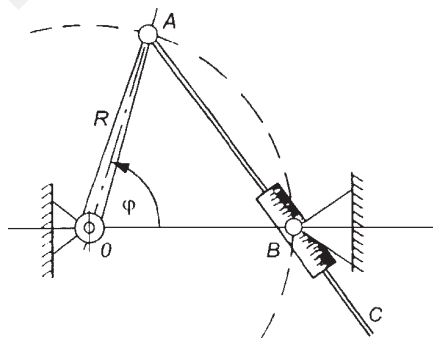
$$v_B = v_{Bx} = -4R \sin 2t, \quad a_B = a_{Bx} = -8R \cos 2t,$$

$$v_B(t_1) = -2\sqrt{2} \text{ m/s}, \quad a_B(t_1) = -4\sqrt{2} \text{ m/s}^2.$$

Znaki ujemne oznaczają, że w chwili  $t_1$  zwroty prędkości i przyspieszenia są przeciwnie do zwrotu osi  $x$  (w rzeczywistości są to współrzędne tych wektorów na osi  $x$ ).

### ZADANIE 2.2.5

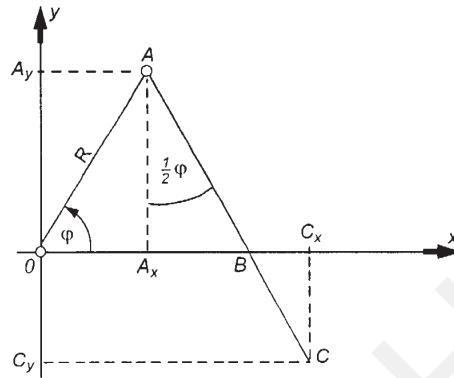
Korba  $OA$  płaskiego mechanizmu (rys 2.2.5) porusza się zgodnie z równaniem  $\varphi = kt \text{ rad}$ ,  $k = \text{const} > 0$  w  $\text{rad/s}$ ,  $t$  w  $[\text{s}]$ . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  oraz równanie jego toru, jeżeli  $OA = OB = R$ ,  $AC = l$ ,  $l > 2R$ .



Rys. 2.2.5

**Rozwiązanie**

Przyjmując układ odniesienia jak na rysunku 2.2.5a, obliczono współrzędne punktu C, a następnie po ich zróżniczkowaniu prędkość i przyspieszenie.



Rys. 2.2.5a

tj.:

$$x_C = OA \cos \varphi + AC \sin \frac{\varphi}{2}, \quad y_C = OA \sin \varphi - AC \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$x_C = R \cos(kt) + l \sin\left(\frac{1}{2}kt\right),$$

$$y_C = R \sin(kt) - l \cos\left(\frac{1}{2}kt\right),$$

$$v_x = \dot{x}_C = k \left[ \frac{1}{2}l \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) - R \sin(kt) \right],$$

$$v_y = \dot{y}_C = k \left[ R \cos(kt) + \frac{1}{2}l \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) \right],$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k \sqrt{\frac{1}{4}l^2 + R^2 - Rl \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)},$$

$$a_x = \ddot{x}_C = -k^2 \left[ \frac{1}{4}l \sin\left(\frac{1}{2}kt\right) + R \cos(kt) \right],$$

$$a_y = \ddot{y}_C = k^2 \left[ \frac{1}{4}l \cos\left(\frac{1}{2}kt\right) - R \sin(kt) \right],$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2} = k^2 \sqrt{\frac{1}{16}l^2 + R^2 - \frac{1}{2}Rl \sin\left(\frac{1}{2}kt\right)}.$$



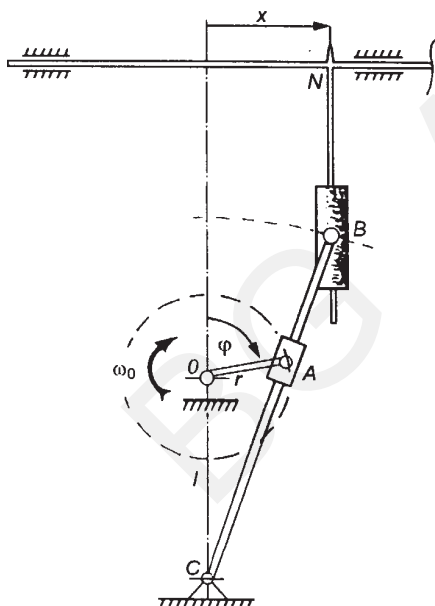
Korzystając z zależności  $\cos^2\left(\frac{1}{2}kt\right) = \frac{1}{2}[1 + \cos(kt)]$  i  $\cos^2(kt) + \sin^2(kt) = 1$ , po wyrugowaniu parametru  $t$  z równań skończonych ruchu punktu  $C$ , otrzymuje się równanie toru tego punktu

$$\left[y^2 + (x - R)^2\right]^2 - (l^2 - 4R^2)(x - R)^2 - l^2(y^2 + 4R^2) - 4lRy\sqrt{(x - R)^2 + y^2 - l^2} = 0.$$

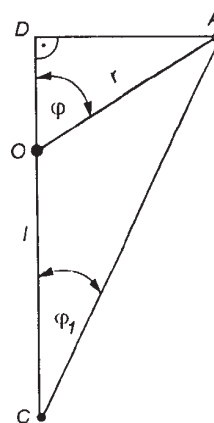
### ZADANIE 2.2.6

Dany jest schemat kinematyczny napędu jarzmowego suportu strugarki (rys. 2.2.6), do którego w punkcie  $N$  mocowany jest nóż strugarki. Suport wykonuje ruch poziomy, natomiast jarzmo  $BC$  ruch wahadłowy na skutek obrotowego ruchu korby  $OA$  połączonej suwliwie z jarzmem  $A$ .

Obliczyć prędkość i przyspieszenie noża, jeżeli  $OC = l$ ,  $OA = r$ ,  $BC = R$  i prędkość kątowna korby  $\omega_0 = \text{const}$ .



Rys. 2.2.6



Rys. 2.2.6a

### Rozwiązanie

Prędkość i przyspieszenie noża strugarki wyznaczyć można, układając równanie skończone ruchu punktu  $N$ . Korzystając z pomocniczego schematu obliczeniowego (rys. 2.2.6a), wyznaczono

$$x = x_B = BC \sin \varphi_1.$$

Funkcję  $\sin\varphi_1$  wyznaczono, korzystając z zależności trygonometrycznych w trójkątach  $ODA$ ,  $CDA$  i  $COA$ . Z  $\triangle ODA$  i  $\triangle CDA$  otrzymuje się  $DA = r \sin\varphi = AC \sin\varphi_1$ , skąd  $\sin\varphi_1 = \frac{r}{AC} \sin\varphi$ .

Z  $\triangle COA$  otrzymuje się  $CA = \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos\varphi}$ . Po podstawieniu  $BC = R$ ,  $\varphi = \omega_0 t$  (korba porusza się ruchem jednostajnym) otrzymuje się

$$\sin\varphi_1 = \frac{r \sin\omega_0 t}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t}}$$

oraz skończone równanie ruchu punktu  $N$

$$x = \frac{Rr \sin\omega_0 t}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t}}.$$

Prędkość i przyspieszenie punktu  $N$  równe są odpowiednio:

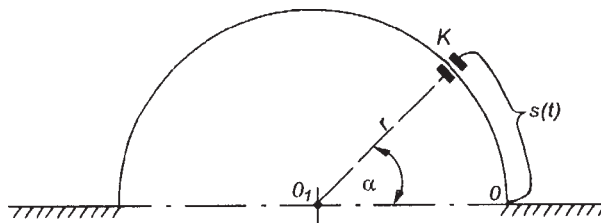
$$v = \dot{x} = Rr\omega_0 \frac{[(r^2 + l^2) \cos\omega_0 t + 2rl] \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t}}{(r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t)^2},$$

$$a = \ddot{x} = Rr\omega_0^2 \frac{[rl(r^2 + l^2) \cos\omega_0 t + 6r^2 l^2 - (r^2 + l^2)^2] \sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t}}{(r^2 + l^2 + 2rl \cos\omega_0 t)^3}.$$

Otrzymane związki można poddać dalszej analizie, wyznaczając np. ekstremalne wartości prędkości i przyspieszenia noża strugarki i odpowiadające im położenia poszczególnych elementów mechanizmu.

### ZADANIE 2.2.7

Dany jest promień  $r = 1$  m prowadnicy i prawo ruchu punktu  $K$  (tulejki – rys. 2.2.7) w postaci  $s(t) = 2 \sin \frac{\pi}{4} t$  [m]. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie liniowe tulejki  $K$  w chwili, gdy osiągnie ona najwyższe położenie na prowadnicy.



Rys. 2.2.7

**Rozwiązanie**

Ruch punktu  $K$  w tym przypadku zadany jest współrzędną naturalną  $s = s(t)$ . Prędkość oblicza się z zależności

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} t.$$

Składowe przyspieszenia całkowitego oblicza się z zależności:

przyspieszenie styczne

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin \frac{\pi}{4} t,$$

przyspieszenie normalne

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} t.$$

W najwyższym położeniu punktu  $K$  odpowiadającemu kątowi  $\alpha(t_1) = \frac{\pi}{2}$  w chwili  $t_1$  długość łuku  $s(t_1) = \frac{\pi \cdot r}{2}$ .

Czas  $t_1$  obliczono z równania  $s(t)$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} t_1 = \frac{\pi \cdot r}{2}.$$

Podstawiając  $r = 1$  m, obliczono  $t_1 = 1,14$  s.

Podstawiając czas  $t_1$  najwyższego położenia punktu  $K$ , otrzymano:

$$v(t_1) = 0,981 \text{ m/s}, \quad a_{\tau}(t_1) = -0,961 \text{ m/s}^2, \quad a_n(t_1) = 0,962 \text{ m/s}^2,$$

$$a(t_1) = \sqrt{a_{\tau}^2(t_1) + a_n^2(t_1)} = 1,35 \text{ m/s}^2.$$

Zadanie to rozwiązać można także, wykorzystując fakt, że punkt  $K$  porusza się po okręgu, i w związku z tym należy zastosować odpowiednie w tym przypadku wzory:

$$v = \omega \cdot r, \quad a_{\tau} = \varepsilon \cdot r, \quad a_n = \omega^2 r, \quad a = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

gdzie:  $\omega = \dot{\alpha}$ ,  $\varepsilon = \ddot{\alpha}$ ,  $\alpha = \frac{s(t)}{r}$ .

**ZADANIE 2.2.8**

Wyznaczyć równanie ruchu punktu po trajektorii oraz wartość współrzędnej naturalnej  $s$ , drogę  $s^*$  po czasie  $t_k = 5$  s, jeżeli prędkość  $v = \frac{\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{15} t$  [m/s] i w chwili początkowej  $t_0 = 0$ ,  $s = 0$ .

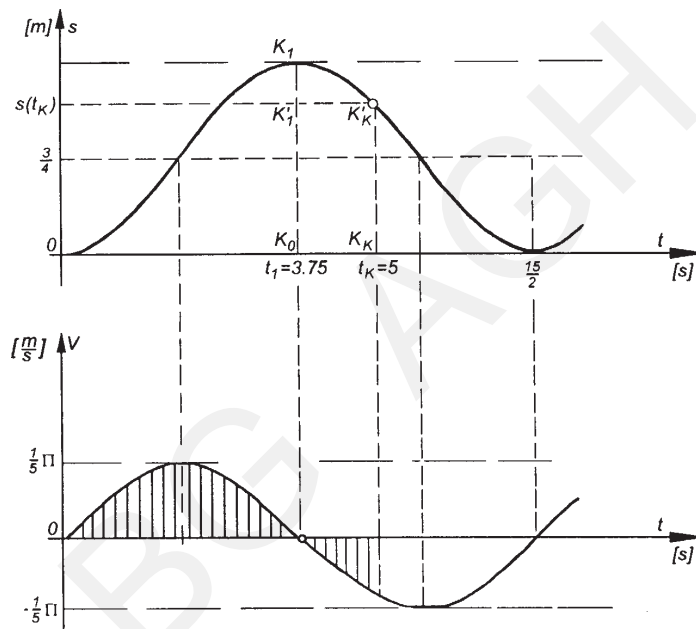
**Rozwiązanie**

Ruch punktu po trajektorii opisuje współrzędna naturalna  $s(t)$ , którą wyznacza się z równania

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \text{tzn.} \quad s = \int v dt + C.$$

Rozwiązując powyższe równanie z uwzględnieniem warunków początkowych, otrzymuje się

$$s = \frac{3}{4} \left( 1 - \cos \frac{4\pi}{15} t \right) \text{ [m]}.$$



Rys. 2.2.8

Przebieg zmian w funkcji czasu współrzędnej  $s(t)$  i prędkości  $v(t)$  przedstawia rysunek 2.2.8. Położenie punktu w chwili  $t_k = 5$  s określa współrzędna

$$s(t_k) = K_k K'_k = \frac{3}{4} \left( 1 - \cos \frac{4\pi}{15} t_k \right) = 1,125 \text{ m}.$$

Drogę przebytą w tym czasie przez punkt wylicza się z zależności

$$s_k^* = \int_0^{t_k} |v| dt = \int_0^{t_1} v dt - \int_{t_1}^{t_k} v dt$$

i jest ona równa liczbowo polu zakreskowanemu na wykresie prędkości.

Obliczając

$$s_k^* = \frac{\pi}{5} \left( \int_0^{t_k} \sin \frac{4\pi}{15} t dt - \int_{t_1}^{t_k} \sin \frac{4\pi}{15} t dt \right),$$

otrzymano

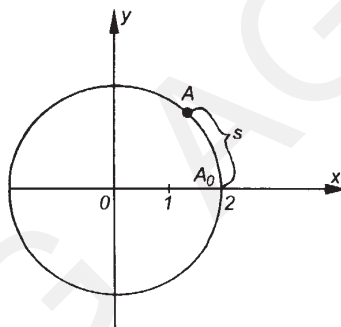
$$s_k^* = 1,875 \text{ m.}$$

Drogę  $s_k^*$  można również obliczyć z zależności

$$s_k^* = K_0 K_1 + K_1 K_1' = 2K_0 K_1 - s(t_k) = 1,875 \text{ m.}$$

### ZADANIE 2.2.9

Punkt  $A$  porusza się według prawa ruchu  $s = t^2$  [cm] po okręgu o równaniu  $x^2 + y^2 = 4$ . Początkowe położenie punktu na torze określają współrzędne  $x_0 = 2$  cm,  $y_0 = 0$  i ruch rozpoczyna się w stronę dodatniej osi  $y$  (rys. 2.2.9).



Rys. 2.2.9

Wyznaczyć położenie punktu  $A$  na torze w chwili, gdy wartość przyspieszenia  $a_A = 3,71$  cm/s<sup>2</sup>.

### Rozwiązanie

Położenie punktu  $A$  na torze w żądanej chwili  $t^*$  wyznaczyć można, określając współrzędne punktu  $x(t^*)$ ,  $y(t^*)$  w momencie, w którym jego przyspieszenie jest równe  $a_A$ . Z prawa ruchu  $s(t)$  obliczyć można prędkość  $v = \dot{s} = 2t$  i przyspieszenie styczne  $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s} = 2$ , a następnie przyspieszenie normalne  $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4t^2}{2} = 2t^2$ .

Znając wartość przyspieszenia całkowitego  $a_A$  w chwili  $t^*$ , czas  $t^*$  wyznaczyć można z zależności

$$a_A = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{4 + 4(t^*)^4}.$$

Podstawiając  $a_A = 3,71 \text{ cm/s}^2$ , otrzymano  $t^* = 1,25 \text{ s}$ .

Współrzędne punktu  $A$  w chwili  $t^*$  wyliczyć można, korzystając z równania toru  $x_2 + y_2 = 4$  i z zależności  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Różniczkując równanie toru, otrzymuje się  $xdx + ydy = 0$ , a następnie, podstawiając  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , wyznacza się  $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{4 - x^2}}$  oraz  $ds = \frac{2dx}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

Całkując powyższe równanie przy warunkach początkowych  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 2$ ,  $s_0 = 0$ , otrzymano

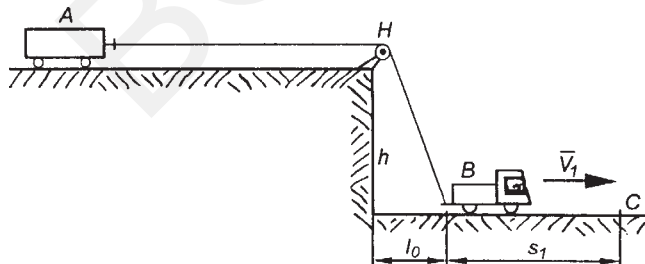
$$s = 2 \left( \arcsin \frac{x}{2} - \pi \right)$$

Podstawiając  $s = s(t^*) = (t^*)^2$ , z powyższego równania obliczono współrzędną  $x(t^*) = 1,41 \text{ cm}$ , a następnie z równania toru współrzędną  $y(t^*) = 1,41 \text{ cm}$ .

Położenie punktu  $A$  w chwili  $t^*$  można również wyznaczyć, gdyż znany jest tor ruchu, wystarczy więc określić położenie punktu na torze względem położenia początkowego. Obliczając jak poprzednio czas  $t^* = 1,25 \text{ s}$  położenie punktu określono, obliczając  $s(t^*) = (t^*)^2 = 1,5625 \text{ cm}$ .

### ZADANIE 2.2.10

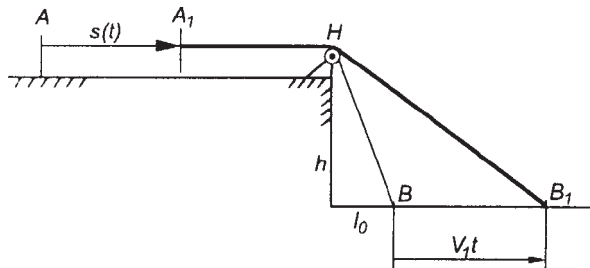
Ciągnik  $B$  (rys. 2.2.10) holuje wózek  $A$  za pomocą linki  $AB$  o długości  $l$ . Położenie początkowe ciągnika  $B$  wyznacza odcinek  $l_0$ . Różnica poziomów jazdy ciągnika i wózka wynosi  $h$ . Wiedząc, że wartość prędkości ciągnika jest stała ( $v_1 = \text{const}$ ), wyznaczyć wartość prędkości i przyspieszenia wózka  $A$  po przebyciu przez ciągnik drogi  $s_1 = 3l_0$ .



Rys. 2.2.10

### Rozwiązanie

Położenie ciągnika (punkt  $B_1$ ) i wózka (punkt  $A_1$ ) po przebyciu drogi  $s$  pokazano na rysunku 2.2.10a, przy czym – zakładając, że linka  $AB$  jest nierozciągliwa – zachodzi  $AB = A_1B_1 = l$ . Droga ciągnika (punkt  $B$ ) w ruchu jednostajnym ( $v_1 = \text{const}$ ) wyraża się wzorem  $BB_1 = v_1 t$ .



Rys. 2.2.10a

Korzystając z rysunku 2.2.10a, otrzymano:

$$s = AH - A_1H,$$

$$A_1H = A_1B_1 - HB_1 = l - \sqrt{h^2 + (l_0 + BB_1)^2},$$

$$AH = AB - HB = l - \sqrt{h^2 + l_0^2}.$$

Podstawiając  $BB_1 = v_1 t$ , otrzymano  $s = \sqrt{h^2 + (l_0 + v_1 t)^2} - \sqrt{h^2 + l_0^2}$ .

Obliczając odpowiednio pochodne, otrzymuje się prędkość i przyspieszenie wózka A:

$$v = \dot{s} = \frac{(l_0 + v_1 t)v_1}{\sqrt{h^2 + (l_0 + v_1 t)^2}},$$

$$a = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{v_1^2 h^2}{[h^2 + (l_0 + v_1 t)^2] \sqrt{h^2 + (l_0 + v_1 t)^2}}.$$

Czas  $t_C$  przebycia drogi  $3l_0$  wyznaczamy z równania  $BB_1 = v_1 t$ , podstawiając  $BB_1 = 3l_0$ , skąd  $t_C = \frac{3l_0}{v_1}$ . Po podstawieniu i przekształceniach otrzymano:

$$v(t_C) = \frac{4v_1 l_0}{\sqrt{h^2 + 16l_0^2}},$$

$$a(t_C) = \frac{v_1^2 h^2}{(h^2 + 16l_0^2) \sqrt{h^2 + 16l_0^2}}.$$

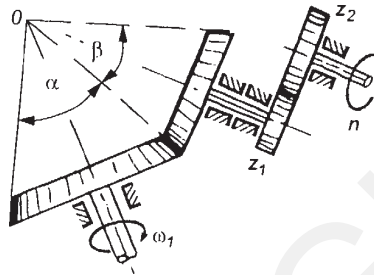
Jednostajny prostoliniowy ruch ciągnika B powoduje zmienny ruch wózka A. Spowodowany jest on w tym przypadku zmienną w czasie strukturą geometrii więzów wynikającą ze zmiany kąta nachylenia liny na odcinku HB.

## 2.3. Kinematyka bryły

### 2.3.1. Ruch postępowy i obrotowy

#### ZADANIE 2.3.1

Dla przekładni jak na rysunku 2.3.1 dane są: kąty kół stożkowych  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ , liczba zębów przekładni walcowej  $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 90$ .



Rys. 2.3.1

Obliczyć liczbę obrotów na minutę  $n$  wału odbierającego, jeżeli wartość prędkości kątowej wału napędzanego wynosi  $\omega_1 = 600 \text{ s}^{-1}$ .

#### Rozwiązanie

Przekładnia złożona jest z dwóch zespołów: zespołu przekładni stożkowej i zespołu przekładni walcowej, przy czym małe koło stożkowe i małe koło walcowe obracają się ze wspólną prędkością kątową  $\omega_2$ . Promienie podziałowe kół stożkowych obliczone w zależności od długości tworzącej  $OA$  wynoszą  $r_1 = OA \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $r_2 = OA \sin \frac{\beta}{2}$ .

Oznaczając prędkość kątową wału odbierającego przez  $\omega_3$ , napisać można dla obu zespołów zależności:

$$v_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \text{skąd} \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_2}{z_1} \quad \text{i} \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{z_1}{z_2}.$$

Prędkość kątowa wału odbierającego wynosi więc

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{z_1 \sin \frac{\alpha}{2}}{z_2 \sin \frac{\beta}{2}}.$$



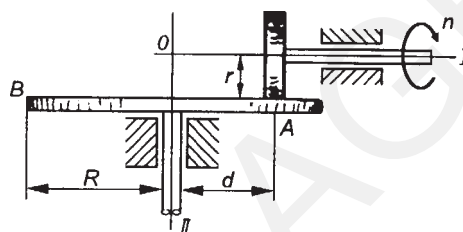
Uwzględniając, że  $\omega_3 = \frac{\pi n}{30}$ , otrzymuje się liczbę obrotów na minutę wału odbierającego

$$n = \frac{30\omega_1 z_1 \sin \frac{\alpha}{2}}{\pi z_2 \sin \frac{\beta}{2}},$$

a po podstawieniu danych  $n = 3690$  obr/min.

### ZADANIE 2.3.2

Dana jest przekładnia cierna, w której wał I może przemieszczać się w kierunku osiowym (rys. 2.3.2).



Rys. 2.3.2

Promienie kół przekładni wynoszą  $r = 0,5$  cm,  $R = 15$  cm. Wiedząc, że wał I wykonuje  $n_1 = 600$  obr/min i przemieszcza się po osi według równania  $d = (10 - 0,5t)$  [cm], obliczyć wartość przyspieszenia kąowego wału II  $\epsilon_{II}$  w zależności od przemieszczenia  $d$  oraz wartość przyspieszenia punktu B w chwili gdy  $d = r$ .

### Rozwiązanie

Przełożenie przekładni w danej chwili obliczyć można w zależności

$$i = \frac{r}{d} = \frac{\omega_{II}}{\omega_I},$$

stąd

$$\omega_{II} = \omega_I \frac{r}{d},$$

przy czym

$$\omega_I = \frac{\pi n_1}{30} = \text{const}, \quad d = d(t).$$

Wartość przyspieszenia kąowego  $\varepsilon_{II}$  wynosi  $\varepsilon_{II} = \frac{\pi n_1 r}{60 d^2}$ . Po podstawieniu danych wynosi ona

$$\varepsilon_{II} = \frac{5\pi}{d^2}.$$

Wartość przyspieszenia punktu  $B$  oblicza się z zależności:

$$a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2},$$

gdzie:  $a_{B\tau} = \varepsilon_{II} \cdot R$ ,  $a_{Bn} = \omega_{II}^2 \cdot R$

i

$$a_B = R \sqrt{\varepsilon_{II}^2 + \omega_{II}^4} = R \sqrt{\left(\frac{5\pi}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_1 r}{30d}\right)^4}.$$

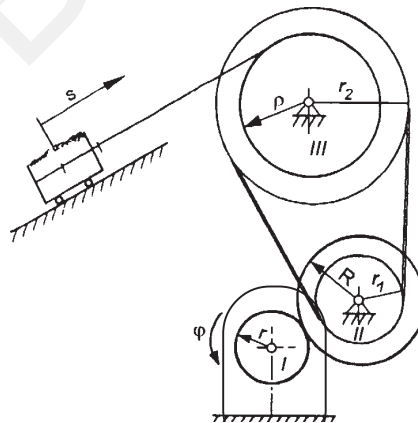
Dla  $d = r$  otrzymuje się

$$a_B = R \sqrt{\left(\frac{5\pi}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_1}{30}\right)^4}$$

i po podstawieniu danych liczbowych  $a_B = 592,2 \text{ m/s}^2$ .

### ZADANIE 2.3.3

Na rysunku 2.3.3 pokazano schemat wyciągarki linowej. Mając dane promienie kół przekładni zębatej  $r = 0,1 \text{ m}$ ,  $R = 0,8 \text{ m}$  oraz kół przekładni pasowej  $r_1 = 0,5 \text{ m}$ ,  $r_2 = 1,2 \text{ m}$ , a także promień bębna linowego  $\rho = 0,6 \text{ m}$ , wyznaczyć równanie ruchu  $\varphi(t)$  wirnika silnika w czasie rozruchu układu, jeżeli wózek wyciągarki po przejechaniu  $5 \text{ m}$  ruchem jednostajnie przyspieszonym osiąga prędkość  $1,5 \text{ m/s}$ .



Rys. 2.3.3

**Rozwiązanie**

Ze względu na to, że ruch jest jednostajnie przyspieszony, równanie ruchu wirnika wyraża się wzorem

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon_1 t^2}{2},$$

przy czym w tym przypadku  $\varphi_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 0$  i  $\varphi = \frac{\varepsilon_1 t^2}{2}$ .

Wartość przyspieszenia  $\varepsilon_1$  wyznaczyć można, obliczając przyspieszenie liniowe  $a$  wózka i korzystając ze wzorów na przełożenie przekładni. Równanie ruchu i prędkość wózka przedstawiają zależności ( $s_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ):

$$s = \frac{1}{2} a t^2, \quad v = a t,$$

stąd po wyrugowaniu parametru  $t$  (czasu), otrzymuje się  $a = \frac{v^2}{2s}$ .

Korzystając z zależności kinematycznych, przy pominięciu rozciągłości liny i pasa, otrzymuje się:

- dla bębna linowego  $v = \omega_3 \cdot \rho$ ,
- dla przekładni pasowej  $\omega_3 r_2 = \omega_2 r_1$ ,
- dla przekładni zębatej  $\omega_2 R = \omega_1 r$ .

Z powyższych równań wyznaczono wartość prędkości kątowej wirnika w zależności od prędkości wózka

$$\omega_1 = \frac{R r_2}{r r_1 \rho} v,$$

a następnie przyspieszenia kątowego  $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \frac{R r_2}{r r_1 \rho} a$ .

Podstawiając obliczoną wcześniej wartość przyspieszenia  $a$ , otrzymano ogólny związek na  $\varepsilon_1$  w zależności od prędkości i przemieszczenia wózka

$$\varepsilon_1 = \frac{R r_2 v^2}{2 r r_1 \rho s},$$

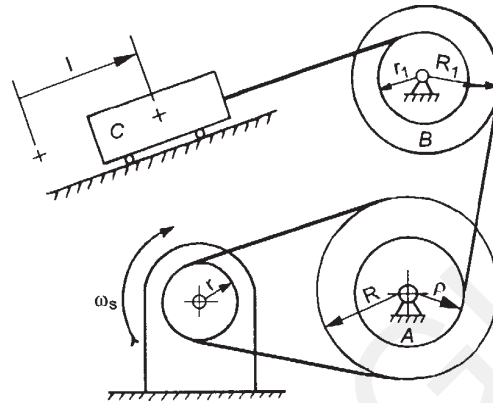
a następnie równanie ruchu wirnika silnika

$$\varphi = \frac{R r_2 v^2}{4 r r_1 \rho s} t^2$$

i ostatecznie po podstawieniu danych liczbowych,  $\varphi = 3,6 t^2$ .

**ZADANIE 2.3.4**

Prędkość kątowna silnika zespołu napędowego, jak na rysunku 2.3.4, zmienia się według równania  $\omega_s = kt^2$ . Mając dane promienie  $r$ ,  $R$ ,  $r_1$ ,  $R_1$ ,  $\rho$ , obliczyć prędkość i przyspieszenie wózka, w chwili gdy przebywa on drogę  $l$  od położenia początkowego, oraz przyspieszenie liny łączącej bębny  $A$  i  $B$ .



Rys. 2.3.4

**Rozwiązanie**

Zależność prędkości  $v$  wózka od czasu uzyska się, uzależniając tę prędkość od prędkości kątowej  $\omega_s$ . W tym celu wykorzystać należy związki kinematyczne dla poszczególnych zespołów urządzenia przy założeniu nierozciągliwości pasa i lin:

- dla przekładni pasowej  $\omega_s r = \omega_A R$ ,
- dla bębnow  $A$  i  $B$   $\omega_A \rho = \omega_B R_1$ ,
- dla bębna  $B$  i wózka  $C$   $v = \omega_B r_1$ .

Z powyższych związków otrzymano  $v = \frac{\rho r_1 r}{R_1 R} \omega_s$ , a w zależności od czasu  $v = \frac{\rho r_1 r k}{R_1 R} t^2$ .

Przyspieszenie wózka wyznacza się, obliczając pochodną  $\frac{dv}{dt}$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2 \frac{\rho r_1 r k}{R_1 R} t.$$

Czas przebycia drogi  $l$  wyznaczyć można z równania ruchu wózka, otrzymanego po scałkowaniu prędkości  $v$ . Przyjmując, że w chwili początkowej  $t_0 = 0$ , początkowe przemieszczenie  $s_0 = 0$ , otrzymuje się

$$s = \frac{\rho r_1 r k}{3 R_1 R} t^3$$

oraz czas przebycia drogi  $s = l$

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{3R_1 R l}{\rho r_1 r k}}.$$

Prędkość i przyspieszenie wózka w chwili  $t_1$ , a więc po przebyciu drogi  $l$ , wynosi:

$$v = \frac{\rho r_1 r k}{R_1 R} t_1^2, \quad a = \frac{2\rho r_1 r k}{R_1 R} t_1, \quad t_1 = \sqrt[3]{\frac{3R_1 R l}{\rho r_1 r k}}.$$

Przyspieszenie linii łączącej bębny  $A$  i  $B$  jest równe przyspieszeniu stycznemu na obwodzie bębna  $A$  lub  $B$ . Można więc stwierdzić, że

$$a_{A\tau} = \varepsilon_A \cdot \rho,$$

$$\text{gdzie } \varepsilon_A = \frac{d\omega_A}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \omega_s \frac{r}{R} \right) = \frac{r}{R} \frac{d\omega_s}{dt} = 2 \frac{kr}{R} t,$$

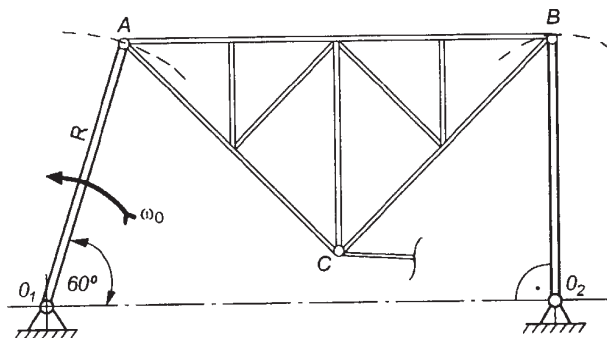
i ostatecznie przyspieszenie linii jest równe  $a_{A\tau} = 2 \frac{kr\rho}{R} t$ .

### 2.3.2. Ruch płaski

#### ZADANIE 2.3.5

Czworobok przegubowy (rys. 2.3.5) napędzany jest ramieniem  $O_1A$  z prędkością kątową  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Przyspieszenie kątowe ramienia  $O_1A$ , w położeniu jak na rysunku 2.3.5, jest równe zero. Poszczególne wymiary mechanizmu wynoszą:  $O_1A = R = 1 \text{ m}$ ,  $AB = 2 \text{ m}$ ,  $AC = BC = \frac{2}{3} AB$ .

Obliczyć prędkość i przyspieszenie liniowe punktu  $C$  i  $B$  oraz prędkość i przyspieszenie kątowe korby  $O_2B$ .



Rys. 2.3.5

### Rozwiązanie

Pręty  $O_1A$  i  $O_2B$  płaskiego mechanizmu, jakim jest czworobok przegubowy, poruszają się ruchem obrotowym wokół osi obrotu prostopadłych odpowiednio w punktach  $O_1$  i  $O_2$  do płaszczyzny ruchu mechanizmu. Znane są zatem kierunki wektorów prędkości i przyspieszeń punktów  $A$  i  $B$ , gdyż tory ich są okręgami o promieniach odpowiednio  $O_1A$  i  $O_2B$ . Zwroty prędkości wynikają z kierunku ruchu pręta  $O_1A$  z prędkością kątową  $\omega_0$ . Wartość prędkości punktu  $A$  wyznaczyć można z zależności

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1A = \omega_0 \cdot R = 1 \text{ m/s.}$$

Wartość przyspieszenia punktu  $A$  wyznacza się, obliczając jego składowe:  $a_{A\tau} = 0$  (przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_0$  pręta  $O_1A$  jest równe zero w rozpatrywanym położeniu mechanizmu),  $a_{An} = \omega_0^2 \cdot O_1A = \omega_0^2 \cdot R = 1 \text{ m/s.}$

Prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  i  $B$  obliczyć można, analizując ruch bryły  $ABC$  jako sztywnej kratownicy. Bryła ta porusza się ruchem płaskim. Prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  i  $B$  wyznaczono, traktując ruch płaski dwojako:

- 1) jako ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia i obrotowego ruchu względnego,
- 2) jako chwilowy ruch obrotowy.

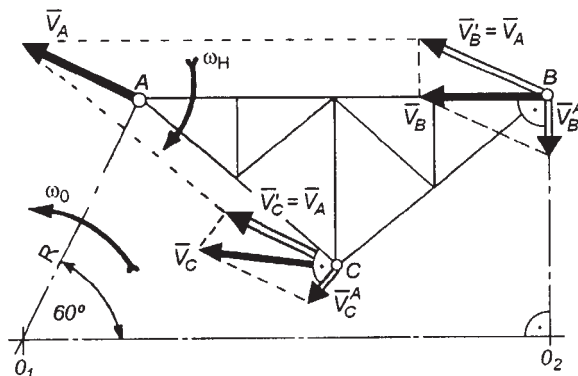
### Obliczenie prędkości $\bar{v}_C$ i $\bar{v}_B$

#### Ad 1)

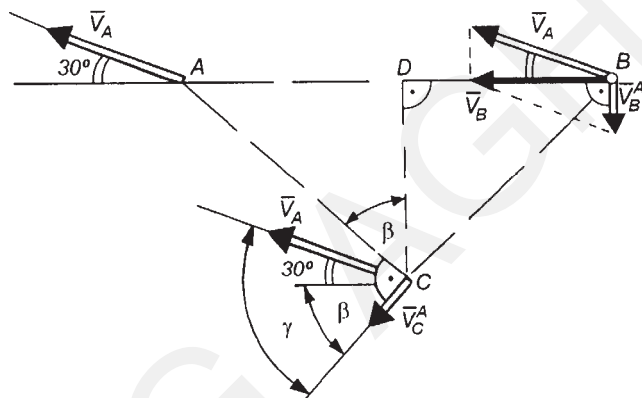
Przyjmując biegun w punkcie  $A$  i korzystając z rozkładu prędkości w ruchu płaskim, można napisać:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{v}_C^A, \quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_B^A,$$

gdzie:  $\bar{v}_C$  i  $\bar{v}_B$  są bezwzględными prędkościami punktów  $C$  i  $B$ ,  $\bar{v}_A$  prędkością w postępowym ruchu unoszenia (prędkość bieguna  $A$ ),  $\bar{v}_C^A$  i  $\bar{v}_B^A$  prędkościami w obrotowym ruchu względnym (względem bieguna  $A$ ). Ruch unoszenia jest ruchem postępowym i w związku z tym prędkość unoszenia  $\bar{v}_u = \bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_C$  (rys. 2.3.5a) i kierunek jej jest prostopadły do pręta  $O_1A$ . Ruch względny jest ruchem obrotowym i kierunek prędkości  $\bar{v}_B^A$  i  $\bar{v}_C^A$  jest prostopadły odpowiednio do pręta  $AC$  i  $AB$ . Rozkład prędkości poglądowo przedstawiono na rysunku 2.3.5a i 2.3.5b. W równaniach wektorowych prędkości  $\bar{v}_C$  i  $\bar{v}_B$  znane są kierunki prędkości  $\bar{v}_A$ ,  $\bar{v}_C^A$ ,  $\bar{v}_B$ ,  $\bar{v}_B^A$  oraz wartość prędkości  $\bar{v}_A$ . Obliczając  $v_B^A = v_A \sin 30^\circ = 0,5 \text{ m/s}$ , a następnie obliczając prędkość kątową w ruchu względnym (ruch względny jest ruchem obrotowym i dlatego można skorzystać z takiej zależności) z zależności  $v_B^A = \omega_H \cdot AB$ , otrzymano  $\omega_H = \frac{v_B^A}{AB} = 0,25 \text{ s}^{-1}$  oraz  $v_C^A = \omega_H \cdot AC = \frac{1}{3} \text{ m/s}$ .



Rys. 2.3.5a



Rys. 2.3.5b

Wartość prędkości bezwzględnej punktu  $C$  obliczyć można, korzystając np. z twierdzenia Carnota:

$$v_C = \sqrt{(v_C)^2 + (v_C^A)^2 + 2v_C v_C^A \cos(\vec{v}_C, \vec{v}_C^A)} =$$

$$= \sqrt{(v_A)^2 + (v_C^A)^2 + 2v_A v_C^A \cos(\vec{v}_C, \vec{v}_C^A)},$$

gdzie  $\sphericalangle(\vec{v}_C, \vec{v}_C^A) = \gamma = \beta + 30^\circ$  (rys. 2.3.5b),

przy czym  $\cos \gamma = \cos \beta \cos 30^\circ - \sin \beta \sin 30^\circ$ ,

$$\cos \beta = \frac{DC}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \sin \beta = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \beta = 48,6^\circ, \quad \text{gdzie } DC = \sqrt{AC^2 - AD^2}.$$

Obliczając  $\cos \gamma = 0,1975$ , otrzymano ostatecznie  $v_C = 1,11$  m/s.

Kierunek wektora  $\bar{v}_C$  określić można, obliczając np. kąt między wektorami  $\bar{v}_C$  i  $\bar{v}_C^A$  według zależności

$$\sin(\bar{v}_C^A, \bar{v}_C) = \frac{v_A}{v_C} \sin \gamma.$$

Wartość prędkości punktu  $B$  wynosi

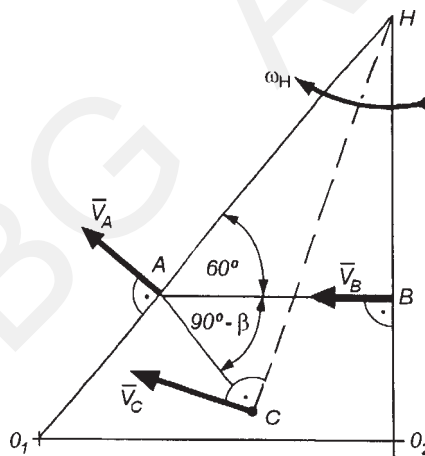
$$v_B = v_A \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s.}$$

### Ad 2)

Wyznaczając w zadanym położeniu mechanizmu chwilowy środek prędkości (środek obrotu chwilowego), prędkości  $\bar{v}_C$  i  $\bar{v}_C^A$  obliczyć można jak w ruchu obrotowym, traktując ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy, tzn.:

$$v_B = \omega_H \cdot B_H, \quad v_C = \omega_H \cdot C_H,$$

gdzie  $\omega_H$  jest wartością chwilowej prędkości kątowej wokół chwilowego środka prędkości  $H$  (rys. 2.3.5c).



Rys. 2.3.5c

Chwilowy środek prędkości  $H$  wyznaczono jako punkt przecięcia się prostych prostopadłych do wektorów  $\bar{v}_A$  i  $\bar{v}_B$ , a kierunek prędkości  $\bar{v}_C$  rysując wektor  $\bar{v}_C$  prostopadle do  $CH$ . Obliczając prędkość kątową  $\omega_H$  z zależności  $v_A = \omega_H \cdot A_H$ , otrzymano:

$$v_B = v_A \frac{BH}{AH} \quad \text{i} \quad v_C = v_A \frac{CH}{AH}.$$



Wartość prędkości  $\bar{v}_A$  jest znana i wynosi  $v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 1$  m/s, natomiast (rys. 2.3.5c)

$$\frac{BH}{AH} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AH = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2AB,$$

$$CH = \sqrt{(AH)^2 + (AC)^2 - 2(AH)(AC)\cos(150^\circ - \beta)} = \frac{2}{3}AB\sqrt{10 - 6\cos(150^\circ - \beta)}.$$

Po podstawieniu danych otrzymano  $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$  m/s,  $v_C = 1,11$  m/s.

### Obliczenie prędkości kątowej pręta $O_2B$

Prędkość kątową  $\omega_{02}$  pręta  $O_2B$  obliczyć można z zależności  $\omega_{02} = \frac{v_B}{O_2B}$ , ponieważ punkt  $B$  porusza się po okręgu o promieniu  $O_2B$ .

Obliczając  $O_2B = O_1A \sin 60^\circ$  oraz podstawiając obliczoną wartość  $\bar{v}_B$ , otrzymano  $\omega_{02} = 1$  s<sup>-1</sup>. Wyznaczona prędkość  $\omega_{02}$  odpowiada zadanemu chwilowemu położeniu mechanizmu. W położeniach innych wartość prędkości kątowej  $\omega_{02}$  może być inna od obliczonej.

### Obliczenie przyspieszenia $\bar{a}_C$ i $\bar{a}_B$

#### Ad 1)

Przyjmując biegun w punkcie  $A$  i korzystając z rozkładu przyspieszeń w ruchu płaskim można napisać:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_C^A, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_B^A \quad (\bar{a}_A \text{ wyznaczono – str. 94}),$$

gdzie  $\bar{a}_C$  i  $\bar{a}_B$  są bezwzględными przyspieszeniami punktów  $C$  i  $B$ ,  $\bar{a}_A = \bar{a}_{An}$  przyspieszeniem w postępowym ruchu unoszenia (przyspieszenie bieguna  $A$ ),  $\bar{a}_C^A$  i  $\bar{a}_B^A$ , przyspieszeniami w obrotowym ruchu względnym (względem bieguna  $A$ ). Ze względu na obrotowy ruch względny mogą wystąpić dwie składowe przyspieszeń  $\bar{a}_C^A$  i  $\bar{a}_B^A$ , tj.:

$$\bar{a}_C^A = \bar{a}_{C\tau}^A + \bar{a}_{Cn}^A, \quad \bar{a}_B^A = \bar{a}_{B\tau}^A + \bar{a}_{Bn}^A.$$

Punkt  $B$  mechanizmu porusza się w ruchu bezwzględnym po okręgu o promieniu  $O_2B$  i w związku z tym należy uwzględnić dwie składowe jego przyspieszenia bezwzględnego, tzn.  $\bar{a}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn}$  względem punktu  $O_2$ .

Ostatecznie można więc napisać:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{C\tau}^A + \bar{a}_{Cn}^A,$$

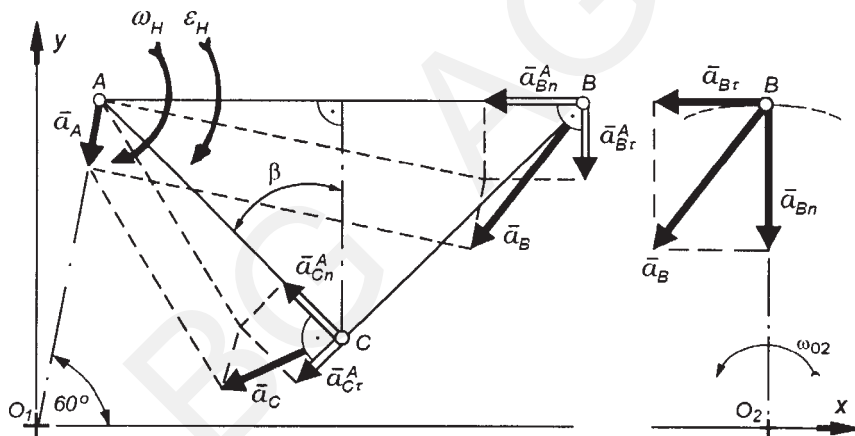
$$\bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_{An} = \bar{a}_{B\tau}^A + \bar{a}_{Bn}^A.$$

W równaniach powyższych znamy kierunki wszystkich przyspieszeń z wyjątkiem przyspieszenia  $\bar{a}_C$ , tj. 1,5

$$\bar{a}_{An} \parallel O_1A, \quad \bar{a}_{C\tau}^A \perp AC, \quad \bar{a}_{Cn}^A \parallel AC, \quad \bar{a}_{B\tau} \perp O_2B,$$

$$\bar{a}_{Bn} \parallel O_2B, \quad \bar{a}_{B\tau}^A \perp AB, \quad \bar{a}_{Bn}^A \parallel AB.$$

Rozkład przyspieszeń w sposób poglądowy pokazano na rysunku 2.3.5d.



Rys. 2.3.5d

Oprócz wartości przyspieszenia  $\bar{a}_{An}$  znane są również wartości przyspieszeń:

$$a_{Cn}^A = \omega_H^2 \cdot AC = (0,25)^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{12} \text{ ms}^{-2},$$

$$a_{Bn}^A = \omega_H^2 \cdot AB = (0,25)^2 \cdot 2 = \frac{1}{8} \text{ ms}^{-2},$$

$$a_{Bn} = \omega_{02}^2 \cdot O_2B = \omega_{02}^2 \cdot O_1A \sin 60^\circ = 0,5\sqrt{3} \text{ ms}^{-2}.$$

Rzutuując równania wektorowe przyspieszeń na osie przyjętego układu odniesienia (rys. 2.3.5d) otrzymamy:

$$a_{Cx} = -a_{An} \cos 60^\circ - a_{C\tau}^A \cos \beta - a_{Cn}^A \sin \beta,$$

$$a_{Cy} = -a_{An} \sin 60^\circ - a_{C\tau}^A \sin \beta + a_{Cn}^A \cos \beta,$$

$$-a_{B\tau} = -a_{An} \cos 60^\circ - a_{Bn}^A,$$

$$-a_{Bn} = -a_{An} \sin 60^\circ - a_{B\tau}^A,$$

gdzie niewiadomymi są:  $a_{Cx}$ ,  $a_{Cy}$ ,  $a_{C\tau}^A$ ,  $a_{B\tau}^A$ ,  $a_{Bn}^A$ , z których  $a_{B\tau}^A$ ,  $a_{C\tau}^A$  uzależnić można od jednej niewiadomej, tj. przyspieszenia kąowego  $\varepsilon_H$  (względem bieguna  $A$ ) według wzorów:

$$a_{C\tau}^A = \varepsilon_H \cdot AC, \quad a_{B\tau}^A = \varepsilon_H \cdot AB.$$

Kąt  $\beta$  wyznaczono podczas obliczeń prędkości, a mianowicie:

$$\sin \beta = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \beta = 48,6^\circ.$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymamy:

$$a_{Cx} = 0,56 \text{ ms}^{-2}, \quad a_{Cy} = -0,92 \text{ ms}^{-2}, \quad \varepsilon_H = 0,$$

$$a_{C\tau}^A = a_{B\tau}^A = 0, \quad a_{Bn}^A = 0,625 \text{ ms}^{-2}.$$

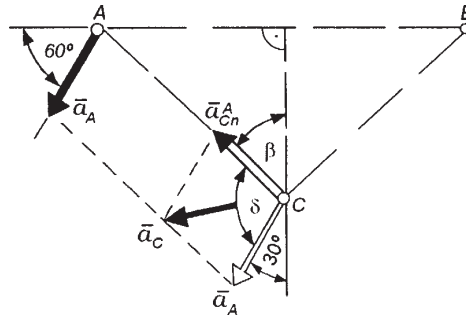
Wartości bezwzględne przyspieszeń punktu  $C$  i  $B$  obliczyć można np. z zależności:

$$a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2}, \quad a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} \quad \text{lub} \quad a_C = \sqrt{a_A^2 + a_{Cn}^2 + 2a_A a_{Cn}^A \cos \delta}.$$

Wynoszą one:  $a_B = 1,07 \text{ ms}^{-2}$ ,  $a_C = 0,99 \text{ ms}^{-2}$ .

Kierunki przyspieszeń można określić, obliczając odpowiednie kąty, np. dla przyspieszenia  $\vec{a}_C$  (rys. 2.3.5e):

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}_A, \vec{a}_C) = \frac{a_{Cn}^A}{a_C} \sin(180^\circ - \delta), \quad \delta = 150^\circ - \beta = 101,4^\circ.$$



Rys. 2.3.5e

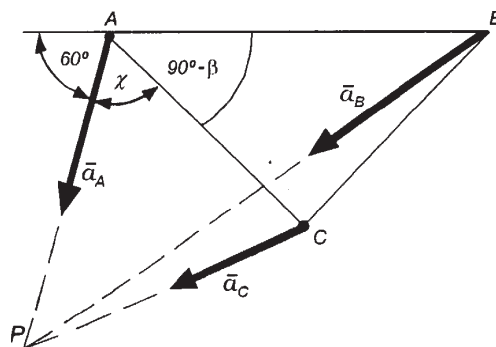
## Ad 2)

Obliczenia przyspieszeń przy tym sposobie traktowania ruchu płaskiego dokonuje się, wyznaczając położenie chwilowego środka przyspieszeń  $P$  względem punktu o znanym przyspieszeniu (w tym przypadku punktu  $A$ ). Znając w zadanym położeniu mechanizmu wartość chwilowej prędkości kątowej  $\omega_H$  i chwilowego przyspieszenia kątowego  $\varepsilon_H$ , położenie chwilowego środka przyspieszeń  $P$  względem punktu  $A$  określa się, podając kąt  $\alpha$  odchylenia od przyspieszenia  $\vec{a}_A$  kierunku, na którym leży chwilowy środek przyspieszeń  $P$  i odległość  $AP$  od punktu  $A$  na tym kierunku, przy czym kąt określa się zgodnie z przyspieszeniem kątowym. Kąt  $\alpha$  oraz odległość  $AP$  oblicza się z zależności:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_H}{\omega_H^2}, \quad AP = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_H^2 + \omega_H^4}}.$$

Podstawiając  $\varepsilon_H = 0$ ,  $\omega_H = 0,25 \text{ s}^{-1}$ ,  $a_A = a_{An} = 1 \text{ ms}^{-2}$ , otrzymano  $\alpha = 0$ ,  $AP = 16 \text{ m}$ , tzn. że chwilowy środek przyspieszeń leży na kierunku przyspieszenia  $\vec{a}_A$  w odległości 16 m od punktu  $A$ .

Względem chwilowego środka przyspieszeń występują jedynie składowe normalne przyspieszeń ( $\varepsilon_H = 0$ ,  $\omega_H \neq 0$ ) i przyspieszenia punktów  $B$  i  $C$  leżą więc odpowiednio na kierunkach  $BP$  i  $CP$ . Rozkład przyspieszeń względem punktu  $P$  poglądowo pokazano na rysunku 2.3.5f.



Rys. 2.3.5f

Wartość przyspieszeń punktu  $B$  i  $C$  obliczyć można z zależności:

$$a_B = a_{Bn} = \omega_H^2 \cdot BP, \quad a_C = a_{Cn} = \omega_H^2 \cdot CP,$$

gdzie:

$$BP = \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2 - 2(AP)(AB) \cos 120^\circ},$$

$$CP = \sqrt{(AP)^2 + (AB)^2 - 2(AP)(AB) \cos \chi}, \quad \chi = \beta + 30^\circ.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$a_C = 0,99 \text{ ms}^{-2}, \quad a_B = 1,07 \text{ ms}^{-2}.$$

### Obliczenia przyspieszenia kątownego pręta $O_2B$

Przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_{02}$  pręta  $O_2B$  obliczyć można z zależności

$$\varepsilon_{02} = \frac{a_{B\tau}}{O_2B},$$

ponieważ punkt  $B$  porusza się po okręgu o promieniu  $O_2B$ .

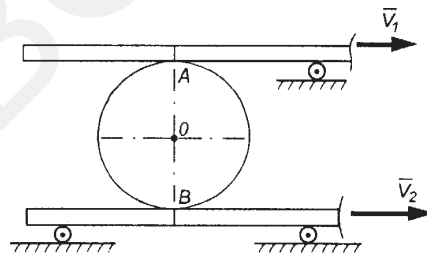
Obliczając  $O_2B = O_1A \sin 60^\circ$  oraz podstawiając dane liczbowe, otrzymano  $\varepsilon_{02} = 0,72 \text{ s}^{-2}$ .

### ZADANIE 2.3.6

Koło o promieniu  $r = 1 \text{ m}$  toczy się pomiędzy dwiema ruchomymi belkami poruszającymi się z prędkościami  $v_1 = 0,5t \text{ m/s}$  i  $v_2 = 1 \text{ m/s}$  (rys. 2.3.6).

Koło toczy się bez poślizgu względem belek. W chwili początkowej dla  $t_0 = 0$ ,  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 1 \text{ m/s}$ .

Wyznaczyć prędkość punktu  $O$ , prędkość kątową koła w chwili  $t_1 = 1 \text{ s}$  i  $t_2 = 2 \text{ s}$  oraz równania centroid.



Rys. 2.3.6

### Rozwiązanie

Koło porusza się ruchem płaskim, przy czym ze względu na to, że belki poruszają się ruchem postępowym oraz nie ma poślizgu pomiędzy kołem i belkami, znane są chwilowe prędkości punktów styku  $A$  i  $B$ , tzn.  $v_A = v_1$ ,  $v_B = v_2$ . Wygodnie jest w tym przypadku (poszukuje się wartości chwilowych  $v_0$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$ ) traktować ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy i rozwiązać zadanie, wyznaczając chwilowy środek

prędkości. Korzystając ze znanych metod, wyznaczono położenie chwilowego środka prędkości  $H$ , przyjmując, że  $v_2 > v_1$ , tzn. dla chwili  $0 < t < t_2$  (rys. 2.3.6a). Ze względu na to, że  $v_1$  zależy od czasu, chwilowy środek prędkości zmienia swoje położenie i np. dla  $t = 0$  znajduje się w punkcie  $A$ , a dla  $t > t_2$  leży na prostej  $AB$  poniżej punktu  $B$ . Układając równania:

$$\begin{aligned}v_1 &= \omega \cdot AH, \\v_2 &= \omega(2r + AH), \\v_0 &= \omega(r + AH),\end{aligned}$$

i rozwiązując powyższy układ, otrzymano:

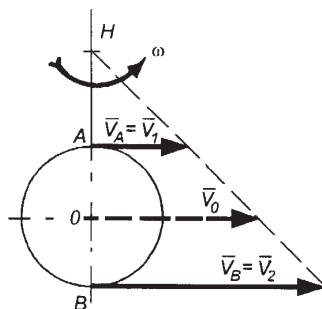
$$\begin{aligned}AH &= \frac{2v_1 r}{v_2 - v_1}, \\v_0 &= \frac{v_1 + v_2}{2}, \\ \omega &= \frac{v_2 - v_1}{2r}, \\v_1 &= 0,5t \text{ [m/s]}.\end{aligned}$$

Z powyższych zależności wynika, że dla  $t = 0$ , tzn. dla  $v_1 = 0$ ,  $AH = 0$ , i chwilowy środek prędkości leży w punkcie  $A$ . Dla  $v_1 = v_2$ ,  $AH = \infty$ ,  $\omega = 0$  i chwilowy środek prędkości znajduje się w nieskończoności, tzn. ruch koła można traktować jak chwilowy ruch postępowy przy obliczeniu prędkości (w tym położeniu prędkości wszystkich punktów koła są takie same, ale nie dotyczy to przyspieszenia!). Dla  $v_1 > v_2$  chwilowy środek prędkości zmienia swoje położenie i leży poniżej punktu  $B$  na prostej  $AB$ .

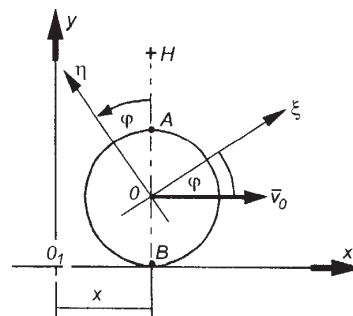
Podstawiając  $t_1 = 1$  s i  $t_2 = 2$  s otrzymano:

$$\begin{aligned}v_0(t_1) &= 0,75 \text{ m/s}, \quad \omega_1 = 0,25 \text{ s}^{-1}, \\v_0(t_2) &= 1 \text{ m/s}, \quad \omega_2 = 0.\end{aligned}$$

Równanie centroidy nieruchomej wyznaczono w przyjętym nieruchomym układzie odniesienia  $O_1xy$  (rys. 2.3.6b).



Rys. 2.3.6a



Rys. 2.3.6b

Wyznaczając współrzędne punktu  $H$ , w zależności od  $t$  otrzymuje się równania parametryczne (parametrem jest czas  $t$ ), które można interpretować jako skończone równania „ruchu” punktu  $H$ . Rugując parametr  $t$  otrzymuje się z tych równań równanie centroidy nieruchomej. W rzeczywistości punkt  $H$  należy do płaszczyzny sztywno związanej z bryłą poruszającą się ruchem płaskim i ma prędkość równą zeru w danej chwili. W każdej następnej chwili chwilowym środkiem prędkości staje się inny punkt tej płaszczyzny o prędkości chwilowej równej zeru, który ma inne położenie niż punkt poprzedni. W ten sposób obserwuje się pozornie „ruch” punktu  $H$ .

Obliczając współrzędne punktu  $H$  w zależności od czasu, otrzymano:

$$x_H = x_0 = \int_0^t v_0 dt = \int_0^t \frac{v_1 + v_2}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^t (0,5t + 1) dt = \frac{1}{8} t^2 + \frac{1}{2} t,$$

$$y_H = 2r + AH = 2r + \frac{2v_1 r}{v_2 - v_1} = \frac{2t}{1 - 0,5t}.$$

Rugując z powyższych równań czas  $t$ , otrzymano równanie centroidy nieruchomej (rys. 2.3.6c).

Dla wyznaczenia równania centroidy ruchomej wprowadzono ruchomy układ odniesienia sztywnie związany z kołem (rys. 2.3.6b).

Wykorzystując równania centroidy w układzie ruchomym w postaci:

$$\xi = \frac{\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi}{\dot{\varphi}}, \quad \eta = \frac{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi}{\dot{\varphi}},$$

gdzie:  $\dot{x}_0 = v_0 = \frac{0,5t + 1}{2}$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = \frac{1 - 0,5t}{2}$ .

otrzymano

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2(t),$$

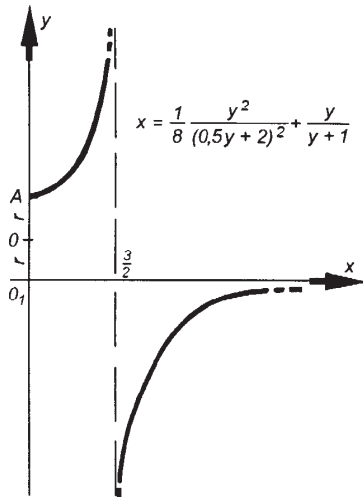
gdzie

$$\rho(t) = \frac{1 + 0,5t}{1 - 0,5t}.$$

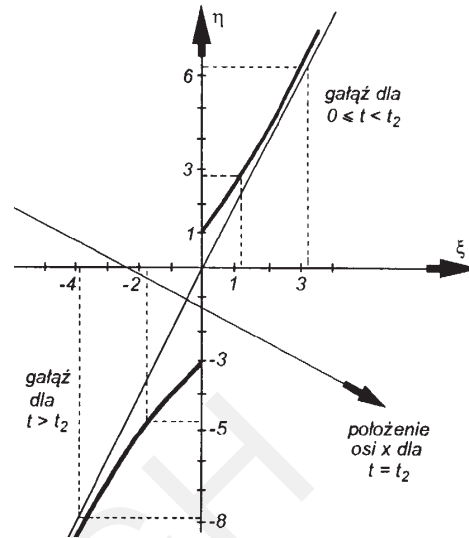
Równanie centroidy ruchomej jest równaniem spirali pokazanej na rysunku 2.3.6d.

Centroida ruchoma toczy się bez poślizgu po centroidzie nieruchomej, a więc:

- dla chwili  $0 < t < t_2 = 2$  s gałąź krzywej górnej z rysunku 2.3.6d toczy się po górnej gałęzi z rysunku 2.3.6c,
- dla chwili  $t > t_2 = 2$  s gałąź dolna z rysunku 2.3.6d toczy się po gałęzi dolnej z rysunku 2.3.6c,
- chwila  $t_2 = 2$  s rozgranicza zmianę kierunku obrotów koła (prędkości kątowej  $\omega$ ) i tym samym zmianę kierunku toczenia się centroidy ruchomej po nieruchomej.



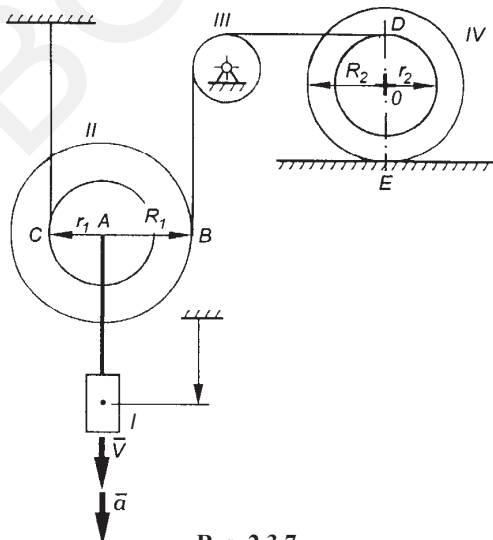
Rys. 2.3.6c



Rys. 2.3.6d

**ZADANIE 2.3.7**

Ciężar I (rys. 2.3.7) zawieszony w punkcie  $A$  tarczy II o promieniach  $r_1$  i  $R_1$  opada z prędkością  $\bar{v}$  i przyspieszeniem  $\bar{a}$ . Ruch szpuli IV o promieniach  $r_2$  i  $R_2$  powodowany jest odwijającą się liną przerzuconą przez koło kierujące III i nawiniętą na tarczę II oraz szpulę IV. Zakładając, że lina jest nierozciągliwa i toczenie szpuli IV odbywa się bez poślizgu, obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $O$  oraz prędkość i przyspieszenie kątowe szpuli IV.



Rys. 2.3.7



**Rozwiązanie**

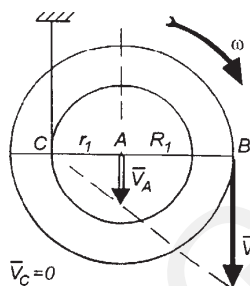
Układ materialny składa się z czterech brył, z których bryła I porusza się ruchem postępowym, bryła II i IV ruchem płaskim, bryła III ruchem obrotowym. Wyznaczyć należy określone parametry kinematyczne ( $\bar{v}_0, \bar{a}_0, \omega_0, \varepsilon_0$ ) bryły poruszającej się ruchem płaskim.

Zadanie rozwiązano dwoma sposobami:

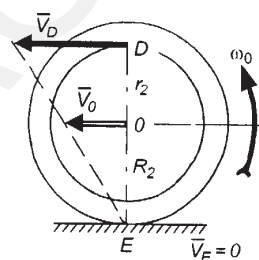
- 1) traktując ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy,
- 2) traktując ruch płaski jako ruch złożony.

**Ad 1)**

Z narzuconych na układ więzów wynika, że  $\bar{v} = \bar{v}_A, |\bar{v}_B| = |\bar{v}_D|, \bar{v}_C = 0$ , i w związku z tym chwilowy środek prędkości tarczy II leży w punkcie C, a szpuli IV w punkcie E (rys. 2.3.7a i 2.3.7b).



Rys. 2.3.7a



Rys. 2.3.7b

Układając równania dla tarczy II:

$$v_A = \omega r_1, \quad v_B = \omega(r_1 + R_1),$$

i szpuli IV:

$$v_D = \omega_0 (r_2 + R_2), \quad v_0 = \omega_0 R_2,$$

oraz wykorzystując zależność  $|\bar{v}_B| = |\bar{v}_D|, |\bar{v}_A| = |\bar{v}|$  i rozwiązując powyższy układ równań, otrzymano:

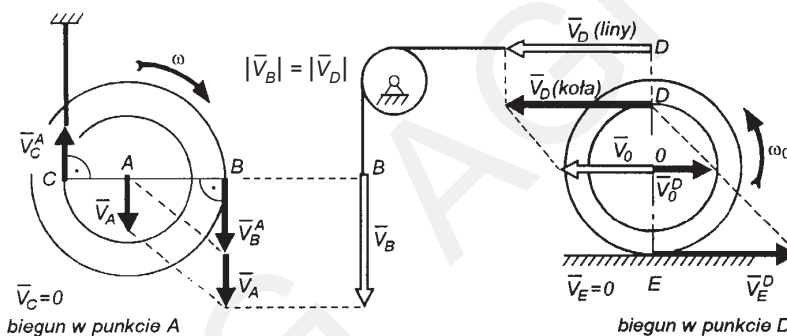
$$v_0 = v \frac{R_2 (r_1 + R_1)}{r_1 (r_2 + R_2)}, \quad \omega_0 = v \frac{r_1 + R_1}{r_1 (r_2 + R_2)}.$$

Relacje te są słuszne dla każdej chwili czasu. Promienie nie zmieniają się i tory punktu  $A$  i  $O$  są prostoliniowe, więc zależności powyższe formalnie można zróżniczkować, traktując  $v = v(t)$  i otrzymując:

$$a_0 = \frac{dv_0}{dt} = a \frac{R_2(r_1 + R_1)}{r_1(r_2 + R_2)}, \quad \varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = a \frac{r_1 + R_1}{r_1(r_2 + R_2)}.$$

### Ad 2)

Ruch płaski traktuje się w tym przypadku jako ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia i obrotowego ruchu względnego. Prędkości oblicza się, korzystając z rozkładu prędkości, jako sumę wektorową prędkości unoszenia (prędkości dowolnego bieguna) i prędkości względnej (względem tego bieguna), a przyspieszenia jako sumę wektorową przyspieszenia unoszenia (przyspieszenia dowolnego bieguna) i przyspieszenia względnego (względem tego bieguna). Rozkład prędkości pokazano na rysunku 2.3.7c.



Rys. 2.3.7c

Obierając biegun dla tarczy II w punkcie  $A$  i dla szpuli IV w punkcie  $D$ , otrzymuje się równania wektorowe:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^A = 0,$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_D + \vec{v}_0^D, \quad \vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_E^D = 0,$$

a następnie skalarne:

$$v_B = v_A + v_B^A, \quad v_A - v_C^A = 0,$$

$$v_0 = v_D + v_0^D, \quad v_D - v_E^D = 0,$$

przy czym  $v_B = v_D$ ,  $v_A = v$  ( $\vec{v}$  jest prędkością opadającej bryły I).

Uwzględniając, że

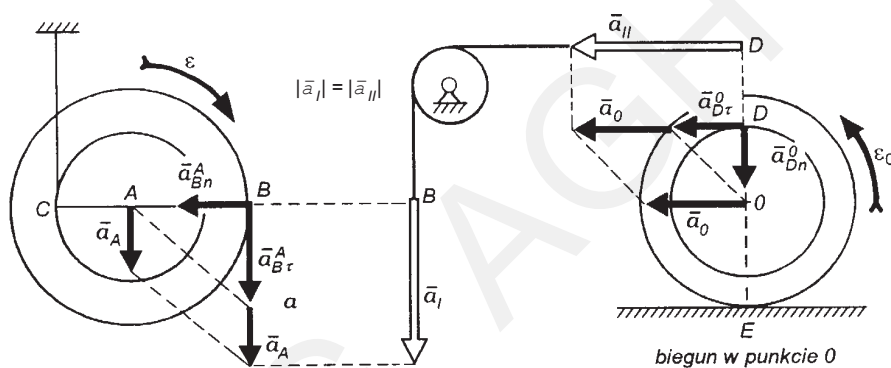
$$v_C^A = \omega \cdot CA = \omega \cdot r_1, \quad v_B^A = \omega \cdot BA = \omega \cdot R_1,$$

$$v_0^D = \omega \cdot OD = \omega_0 \cdot r_2, \quad v_E^D = \omega_0 \cdot ED = \omega_0 (r_2 + R_2),$$

z powyższego układu równań otrzymuje się:

$$v_0 = v \frac{R_2(r_1 + R_1)}{r_1(r_2 + R_2)}, \quad \omega_0 = v \frac{r_1 + R_1}{r_1(r_2 + R_2)}.$$

Rozkład przyspieszeń pokazano na rysunku 2.3.7d.



Rys. 2.3.7d

Obierając w tym przypadku bieguny w punktach  $A$  i  $O$ , otrzymuje się równania wektorowe:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B\tau}^A + \bar{a}_{Bn}^A,$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}^0 + \bar{a}_{D\tau}^0 + \bar{a}_{Dn}^0.$$

Podstawiając  $\bar{a}_A + \bar{a}_{B\tau}^A = \bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_0 + \bar{a}_{D\tau}^0 = \bar{a}_{11}$  i uwzględniając  $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_{11}|$  ( $\bar{a}_1$  jest rzutem przyspieszenia  $\bar{a}_B$  na kierunek liny w punkcie  $B$ , a  $\bar{a}_{11}$  rzutem przyspieszenia  $\bar{a}_D$  na kierunek liny w punkcie  $D$  i odpowiednio są one przyspieszeniami punktów liny  $B$  i  $D$ , z czego wynika równość ich wartości przy założeniu nierozciągłości liny), otrzymuje się równanie skalarne

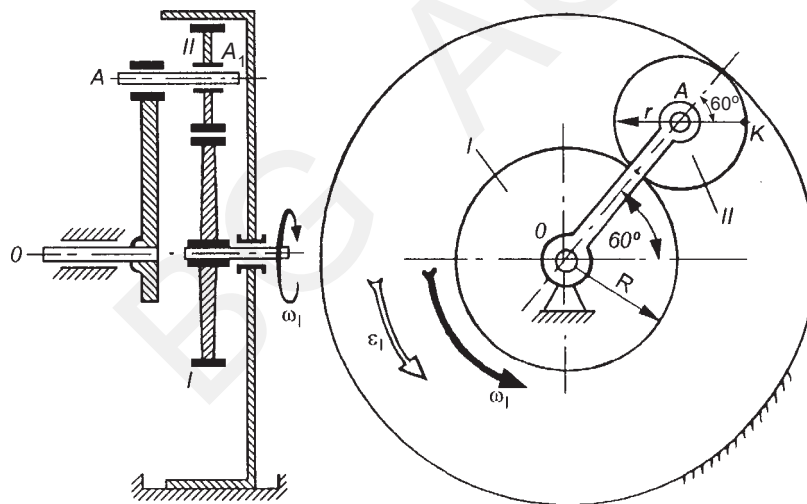
$$a_A + a_{B\tau}^A = a_0 + a_{D\tau}^0.$$

Uwzględniając, że  $a_A = a(\bar{a}$  jest przyspieszeniem opadającej bryły I),  $a_{B\tau}^A = \varepsilon \cdot R_1$ ,  
 $\varepsilon = \frac{a_A}{r_1}$ ,  $a_{D\tau}^0 = \varepsilon_0 \cdot r_2$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{a_0}{R_2}$ , otrzymuje się:

$$a_0 = a \frac{R_2(r_1 + R_1)}{r_1(r_2 + R_2)}, \quad \varepsilon_0 = a \frac{r_1 + R_1}{r_1(r_2 + R_2)}.$$

### ZADANIE 2.3.8

W przekładni planetarnej, jak na rysunku 2.3.8, prędkość kątową i przyspieszenie kątowe wału napędowego wynoszą:  $\omega_1 = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_1 = 0,5 \text{ s}^{-2}$ . Koło planetarne II osadzone jest w łożyskach na osi  $AA_1$  związanej sztywno z ramką  $OA$ . Znając promień  $R = 1 \text{ m}$  i  $r = 0,5 \text{ m}$ , obliczyć prędkość i przyspieszenie chwilowe punktu  $K$  oraz prędkość i przyspieszenie kątowe ramki  $OA$ .



Rys. 2.3.8

### Rozwiązanie

W przekładni planetarnej koło I oraz ramka  $OA$  poruszają się ruchami obrotowymi, a koło II ruchem płaskim, przy czym zakłada się, że koło toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole związanym z korpusem przekładni.

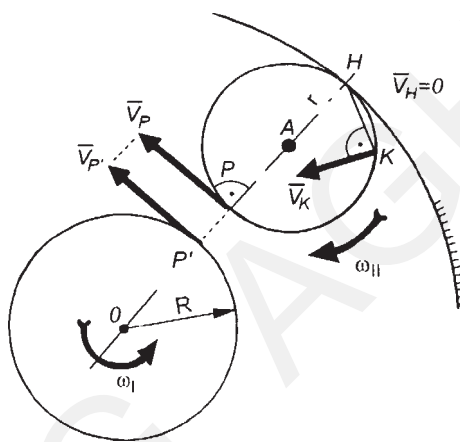
### Obliczenie prędkości punktu $K$

#### 1) Ruch płaski koła II jako chwilowy ruch obrotowy

Chwilowy środek prędkości znajduje się w punkcie  $H$  (rys. 2.3.8a). Znając położenie punktów  $K$  i  $H$  można napisać

$$v_K = \omega_{II} \cdot KH,$$

gdzie  $\omega_{II}$  jest kątową prędkością koła II.



Rys. 2.3.8a

Prędkość  $\omega_{II}$  wyznaczyć można, obliczając prędkość liniową punktu styku kół I i II. Prędkość ta względem środka koła I wynosi  $v_{p'} = \omega_I \cdot R$  (jako punktu  $P'$  należącego do koła I), a względem chwilowego środka prędkości  $H$   $v_p = \omega_{II} \cdot PH$  (jako punktu  $P$  należącego do koła II).

Uwzględniając, że  $v_{p'} = v_p$ , otrzymuje się  $\omega_{II} = \omega_I \frac{R}{PH}$ , a zatem

$$v_K = \omega_I R \frac{KH}{PH}.$$

Trójkąt  $AHK$  jest równoboczny, więc  $KH = r$ .

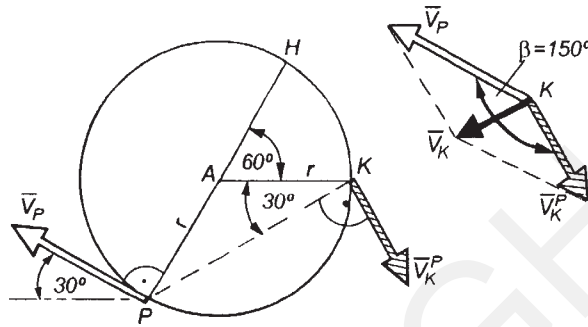
Podstawiając  $KH = r$  oraz  $PH = 2r$ , otrzymano  $\omega_{II} = \frac{1}{2} \omega_I \frac{R}{r}$  i  $v_K = \frac{1}{2} \omega_I R$ , a dla danych liczbowych  $\omega_{II} = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_K = 0,5 \text{ m/s}$ .

## 2) Ruch płaski koła II jako ruch złożony

Przyjmując biegun w punkcie  $P$  (rys. 2.3.8b), można napisać równanie wektorowe:

$$\vec{v}_K = \vec{v}_P + \vec{v}_K^P,$$

gdzie  $\vec{v}_K^P$  jest prędkością względną w obrotowym ruchu względnym względem bieguna  $P$ .



Rys. 2.3.8b

Prędkość  $v_P$  względem środka  $O$  koła I wynosi  $v_P = \omega_I \cdot R$ , a prędkość

$$v_K^P = \omega_{II} \cdot PK.$$

Prędkość kątową  $\omega_{II}$  obliczyć można, układając równanie wektorowe

$$\vec{v}_H = \vec{v}_P + \vec{v}_H^P = 0 \quad (\text{punkt } H \text{ ma prędkość równą zero}),$$

i skalarne

$$v_P - v_H^P = 0,$$

gdzie  $v_H^P = \omega_{II} HP$ ,

skąd

$$\omega_{II} = \frac{v_H^P}{HP} = \frac{v_P}{HP} = \omega_I \frac{R}{2r}.$$

Podstawiając  $PK = 2r \cos 30^\circ$  (co wynika z rys. 2.3.8b), otrzymano

$$v_K^P = \omega_I R \cos 30^\circ,$$

a następnie z zależności  $v_K = \sqrt{(v_P)^2 + (v_K^P)^2 + 2v_P v_K^P \cos \beta}$  (gdzie  $\beta = 150^\circ$ ) – wartość prędkości punktu  $K$

$$v_K = \frac{1}{2} \omega_I R.$$

Dla danych liczbowych otrzymuje się

$$\omega_{II} = 1 \text{ s}^{-1}, v_K = 0,5 \text{ m/s}.$$

### Obliczenie prędkości $\omega_R$ i przyspieszenia kąowego $\epsilon_R$ ramki $OA$

Punkt  $A$  jest punktem wspólnym koła II i ramki  $OA$ . Prędkość punktu  $A$  wyznaczyć można z jednej strony względem punktu  $O$ , a z drugiej strony względem punktu  $H$ :

$$v_A = \omega_R \cdot OA = \omega_R(R + r),$$

$$v_A = \omega_{II} \cdot AH = \omega_{II} \cdot r, \quad \text{gdzie} \quad \omega_{II} = \omega_I \frac{R}{2r}.$$

Z zależności tych otrzymuje się

$$\omega_R = \omega_I \frac{R}{2(R+r)}.$$

Ze względu na to, że  $\frac{R}{2(R+r)} = \text{const}$  dla każdej chwili  $t$ , przyspieszenie  $\epsilon_R$  obliczyć można jako pochodną  $\omega_R$  względem czasu, tzn.

$$\epsilon_R = \dot{\omega}_R = \dot{\omega}_I \frac{R}{2(R+r)} = \epsilon_I \frac{R}{2(R+r)}.$$

### Obliczenie przyspieszenia punktu $K$

W tym przypadku biegun przyjęto w punkcie  $A$  i równanie wektorowe przyspieszeń ma postać

$$\bar{a}_K = \bar{a}_A + \bar{a}_K^A.$$

Punkt  $A$  porusza się po okręgu o promieniu  $OA = R + r$ , a więc  $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$ , punkt  $K$  względem  $A$  porusza się po okręgu o promieniu  $KA = r$ , czyli

$$\bar{a}_K^A = \bar{a}_{K\tau}^A + \bar{a}_{Kn}^A \quad \text{i} \quad \bar{a}_K = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{K\tau}^A + \bar{a}_{Kn}^A.$$

Znając wyliczone uprzednio przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_R$  i prędkość kątową  $\omega_R$ , obliczono:

$$a_{A\tau} = \varepsilon_R \cdot OA = \frac{1}{2} \varepsilon_1 R, \quad a_{An} = \omega_R^2 \cdot OA = \omega_1^2 \frac{r^2}{4(R+r)}.$$

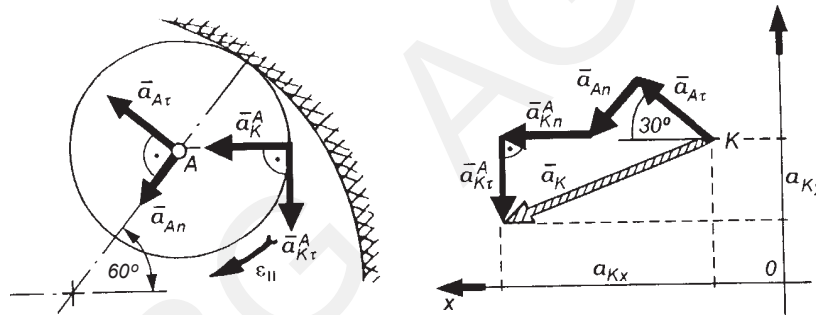
Znając prędkość kątową  $\omega_{II} = \omega_1 \frac{R}{2r}$ , obliczyć można przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_{II} = \dot{\omega}_{II} = \varepsilon_1 \frac{R}{2r}$ , a następnie przyspieszenie  $a_{K\tau}^A = \varepsilon_{II} \cdot AK = \frac{1}{2} \varepsilon_1 R$ ,  $a_{Kn}^A = \omega_{II}^2 \cdot AK = \omega_1^2 \frac{R^2}{4r}$ .

Wartość przyspieszenia  $\bar{a}_K$  wygodnie jest obliczyć, wyznaczając jego współrzędne w przyjętym układzie odniesienia, korzystając z rozkładu przyspieszeń w punkcie  $K$  (rys. 2.3.8c). Obliczając współrzędne:

$$a_{Kx} = a_{Kn}^A + a_{A\tau} \cos 30^\circ + a_{An} \cos 60^\circ,$$

$$a_{Ky} = -a_{K\tau}^A + a_{A\tau} \cos 60^\circ - a_{An} \cos 30^\circ,$$

a następnie  $a_K = \sqrt{a_{Kx}^2 + a_{Ky}^2}$ , otrzymano dla danych liczbowych wartość  $a_K = 0,67 \text{ m/s}^2$ .



Rys. 2.3.8c

### ZADANIE 2.3.9

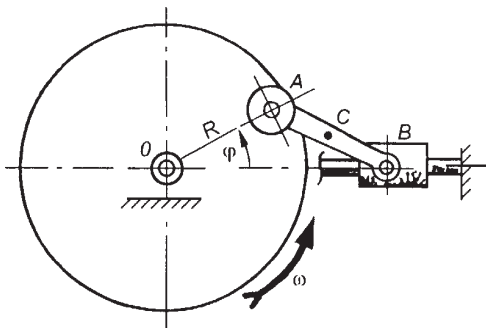
W mechanizmie korbowo-wodzikowym, jak na rysunku 2.3.9, dane są:  $OA = AB = R = 1 \text{ m}$ ,  $AC = CB$ ,  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$  jest stała. Obliczyć prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8} \text{ s}$ .

#### Rozwiązanie

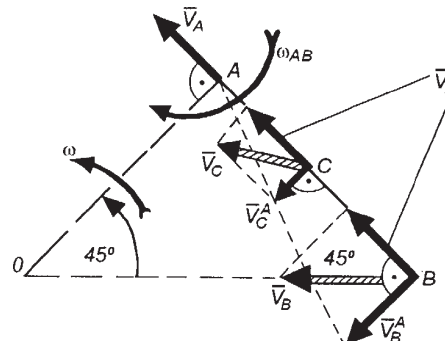
W mechanizmie tym koło napędowe spełniające rolę korby porusza się ruchem obrotowym, korbówód  $AB$  ruchem płaskim i suwak  $B$  ruchem postępowym. Prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  w ruchu płaskim korbowodu obliczono, traktując ruch płaski dwojako, jako:

- 1) ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia i obrotowego ruchu względnego,
- 2) ruch obrotowy chwilowy.





Rys. 2.3.9



Rys. 2.3.9a

**Ad 1)**

Przyjmując biegun w punkcie  $B$  można napisać równania wektorowe:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^A, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A,$$

gdzie:  $\vec{v}_C^A$  i  $\vec{v}_B^A$  są prędkościami w ruchu względnym względem bieguna  $A$ . Rozkład prędkości w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8}$  s pokazano na rysunku 2.3.9a, gdzie  $\varphi_1 = \omega t_1 = \frac{\pi}{4}$ .

Prędkość bieguna wyznaczono z zależności  $v_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot R$ , a prędkości  $v_C^A$  i  $v_B^A$  z zależności:

$$\frac{v_C^A}{AC} = \frac{v_B^A}{AB}, \quad v_B^A = \frac{v_A}{\operatorname{tg} 45^\circ}.$$

Wektory  $\vec{v}_A$  i  $\vec{v}_B^A$  są do siebie prostopadłe, więc

$$v_C = \sqrt{(v_A)^2 + (v_C^A)^2}.$$

Obliczając  $v_C^A = v_B^A \frac{AC}{AB} = v_A \frac{AC}{AB \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{1}{2} v_A$ , otrzymano

$$v_C = \frac{1}{2} v_A \sqrt{5} = \frac{1}{2} \omega R \sqrt{5}$$

i dla danych liczbowych  $v_C = 2,24$  m/s.

Znając prędkość  $v_C^A$ , można obliczyć prędkość kątową  $\omega_{AB}$  korbowodu

$$\omega_{AB} = \frac{v_C^A}{AC} = \frac{v_A}{2AC} = \omega.$$

Celem obliczenia przyspieszenia punktu  $C$  ułożono wektorowe równania przyspieszeń:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_C^A, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_B^A.$$

Uwzględniając, że  $\bar{a}_A = \bar{a}_{An}$  (przyspieszenie kątowe względem punktu  $O$   $\varepsilon = 0$   $a_{A\tau} = 0$ ,  $\bar{a}_C^A = \bar{a}_{C\tau}^A + \bar{a}_{Cn}^A$ ,  $\bar{a}_B^A = \bar{a}_{B\tau}^A + \bar{a}_{Bn}^A$  oraz że przyspieszenie  $\bar{a}_B$  leży stale na osi  $OB$ , otrzymuje się:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{C\tau}^A + \bar{a}_{Cn}^A,$$

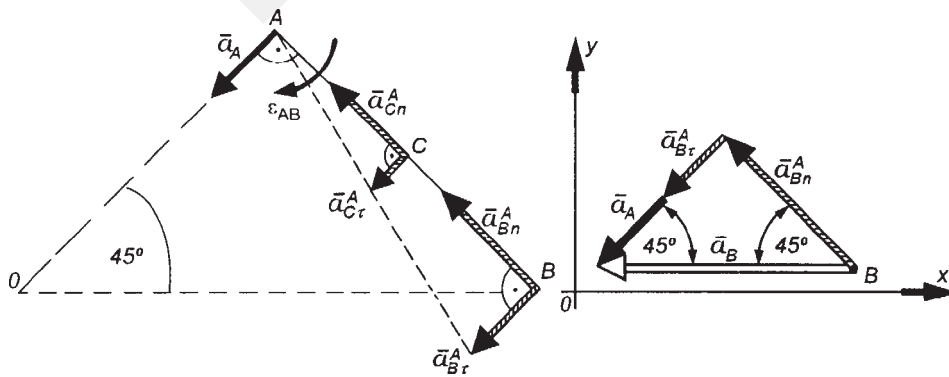
$$\bar{a}_B = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{B\tau}^A + \bar{a}_{Bn}^A.$$

Rzutuując drugie z równań na osie przyjętego układu odniesienia (rys. 2.3.9b), otrzymano dwa równania skalarne, odpowiadające położeniu mechanizmu w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8}$  s:

$$-a_B = -a_{An} \cos 45^\circ - a_{B\tau}^A \cos 45^\circ - a_{Bn}^A \cos 45^\circ,$$

$$0 = -a_{An} \sin 45^\circ - a_{B\tau}^A \sin 45^\circ + a_{Bn}^A \sin 45^\circ.$$

Podstawiając  $a_{An} = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 R$ ,  $a_{Bn}^A = \frac{(v_B^A)^2}{AB} = \frac{(v_A)^2}{R \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \omega^2 R$ , otrzymano  $a_{B\tau}^A = 0$ , tzn. że również przyspieszenie kątowe korbowodu względem punktu  $A$   $\varepsilon_{AB} = \frac{a_{B\tau}^A}{AB} = 0$  oraz przyspieszenie styczne punktu  $C$  względem punktu  $A$   $a_{C\tau}^A = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0$ .



Rys. 2.3.9b

Tak więc  $\bar{a}_C = \bar{a}_{An} + \bar{a}_{Cn}^A$ .

Wartość przyspieszenia  $\bar{a}_{An}$  jest znana, a  $a_{Cn}^A = \frac{(v_C^A)^2}{AC} = \frac{(v_A)^2}{4 \cdot AC} = \frac{1}{2} \omega^2 R$ .

Przyspieszenia  $\bar{a}_{An}$  i  $\bar{a}_{Cn}^A$  są prostopadłe, więc

$$a_C = \sqrt{(a_{An})^2 + (a_{Cn}^A)^2} = \frac{1}{2} \omega^2 R \sqrt{5}$$

i dla danych liczbowych  $a_C = 4,47 \text{ m/s}^2$ .

### Ad 2)

Prędkość punktu  $C$  wyznaczono, znajdując chwilowy środek prędkości  $H$  dla położenia mechanizmu w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8}$  s. Punkt  $H$  jest punktem przecięcia się prostopadłych do prędkości  $\bar{v}_A$  i  $\bar{v}_B$  (rys. 2.3.9c), a prędkość punktu  $C$  jest prostopadła do odcinka  $CH$ . Prędkość  $\omega = \text{const}$ , a w związku z tym  $\varphi = \omega \cdot t$  i w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{8}$  kąt  $\varphi = \varphi_1 = 45^\circ$ .

Prędkość punktu  $C$  obliczyć można z zależności  $v_C = \omega_{AB} \cdot CH$ , gdzie  $\omega_{AB}$  jest prędkością kątową chwilową korbowodu  $AB$ . Obliczono ją, wyznaczając prędkość  $v_A$  względem punktu  $O$  i względem punktu  $H$ , tzn.  $v_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot R$  i  $v_A = \omega_{AB} \cdot AH = \omega_{AB} AB \text{ tg } 45^\circ = \omega_{AB} \cdot R$ .

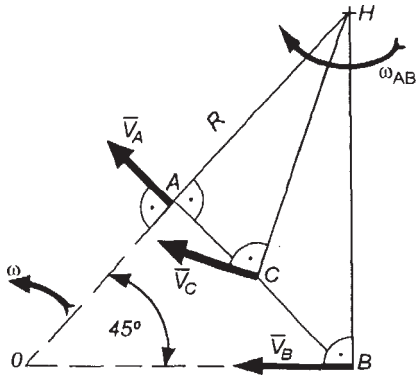
Porównując tak wyznaczoną prędkość  $v_A$  otrzymano  $\omega_{AB} = \omega$ . Obliczając  $CH = \sqrt{AH^2 + AC^2} = \frac{1}{2} R \sqrt{5}$ , wyznaczono  $v_C = \frac{1}{2} \omega R \sqrt{5}$ , a dla danych liczbowych  $v_C = 2,24 \text{ m/s}$ .

Przyspieszenie punktu  $C$  obliczono, wyznaczając chwilowy środek przyspieszeń względem punktu  $A$  o znanym przyspieszeniu. Przyspieszenie punktu  $A$  jest równe  $a_A = a_{An} = \omega^2 R$ , ponieważ przyspieszenie kątowe względem punktu  $O$  jest równe zero. Odległość chwilowego środka przyspieszeń  $D$  od punktu  $A$  obliczyć można z zależności

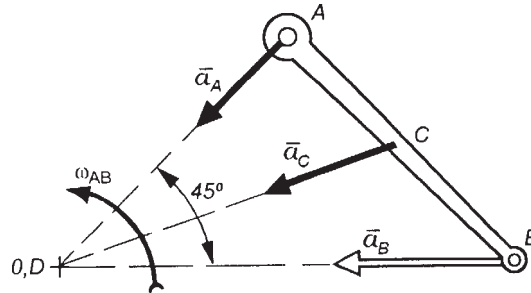
$$AD = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}},$$

a kąt odchylenia prostej, na której leży punkt  $D$ , od przyspieszenia  $\bar{a}_A$  ze wzoru

$$\text{tg } \alpha = \frac{\epsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2}.$$



Rys. 2.3.9c



Rys. 2.3.9d

W rozpatrywanym przypadku nie ma innej możliwości obliczenia prędkości  $\omega_{AB}$  i przyspieszenia  $\epsilon_{AB}$  niż w sposób podany w punkcie a). Znając  $\epsilon_{AB} = 0$ ,  $\omega_{AB} = \omega$ , otrzymuje się  $\alpha = 0$ ,  $AD = R$ . Chwilowy środek przyspieszeń leży więc na kierunku  $OA$  w odległości  $R$  od punktu  $A$  i pokrywa się z punktem  $O$  (rys. 2.3.9d). Przyspieszenia punktu  $C$  względem punktu  $D$  oblicza się z zależności:

$$a_C = \sqrt{(a_{C\tau}^D)^2 + (a_{Cn}^D)^2} = a_{Cn}^D, \quad (a_{C\tau}^D = \epsilon_{AB} \cdot CD = 0),$$

$$\text{gdzie } a_{Cn}^D = \omega_{AB}^2 \cdot CD = \omega_{AB}^2 \cdot \sqrt{(OA)^2 + (AC)^2} = \frac{1}{2} \omega^2 R \sqrt{5}.$$

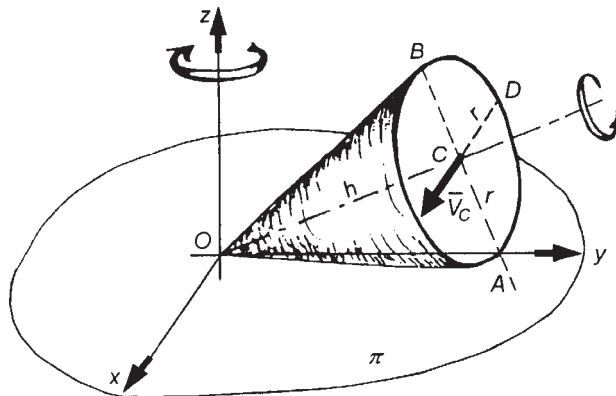
Dla danych liczbowych  $a_C = 4,47 \text{ m/s}^2$ .

Nadmienić należy, że prędkość i przyspieszenie punktu  $C$  obliczyć można, wykorzystując równania skończone ruchu punktu  $C$ , co zostało zrobione w zadaniu 2.2.4.

### 2.3.3. Ruch kulisty

#### ZADANIE 2.3.10

Stożek o podstawie kołowej o promieniu  $r$  i wysokości  $h$  przetacza się po płaszczyźnie  $\Pi$  bez poślizgu (rys. 2.3.10). Prędkość punktu  $C$  jest stała co do wartości, linia  $CD$  jest równoległa do płaszczyzny  $\Pi$ . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktów  $B$  i  $D$ .



Rys. 2.3.10

**Rozwiązanie**

Stożek porusza się ruchem kulistym, przy czym punktem kulistym (nieruchomym) jest punkt  $O$ . Zadanie rozwiązano dwiema metodami:

- 1) traktując ruch kulisty jako ruch chwilowy obrotowy,
- 2) metodą analityczną.

**Ad 1)**

Prosta  $OA$  jest linią styczności poboczniczy stożka z płaszczyzną  $\Pi$  i w czasie ruchu stożka chwilowe prędkości punktów prostej  $OA$  są równe zero. Prosta  $OA$  jest więc osią chwilowego obrotu  $\Omega$  (rys. 2.3.10a). Oznaczając prędkość kątową chwilową przez  $\bar{\omega}$  można napisać, że:  $v_B = \omega \cdot BB_1$ ,  $v_D = \omega \cdot C_1D$ .

Znając wartość  $\bar{v}_C$ , wyznaczyć można prędkość kątową  $\omega$  z zależności  $\omega = \frac{v_C}{CC_1}$ .

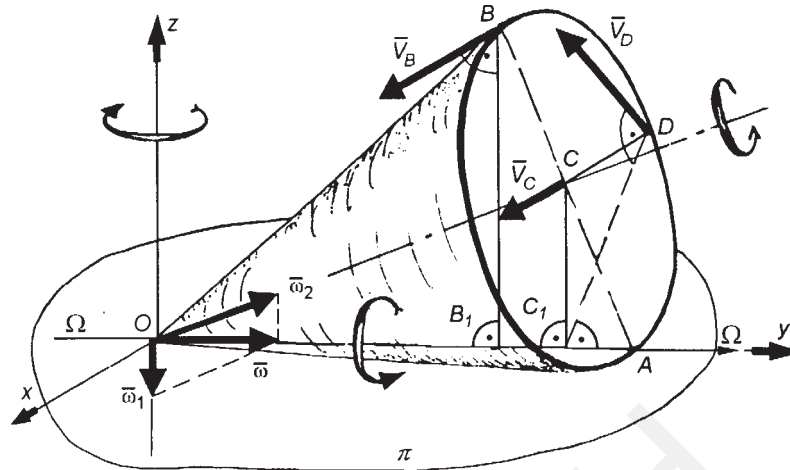
Korzystając z proporcji  $\frac{OC}{OA} = \frac{CC_1}{CA}$  wyznaczono

$$CC_1 = \frac{OC \cdot CA}{OA} = \frac{h \cdot r}{\sqrt{h^2 + r^2}},$$

a następnie obliczono

$$BB_1 = 2CC_1 = 2 \frac{h \cdot r}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

$$i \quad C_1D = \sqrt{(CC_1)^2 + (CD)^2} = \sqrt{(CC_1)^2 + r^2} = r \sqrt{\frac{2h^2 + r^2}{h^2 + r^2}}.$$



Rys. 2.3.10a

Podstawiając  $\omega = \frac{v_C}{CC_1} = v_C \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{hr}$  i obliczone wartości  $BB_1$  i  $C_1D$ , otrzymano:

$$v_B = 2v_C, \quad v_D = v_C \sqrt{2 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}.$$

Wyznaczając chwilową oś przyspieszeń  $E$  i przyspieszenie kątowe  $\epsilon$  stożka, można wyznaczyć przyspieszenia punktów  $B$  i  $D$ .

Wektor prędkości kątowej  $\bar{\omega}$  ma stałą wartość i obraca się z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$  w czasie przetaczania się stożka po płaszczyźnie  $\Pi$  (rys. 2.3.10a). Można więc zapisać, że  $\bar{\epsilon} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}$ , a więc wektor  $\bar{\epsilon}$  jest prostopadły do  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}$ , tym samym oś  $E$  jest prostopadła do osi  $\Omega$  i  $z$  (pokrywa się z osią  $x$ ). Wartość prędkości  $\bar{\omega}_1$  wyliczyć można albo z rozkładu wektora  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ , albo obliczając wartość prędkości  $\bar{v}_C$  względem osi  $z$ ,

$$\text{tj. } v_C = \omega_1 \cdot OC_1 \text{ i } \omega_1 = \frac{v_C}{OC_1} = v_C \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h^2}.$$

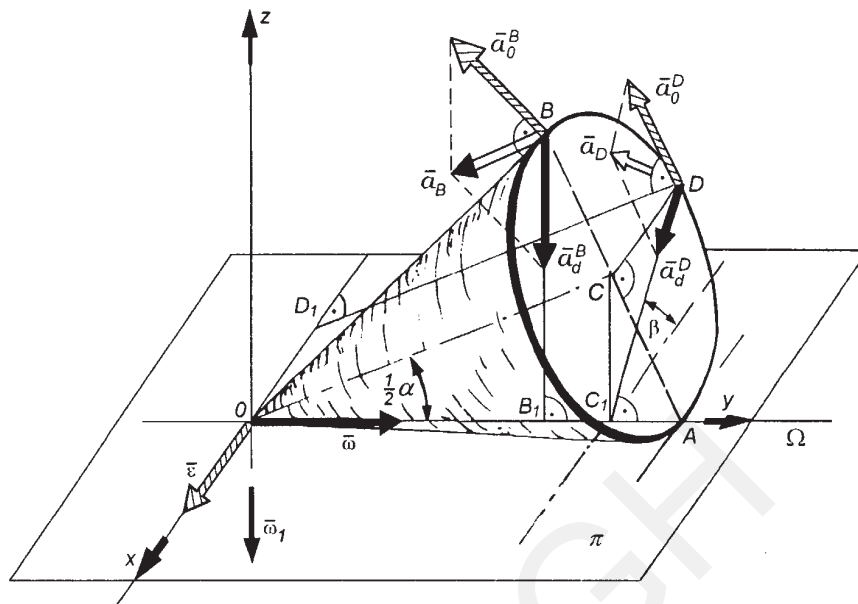
$$\text{Wartość przyspieszenia } \bar{\epsilon} \text{ wynosi } \epsilon = \omega_1 \omega \sin 90^\circ = v_C^2 \frac{h^2 + r^2}{rh^3}.$$

Składowe przyspieszenia punktu  $B$  wynoszą:

$$\text{składowa obrotowa } a_0^B = \epsilon \cdot OB = v_C^2 \frac{h^2 + r^2}{rh^3} \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$\text{składowa doosiowa } a_d^B = \omega^2 \cdot BB_1 = 2v_C^2 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{rh^3}.$$

Rozkład przyspieszeń w punkcie  $B$  pokazano na rysunku 2.3.10b.



Rys. 2.3.10b

Oznaczając kąt stożka przez  $\alpha$ , otrzymuje się

$$a_B = \sqrt{(a_0^B)^2 + (a_d^B)^2 - 2a_0^B a_d^B \cos \alpha}.$$

Obliczając  $\cos \alpha = \frac{OB_1}{OB} = \frac{h^2 - r^2}{h^2 + r^2}$  i dokonując podstawień, otrzymano

$$a_B = v_C^2 \frac{\sqrt{4h^2 r^2 (h^2 + r^2) + (h^2 + r^2)^3}}{rh^3}.$$

Składowe przyspieszenia punktu  $D$  wynoszą:

$$a_0^D = \varepsilon \cdot DD_1 = v_C^2 \frac{h^2 + r^2}{rh^2}, \quad DD_1 = OC = h,$$

$$a_d^D = \omega^2 \cdot C_1 D = v_C^2 \frac{\sqrt{(h^2 + r^2)(2h^2 + r^2)}}{rh^2}.$$

Ze względu na to, że istotną trudność sprawia wyznaczenie kąta pomiędzy tymi składowymi, wartość przyspieszenia  $\bar{a}_D$  obliczyć można, wyznaczając współrzędne:

$$a_{Dx} = a_d^D \cos \beta,$$

$$a_{Dy} = -a \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$a_{Dz} = -a_d^D \sin \beta + a_0^D \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{gdzie: } \cos \beta = \frac{CD}{C_1D} = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{\sqrt{2h^2 + r^2}}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{BC}{OB} = \frac{r}{h^2 + r^2} \sqrt{h^2 + r^2}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Po podstawieniu danych otrzymano

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2 + a_{Dz}^2} = v_C^2 \frac{\sqrt{h^2 + r^2(3h^2 + 2r^2)}}{h^2 r}.$$

### Ad 2)

W obliczeniach analitycznych prędkości i przyspieszeń korzysta się z gotowych równań:

$$v_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y,$$

$$v_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z,$$

$$v_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x,$$

$$a_x = \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y + \omega_x(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) - \omega^2 \cdot x,$$

$$a_y = \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z + \omega_y(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) - \omega^2 \cdot y,$$

$$a_z = \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x + \omega_z(\omega_x \cdot x + \omega_y \cdot y + \omega_z \cdot z) - \omega^2 \cdot z.$$

Znając współrzędne rozpatrywanego punktu, współrzędne prędkości i przyspieszenia kąowego oraz wartość prędkości kąowej, z powyższych równań można wyznaczyć współrzędne prędkości i przyspieszenia liniowego w zależności od czasu lub w zadanym położeniu.



W rozpatrywanym przypadku, obliczeń dokonano dla punktu  $B$ . Dla rozpatrywanego położenia punktu  $B$  określono:

$$x_B = 0, \quad y_B = \frac{h^2 - r^2}{h^2 + r^2} \sqrt{h^2 + r^2}, \quad z_B = \frac{2rh}{h^2 + r^2} \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega, \quad \omega_z = 0, \quad \omega = v_C \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{rh},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon = v_C^2 \frac{h^2 + r^2}{rh^3},$$

a następnie obliczono:

$$v_{Bx} = \omega z_B, \quad v_{By} = 0, \quad v_{Bz} = 0, \quad v_B = 2v_C,$$

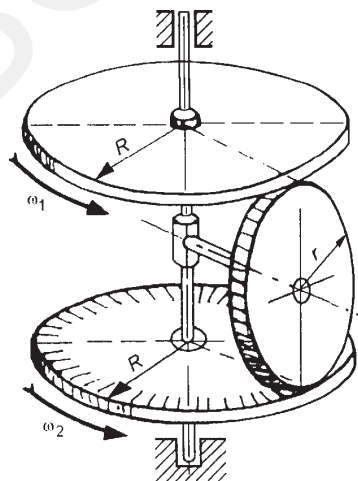
$$a_{Bx} = 0, \quad a_{By} = -2v_C \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h^2}, \quad a_{Bz} = -v_C^2 \frac{h^2 + r^2}{rh^3} \sqrt{h^2 + r^2},$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2}.$$

Postępując analogicznie, obliczyć można prędkość i przyspieszenie punktu  $D$ .

### ZADANIE 2.3.11

W mechanizmie różnicowym napędzane są dwie tarcze z prędkościami kątowymi  $\omega_1 = 3 \text{ s}^{-1}$  i  $\omega_2 = 1 \text{ s}^{-1}$  (rys. 2.3.11). Koło satelitarne o poziomej osi obrotu przetacza się na skutek różnicy prędkości kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Mając dane promienie  $r = 0,5 \text{ m}$ ,  $R = 1 \text{ m}$  obliczyć prędkość kątową satelity względem osi własnej oraz prędkość i przyspieszenie kątowe satelity.



Rys. 2.3.11

### Rozwiązanie

Koło satelitarne porusza się ruchem kulistym, którego punkt kulisty znajduje się w punkcie  $O$ . Pozostałe punkty satelity pozostają podczas ruchu w tej samej odległości od punktu  $O$ , a tarcze i oś satelity poruszają się ruchami obrotowymi dookoła osi pionowej. Położenie chwilowej osi obrotu satelity zależy od wartości prędkości kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , przy czym leży ona w przestrzeni poza rzeczywistymi punktami satelity (rys. 2.3.11a).

Znając  $\omega_1$  i  $\omega_2$  obliczyć można prędkości punktów  $A$  i  $B$ :

$$v_A = \omega_1 \cdot R, \quad v_B = \omega_2 \cdot R.$$

Z drugiej strony, prędkości te policzyć można względem chwilowej osi obrotu  $\Omega$ :

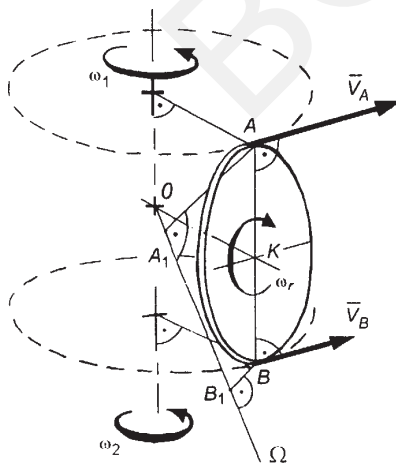
$$v_A = \omega \cdot AA_1, \quad v_B = \omega \cdot BB_1, \quad \omega - \text{prędkość chwilowa satelity.}$$

Z zależności tych wynika proporcja  $\frac{v_B}{v_A} = \frac{BB_1}{AA_1}$ , przy czym  $AA_1 = KK_1 + r \sin \alpha$ ,  $BB_1 = KK_1 - r \sin \alpha$ ,  $KK_1 = R \cos \alpha$ .

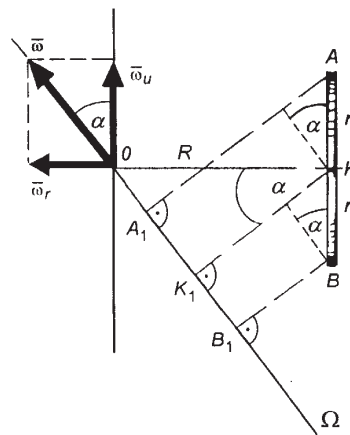
Położenie chwilowej osi obrotu  $\Omega$  (rys. 2.3.11b) określa kąt obliczony z powyższych związków

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{r} \cdot \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Wyznaczając  $\omega = \frac{v_B}{BB_1} = \frac{\omega_2 \cdot R}{R \cos \alpha - r \sin \alpha}$  i obliczając dla danych liczbowych  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ , otrzymano wartość prędkości kątowej chwilowej koła satelitarnego  $\omega = 2\sqrt{2}\text{s}^{-1}$ . Wektor  $\vec{\omega}$  rozkłada się na  $\vec{\omega}_r$  i  $\vec{\omega}_u$  (rys. 2.3.11b).



Rys. 2.3.11a



Rys. 2.3.11b

Prędkość kątową  $\omega_r$  satelity względem osi własnej obliczyć można ze wzoru  $\omega_r = \omega \sin \alpha$  i po podstawieniu danych otrzymuje się  $\omega_r = 2 \text{ s}^{-1}$ .

Wartości prędkości kątowych  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są stałe, więc i kąt  $\alpha$  nie zmienia się, tak więc stała jest też wartość prędkości  $\bar{\omega}$ . Wobec tego przyspieszenie kątowe  $\bar{\varepsilon}$  wynika tylko ze zmiany kierunku wektora  $\bar{\omega}$  i jest prostopadłe do  $\bar{\omega}_u$  i  $\bar{\omega}$  zgodnie z równaniem  $\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_u \times \bar{\omega}$ , wartość  $\omega_u = \omega \cos \alpha$ . Wartość przyspieszenia  $\bar{\varepsilon}$  wynosi

$$\varepsilon = \omega_u \cdot \omega \cdot \sin \alpha = \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = (2\sqrt{2})^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \text{ s}^{-2}.$$

### ZADANIE 2.3.12

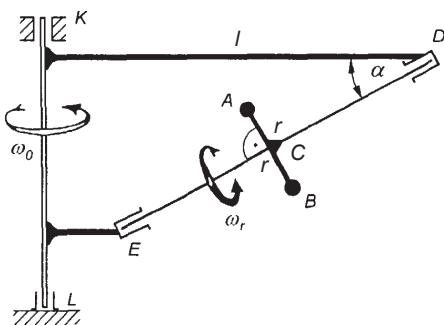
Pręt  $AB$  obraca się wokół własnej osi  $ED$  z prędkością  $\omega_r = 2 \text{ s}^{-1}$  i równocześnie razem z ramką względem osi pionowej  $KL$  z prędkością kątową  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  (rys. 2.3.12). Mając dane  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $CD = 0,5 \text{ m}$ , obliczyć prędkość i przyspieszenie punktów  $A$  i  $B$ .

### Rozwiązanie

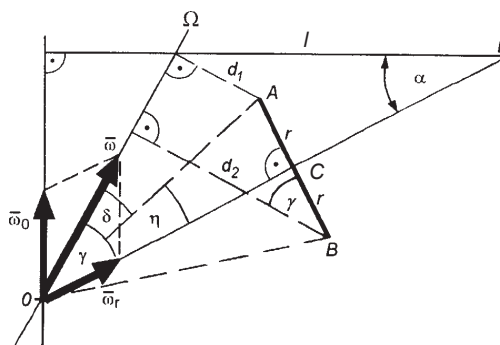
Pręt  $AB$  porusza się ruchem kulistym, a punkt  $C$  porusza się po okręgu względem osi  $KL$  w wyniku ruchu obrotowego ramki. Prędkość kątową chwilową oraz kierunek chwilowej osi obrotu  $\Omega$  wyznaczyć można, składając wektory  $\bar{\omega}_r$  i  $\bar{\omega}_0$  (rys. 2.3.12a):

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_r,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2 + 2\omega_0\omega_r \cos(90 - \alpha)}.$$



Rys. 2.3.12



Rys. 2.3.12a

Prędkości punktów  $A$  i  $B$  wyznaczono względem chwilowej osi obrotu z zależności:

$$v_A = \omega \cdot d_1, \quad v_B = \omega \cdot d_2.$$

Odległości  $d_1$  i  $d_2$  obliczyć można następująco (rys. 2.3.12a)

$$d_1 = OA \sin \delta, \quad d_2 = d_1 + 2r \cos \gamma,$$

$$OA = \sqrt{OC^2 + AC^2}, \quad OC = OD - CD = \frac{l}{\cos \alpha} - CD, \quad AC = r,$$

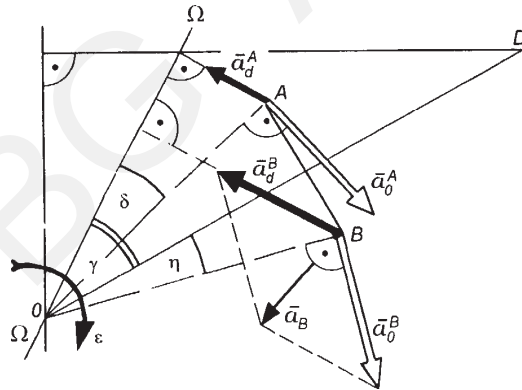
$$\frac{\omega_0}{\sin \gamma} = \frac{\omega}{\sin(90 + \alpha)}, \quad \sin \gamma = \frac{\omega_0}{\omega} \cos \alpha, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2 \cos^2 \alpha},$$

$$\delta = \gamma - \eta, \quad \sin \delta = \sin \gamma \cos \eta - \cos \gamma \sin \eta, \quad \sin \eta = \frac{AC}{OA}, \quad \cos \eta = \frac{1}{OA} \sqrt{OA^2 + AC^2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$d_1 = 2 \text{ cm}, \quad d_2 = 40,36 \text{ cm}, \quad \omega = 2,64 \text{ s}^{-1}, \quad v_A = 6,86 \text{ cm/s}, \quad v_B = 106,55 \text{ cm/s}.$$

Wartość prędkości  $\bar{\omega}$  jest stała i w związku z tym przyspieszenie kątowe  $\bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_r$ , a jego wartość jest równa  $\varepsilon = \omega_0 \omega_r \sin(90 - \alpha) = 1,73 \text{ s}^{-2}$ . Prosta przyspieszenia  $\bar{\varepsilon}$  jest prostopadła do wektorów  $\bar{\omega}_0$  i  $\bar{\omega}_r$  i przechodzi przez punkt kulisty  $O$  (rys. 2.3.12b).



Rys. 2.3.12b

Przyspieszenia liniowe punktów  $A$  i  $B$  równe są sumom geometrycznym przyspieszeń doosiowych i obrotowych:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_d^A + \bar{a}_o^A, \quad \text{kąt}(\bar{a}_d^A, \bar{a}_o^A) = 180^\circ - \delta,$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_d^B + \bar{a}_o^B, \quad \text{kąt}(\bar{a}_d^B, \bar{a}_o^B) = 180^\circ - (\gamma + \eta).$$

Wartości poszczególnych składowych wynoszą:

$$a_d^A = \omega^2 \cdot d_1 = 7 \cdot 2,6 = 18,2 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_o^A = \varepsilon \cdot OA = 1,73 \cdot 68,58 = 118,6 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_d^B = \omega^2 \cdot d_2 = 7 \cdot 40,36 = 281,3 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_o^B = \varepsilon \cdot OB = \varepsilon \cdot OA = a_o^A = 118,6 \text{ cm/s}^2,$$

Wartości przyspieszeń  $\bar{a}_A$  i  $\bar{a}_B$  równe są:

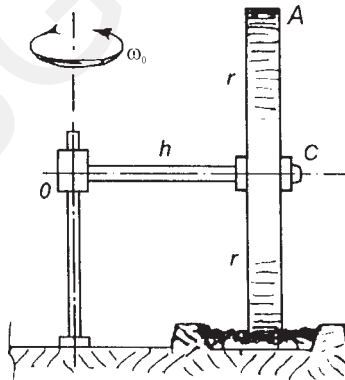
$$a_A = \sqrt{(a_o^A)^2 + (a_d^A)^2 - 2(a_o^A)(a_d^A)\cos\delta},$$

$$a_B = \sqrt{(a_o^B)^2 + (a_d^B)^2 - 2(a_o^B)(a_d^B)\cos(\gamma + \eta)}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:  $a_A = 136,6 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_B = 198,4 \text{ cm/s}^2$ .

### ZADANIE 2.3.13

Walec kruszarki toczy się po bieżni bez poślizgu z prędkością kątową  $\omega_0 = 0,5 t$  względem osi pionowej ( $\omega_0 [\text{s}^{-1}]$ ,  $t [\text{s}]$ ) (rys. 2.3.13). Dla danych  $OC = h = 1 \text{ m}$ ,  $r = 0,5 \text{ m}$  obliczyć przyspieszenie najwyżej położonego punktu  $A$  walca.



Rys. 2.3.13

### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano dwoma sposobami:

- 1) wykorzystując wektorowy rozkład przyspieszeń,
- 2) metodą analityczną.

**Ad 1)**

Przyspieszenie punktu  $A$  walca oblicza się jako sumę geometryczną przyspieszenia doosiowego i obrotowego

$$\bar{a}_A = \bar{a}_d + \bar{a}_o,$$

przy czym

$$\bar{a}_d = \bar{\omega} \times \bar{v}_A = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OA}), \quad \bar{a}_o = \bar{\varepsilon} \times \overline{OA} = (\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2) \times \overline{OA} = \bar{a}_{o1} + \bar{a}_{o2},$$

gdzie:

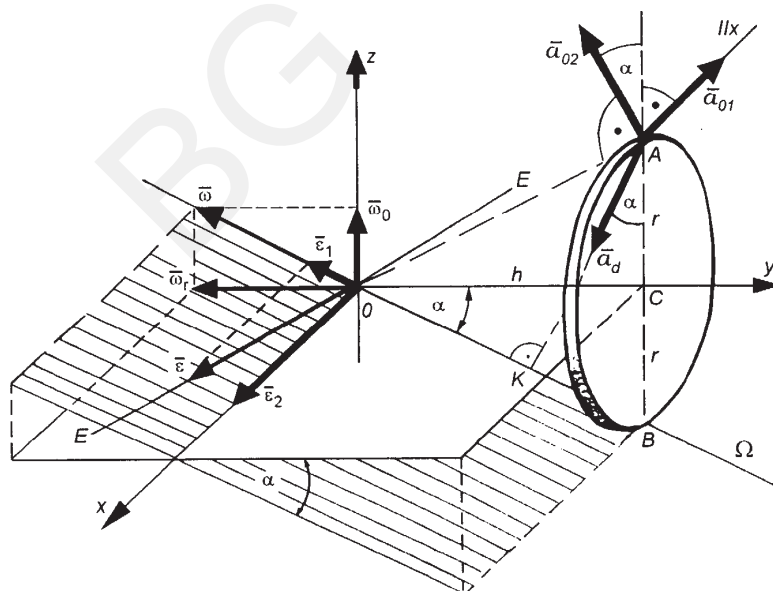
$\bar{\omega}$  – wektor chwilowej prędkości kątowej względem osi chwilowej  $\Omega$ ,

$\bar{\varepsilon}$  – wektor chwilowego przyspieszenia kątowego względem osi chwilowej  $E$ ,

składowe  $\bar{\varepsilon}_1$  i  $\bar{\varepsilon}_2$  wynikają ze zmiany wartości i kierunku prędkości  $\bar{\omega}$ , co oznacza, że przyspieszenie obrotowe  $\bar{a}_o$  punktu  $A$  można rozłożyć na dwie składowe  $\bar{a}_{o1}$  i  $\bar{a}_{o2}$ . Pierwsza jest prostopadła do osi  $\Omega$ , a druga do wektora  $\bar{\varepsilon}_2$ .

Wyznaczyć więc należy prędkość  $\bar{\omega}$  i przyspieszenie  $\bar{\varepsilon}$  oraz położenie osi chwilowych  $\Omega$  i  $E$ . Oś  $\Omega$  chwilowego obrotu przechodzi przez punkt kulisty  $O$  i punkt  $B$  (rys. 2.3.13a). Z rozkładu prędkości

$\bar{\omega}$  wynika, że  $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{r}{OB} = \sin \alpha$ , a więc  $\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}$  i jest funkcją czasu, ponieważ funkcją czasu jest prędkość  $\omega_0$ .



Rys. 2.3.13a

Składowe przyspieszenia  $\bar{\varepsilon}$  są równe:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\tau}_0 \frac{d\omega}{dt}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \bar{\omega}_0 \times \bar{\omega} \quad (\bar{\tau}_0 \text{ wersor osi } \Omega), \quad \text{przy czym } \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2,$$

a ich wartości wynoszą:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_0 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r}, \quad \varepsilon_2 = \omega_0 \omega \sin(90 - \alpha) = \omega_0^2 \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{r} \cos \alpha = \omega_0^2 \frac{h}{r}.$$

Rozkład przyspieszeń  $\bar{\varepsilon}_1$  i  $\bar{\varepsilon}_2$  oraz położenie chwilowej osi  $E$  pokazano na rysunku 2.3.13a. Przyspieszenie  $\bar{\varepsilon}_2$  jest prostopadłe do wektorów  $\bar{\omega}_0$  i  $\bar{\omega}$ .

Wartość przyspieszenia doosiowego wynosi:

$$a_d = \omega^2 \cdot AK = \omega^2 \cdot AB \cos \alpha = \omega^2 \cdot 2r \cos \alpha = 2\omega_0^2 \frac{h}{r} \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Wartości składowych  $\bar{a}_{01}$  i  $\bar{a}_{02}$  przyspieszenia obrotowego  $\bar{a}_o$  wynoszą:

$$a_{01} = \varepsilon_1 \cdot OA \cdot \sin(180 - 2\alpha) = \varepsilon_1 \cdot AK = 2h\dot{\omega}_0,$$

$$a_{02} = \varepsilon_2 \cdot OA \cdot \sin 90^\circ = \omega_0^2 \frac{h}{r} \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Zatem przyspieszenie punktu  $A$  zapisać można jako sumę

$$\bar{a}_A = \bar{a}_d + \bar{a}_{01} + \bar{a}_{02}.$$

Wartość przyspieszenia  $\bar{a}_A$  obliczyć można, wyznaczając jego współrzędne:

$$a_x = -a_{01},$$

$$a_y = -(a_d + a_{02}) \sin \alpha,$$

$$a_z = (a_{02} - a_d) \cos \alpha, \quad \sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Dla danych liczbowych otrzymano:

$$a_{01} = 1 \text{ m/s}^2, \quad a_{02} = 0,56 \text{ t}^2 \text{ m/s}^2, \quad a_d = 1,12 \text{ t}^2 \text{ m/s}^2,$$

$$\sin \alpha = 0,4472, \quad \cos \alpha = 0,8944$$

oraz

$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + [(-1,68 \cdot 0,4472)^2 + (-0,56 \cdot 0,8944)^2]} t^2 = \\ &= \sqrt{1 + 0,81 t^4} \text{ [m/s}^2\text{]}. \end{aligned}$$

**Ad 2)**

W tym przypadku korzysta się bezpośrednio z wzorów określających współrzędne przyspieszenia, tzn.:

$$a_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x,$$

$$a_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y,$$

$$a_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z.$$

Dla punktu  $A$ :

$$x = 0, \quad y = h, \quad z = r,$$

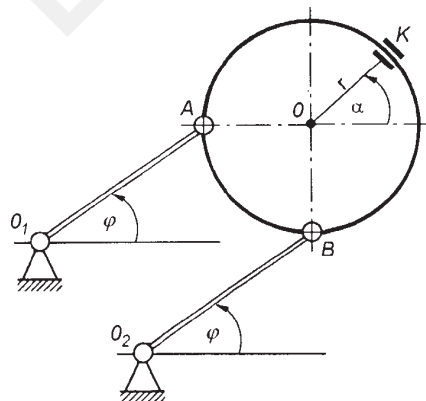
$$\varepsilon_x = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_y = -\varepsilon_1 \cos \alpha, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_1 \sin \alpha,$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = -\omega_r, \quad \omega_z = \omega_0 \quad \text{oraz} \quad \omega^2 = \omega_r^2 + \omega_0^2.$$

Dokonując obliczeń wartości  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\omega_r$ ,  $\sin \alpha$  i  $\cos \alpha$  jak w przypadku 1), otrzymano ostatecznie, z zależności  $a_A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  wartość przyspieszenia punktu  $A$   $a_A = \sqrt{1 + 0,81 t^4}$  [m/s<sup>2</sup>].

**2.4. Ruch złożony punktu****ZADANIE 2.4.1**

Punkt  $K$  porusza się wg równania  $\alpha = \frac{\pi}{4} \sin t$  po obwodzie ruchomej tarczy o promieniu  $r = 1$  m (rys. 2.4.1). Tarcza porusza się na skutek oddziaływania na nią przez przeguby  $A$  i  $B$  dwóch równoległych korb napędowych  $O_1A$  i  $O_2B$  o długościach  $R = 1$  m. Ruch każdej korby określa równanie  $\varphi = \frac{1}{3} t$  rad. Obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne punktu  $K$  w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  s.



Rys. 2.4.1



**Rozwiązanie**

Korby  $O_1A$  i  $O_2B$  poruszają się ruchem obrotowym odpowiednio względem osi obrotów w punkcie  $O_1$  i  $O_2$ , natomiast tarcza porusza się ruchem postępowym (dowolny odcinek, np. odcinek  $OA$ , przemieszcza się stale równolegle) krzywoliniowym. Ruch punktu  $K$  względem tarczy jest ruchem względnym, a ruch punktu  $K$  związanego sztywnie z tarczą („śladu”  $K_T$  punktu  $K$  na tarczy) i poruszającego się razem z tarczą jest ruchem unoszenia. Ruch względny jest ruchem po okręgu, a ruch unoszenia jest ruchem postępowym. Prędkość bezwzględna punktu  $K$  jest sumą geometryczną prędkości unoszenia i względnej

$$\bar{v}_K = \bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w.$$

Ruch względny rozpatruje się tylko jako ruch względem tarczy, tzn. nie uwzględnia się chwilowo ruchu samej tarczy i w związku z tym prędkość względna równa jest

$$v_w = \omega_w r = \dot{\alpha} r = \frac{\pi}{4} r \cos t,$$

a w chwili

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad v_w(t_1) = 0.$$

Prędkość unoszenia rozpatruje się jako prędkość  $\bar{v}_{KT}$  śladu  $K_T$  punktu  $K$ , tj. punktu sztywnie związanego z tarczą. Ruch unoszenia jest ruchem postępowym i w związku z tym  $\bar{v}_u = \bar{v}_{KT} = \bar{v}_A = \bar{v}_B$  (rys. 2.4.1a). Wartość prędkości unoszenia obliczyć można wyznaczając wartość prędkości punktu  $A$ :  $v_u = v_A = \omega_{01} R = \dot{\phi} R = \frac{1}{3} R = 0,33$  m/s.

Ponieważ  $\bar{v}_w = 0$  w chwili  $t_1$ , więc  $|\bar{v}_K| = |\bar{v}_b| = |\bar{v}_u| = 0,33$  m/s dla  $t = t_1$ .

Przyspieszenie punktu  $K$  wyznaczono na podstawie rozkładu przyspieszeń w ruchu złożonym

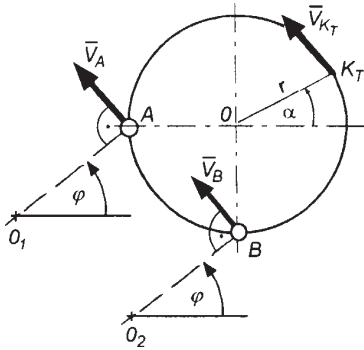
$$\bar{a}_K = \bar{a}_b = \bar{a}_u + \bar{a}_w + \bar{a}_{\text{cor}},$$

gdzie  $\bar{a}_{\text{cor}} = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w$  jest przyspieszeniem Coriolisa. Ruch unoszenia jest ruchem postępowym i w związku z tym prędkość kątowna unoszenia  $\bar{\omega}_u = 0$  i przyspieszenie Coriolisa  $\bar{a}_{\text{cor}} = 0$ .

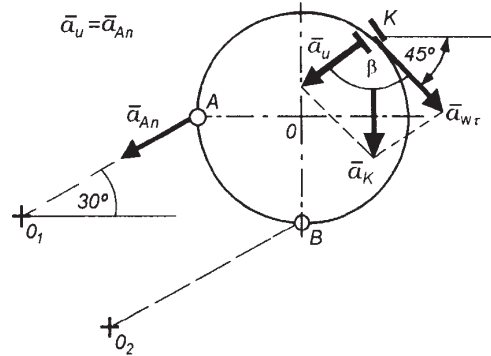
Przyspieszenie unoszenia jest równe przyspieszeniu punktu  $K_T$ , tj.

$$\bar{a}_u = \bar{a}_{KT} = \bar{a}_{KT}^{\tau} + \bar{a}_{KT}^n = \bar{a}_{u\tau} + \bar{a}_{un},$$

przy czym  $\bar{a}_u = \bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$ .



Rys. 2.4.1.a



Rys. 2.4.1b

Przyspieszenie względne punktu  $K$  względem punktu  $0$  równe jest

$$\bar{a}_w = \bar{a}_{w\tau} + \bar{a}_{wn}.$$

Obliczając:

$$a_{u\tau} = a_{A\tau} = \varepsilon_{01}R = \dot{\varphi}R = 0,$$

$$a_{un} = a_{An} = \omega_{01}^2 R = \dot{\varphi}^2 R = \frac{1}{9}R = 0,11 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{w\tau} = \varepsilon_w r = \ddot{\alpha} r = -\frac{\pi}{4} r \sin t,$$

$$a_{wn} = \omega_w^2 r = \dot{\alpha}^2 r = \frac{\pi^2}{16} r \cos^2 t,$$

otrzymuje się w chwili  $t_1 = \frac{\pi}{2}$  s:

$$a_{u\tau} = a_{A\tau} = 0, \quad a_{un} = a_{An} = 0,11 \text{ m/s}^2,$$

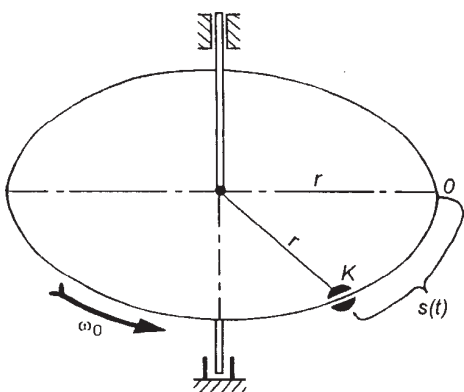
$$a_{w\tau} = -\frac{\pi}{4} r = -\frac{\pi}{4} \text{ m/s}^2, \quad a_{wn} = 0 \quad \text{oraz} \quad \beta(t_1) = 180^\circ - [\alpha(t_1) + \varphi(t_1)] = 105^\circ.$$

Rozkład przyspieszeń pokazano na rysunku 2.4.1b. Wartość przyspieszenia punktu  $K$  w chwili  $t_1$  wynosi:

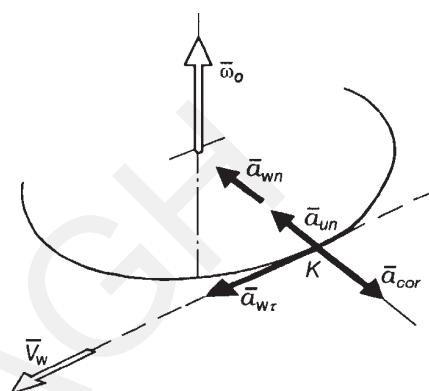
$$a_K = a_b = \sqrt{a_{un}^2 + a_{w\tau}^2 + 2a_{un} \cdot a_{w\tau} \cos \beta} = 0,83 \text{ m/s}^2.$$

**ZADANIE 2.4.2**

Punkt  $K$  porusza się po tarczy zgodnie z równaniem  $s = \frac{1}{3}t^3$  [m], tarcza zaś o promieniu  $r = 1$  m obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  względem osi pionowej (rys. 2.4.2). Obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne  $\vec{v}_b$  i  $\vec{a}_b$  punktu  $K$  w chwili  $t_1 = 2$  s.



Rys. 2.4.2



Rys. 2.4.2a

**Rozwiązanie**

Ruch względny punktu  $K$  jest ruchem po okręgu o promieniu  $r$  względem środka tarczy. Ruch unoszenia jest ruchem punktu  $K$  sztywnie związanego z tarczą, tzn. jest ruchem obrotowym tarczy względem pionowej osi obrotu. Prędkość  $\vec{v}_b$  i przyspieszenie  $\vec{a}_b$  oblicza się z równań wektorowych:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_u + \vec{v}_w,$$

$$\vec{a}_b = \vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_{cor}.$$

Wartość prędkości unoszenia i względnej w danej chwili jest równa:

$$v_u = \omega_0 r = \omega_0 r, \quad v_w = \dot{s} = t^2.$$

Oba wektory są styczne w punkcie  $K$  do obwodu tarczy, przy czym ich zwroty są przeciwnie. W związku z tym wartość prędkości  $\vec{v}_b$  równa jest  $v_b = v_w - v_u$ , a dla  $t = t_1$   $v_b = 3$  m/s.

Przyspieszenie unoszenia i względne oblicza się z zależności:

$$\bar{a}_u = \bar{a}_{u\tau} + \bar{a}_{un}, \quad \bar{a}_w = \bar{a}_{w\tau} + \bar{a}_{wn}.$$

Wartości poszczególnych składowych wynoszą:

$$a_{u\tau} = \varepsilon_u r = \varepsilon_0 r = \dot{\omega}_0 r = 0,$$

$$a_{un} = \omega_u^2 r = \omega_0^2 r,$$

$$a_{w\tau} = \ddot{s} = 2t,$$

$$a_{wn} = \frac{v_w^2}{r} = \frac{1}{r} t^4.$$

Przyspieszenie Coriolisa jest równe

$$\bar{a}_{\text{cor}} = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w = 2\bar{\omega}_0 \times \bar{v}_w.$$

Wartość przyspieszenia  $\bar{a}_{\text{cor}}$  wynosi

$$a_C = 2\omega_0 v_w \sin 90^\circ = 2\omega_0 t^2.$$

Rozkład przyspieszeń w punkcie  $K$  pokazano na rysunku 2.4.2a.

Oznaczając  $\bar{a}_1 = \bar{a}_{wn} + \bar{a}_{un} + \bar{a}_{\text{cor}}$ , otrzymano:

$$a_b = \sqrt{a_1^2 + a_{w\tau}^2} = \sqrt{(a_{wn} + a_{un} - a_{\text{cor}})^2 + a_{w\tau}^2},$$

a dla chwili  $t_1 = 2$  s,  $a_b = 9,85$  m/s<sup>2</sup>.

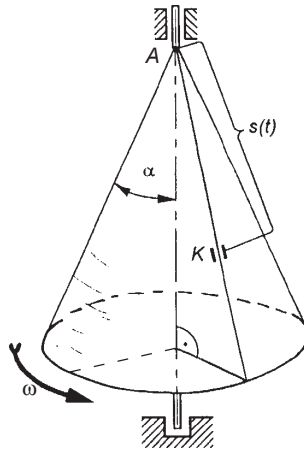
### ZADANIE 2.4.3

Wzdłuż tworzącej stożka obracającego się dookoła osi pionowej przemieszcza się tulejka  $K$  (rys. 2.4.3). Dla danych:  $\omega = 2t$  s<sup>-1</sup>,  $s = 2t^2$  m,  $\alpha = 30^\circ$  obliczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne tulejki  $K$  w chwili  $t_1 = 1$  s.

#### Rozwiązanie

Względem układu ruchomego, jakim jest stożek, ruch tulejki  $K$  jest ruchem względnym. Jest to ruch prostoliniowy opisany równaniem  $s = 2t^2$ . Ruch punktu  $K$  związanego „myślowo” w danej chwili sztywno ze stożkiem jest ruchem unoszenia. Ze względu na ruch obrotowy stożka jest to ruch po okręgu o promieniu  $OK$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}$ . Prędkość bezwzględną  $\bar{v}_b$  wyznacza się z zależności

$$\bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w.$$



Rys. 2.4.3

Wartości składowych w ruchu unoszenia i względnym są równe:

$$v_u = \omega_u \cdot OK = \omega \cdot AK \cdot \sin \alpha = 2t^3,$$

$$v_w = \dot{s} = 4t.$$

Z rozkładu prędkości pokazanego na rysunku 2.4.3a wynika, że  $v_b = \sqrt{v_u^2 + v_w^2}$ , a dla chwili  $t_1 = 1$  s wynosi  $v_b \cong 4,5$  m/s.

Przyspieszenie bezwzględne oblicza się z zależności:

$$\bar{a}_b = \bar{a}_u + \bar{a}_w + \bar{a}_{\text{cor}}.$$

Ze względu na ruch obrotowy stożka przyspieszenie unoszenia wynosi:

$$\bar{a}_u = \bar{a}_{u\tau} + \bar{a}_{un}$$

i

$$\bar{a}_b = \bar{a}_{u\tau} + \bar{a}_{un} + \bar{a}_w + \bar{a}_{\text{cor}},$$

gdzie  $\bar{a}_{\text{cor}} = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_w$ .

Wartości poszczególnych składowych są równe:

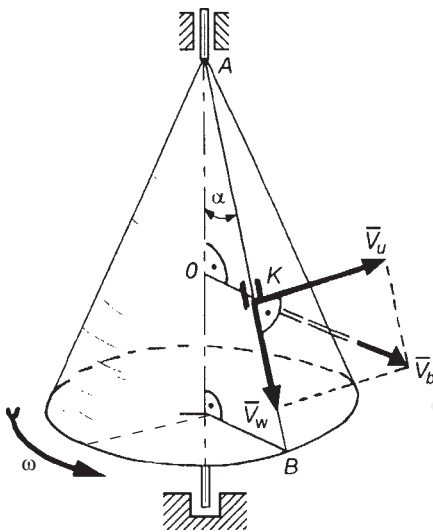
$$a_{u\tau} = \varepsilon_u \cdot OK = \dot{\omega}_u \cdot OK = \dot{\omega} \cdot OK = \dot{\omega} \cdot AK \cdot \sin \alpha = \dot{\omega} \cdot s \cdot \sin \alpha = 2t^2,$$

$$a_{un} = \omega_u^2 \cdot OK = \omega^2 \cdot OK = \omega^2 \cdot AK \sin \alpha = \omega^2 \cdot s \cdot \sin \alpha = 4t^3.$$

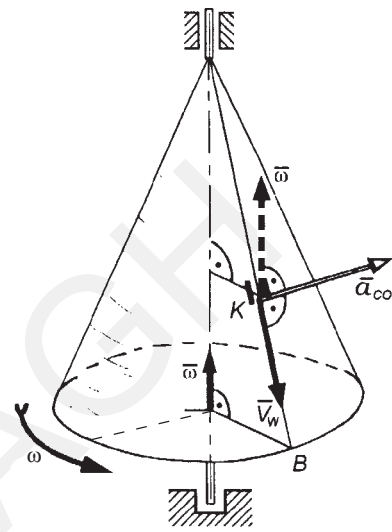
$$a_w = \ddot{s} = 4,$$

$$a_{\text{cor}} = 2\omega_u v_w \sin(180 - \alpha) = 2\omega v_w \sin \alpha = 8t^2.$$

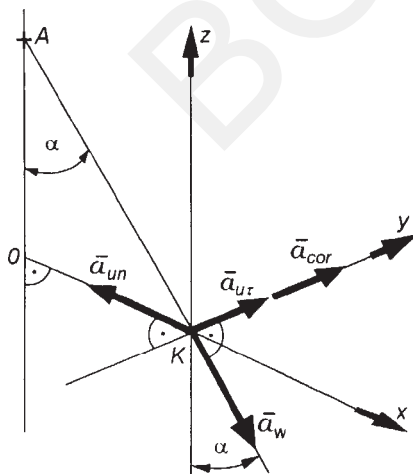
Kierunek przyspieszenia Coriolisa  $\bar{a}_{cor}$  wynika z zapisu wektorowego tego przyspieszenia, co pokazano na rysunku 2.4.3b, rozkład przyspieszeń pokazano na rysunku 2.4.3c. Ze względu na przestrzenny rozkład przyspieszeń wygodnie jest wyznaczyć współrzędne przemieszczenia bezwzględnego w przyjętym układzie odniesienia, a następnie obliczyć wartość przyspieszenia bezwzględnego ze wzoru  $a_b = \sqrt{a_{bx}^2 + a_{by}^2 + a_{bz}^2}$ .



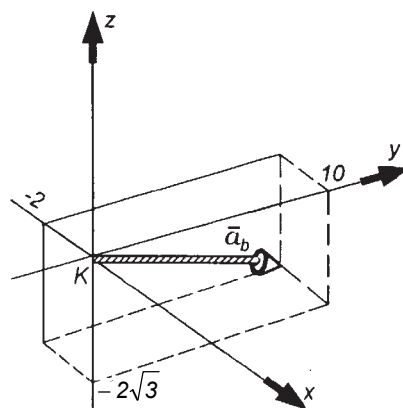
Rys. 2.4.3a



Rys. 2.4.3b



Rys. 2.4.3c



Rys. 2.4.3d

Dokonując odpowiednich działań otrzymano:

$$a_{bx} = a_w \sin \alpha - a_{un},$$

$$a_{by} = a_u \tau + a_{cor},$$

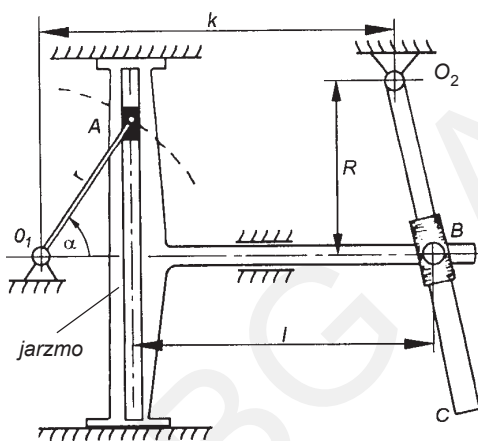
$$a_{bz} = -a_w \cos \alpha,$$

i dla  $t_1 = 1 \text{ s}$   $a_b \cong 10,8 \text{ m/s}^2$ .

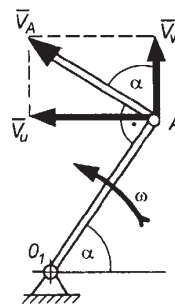
Kierunek przyspieszenia  $\bar{a}_b$  pokazano poglądowo na rysunku 2.4.3d.

#### ZADANIE 2.4.4

Dany jest mechanizm pokazany na rysunku 2.4.4. Korba napędowa  $O_1A$  porusza się ze stałą co do wartości prędkości kątową  $\omega$  względem osi obrotu prostopadłej w punkcie  $O_1$  do płaszczyzny rysunku. Mając dane  $r, R, k, l$  obliczyć prędkość  $v_1$  i przyspieszenie kątowe  $\epsilon_1$  korby  $O_2C$  w funkcji kąta  $\alpha$ .



Rys. 2.4.4



Rys. 2.4.4a

#### Rozwiązanie

Suwak  $A$  porusza się względem ruchomego jarzma wzdłuż pionowej prowadnicy ruchem względnym; jest to ruch prostoliniowy. Ruch unoszenia suwaka  $A$  jest określony w danej chwili ruchem jarzma. Jest to ruch prostoliniowy o kierunku ruchu jarzma. Ruch bezwzględny suwaka  $A$  wynika z ruchu korby  $O_1A$ , której końcem jest suwak. Jest to ruch po okręgu o promieniu  $O_1A = r$  z prędkością kątową  $\omega$ . Korzystając z rozkładu prędkości w ruchu złożonym, obliczyć można prędkość unoszenia  $v_u$ , znając wartość prędkości bezwzględnej  $v_b$  punktu  $A$ .

$$\bar{v}_b = \bar{v}_A = \bar{v}_u + \bar{v}_w.$$

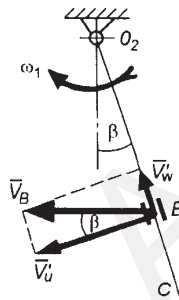
Rozkład wektorów prędkości pokazano na rysunku 2.4.4a.

Można więc zapisać:

$$v_b = v_A = \omega \cdot O_1A = \omega r,$$

$$v_u = v_A \sin \alpha = \omega r \sin \alpha.$$

Prędkość unoszenia punktu  $A$  jest równocześnie prędkością jarzma i w związku z tym prędkością bezwzględną punktu  $B$ . Prędkość unoszenia punktu  $B$  jest prędkością tego punktu sztywnie związanego w danej chwili z korbą  $O_2C$  i wynikającą z ruchu tej korby. Ruch unoszenia punktu  $B$  jest więc ruchem po okręgu o promieniu  $O_2B$ . Prędkość względna punktu  $B$  jest prędkością względem korby  $O_2C$ . Ruch względny jest ruchem prostoliniowym wzdłuż korby  $O_2C$ . Rozkład prędkości punktu  $B$  pokazano na rysunku 2.4.4b. Prędkość kątową  $\omega_1$  korby  $O_2C$  obliczyć można, znając prędkość unoszenia  $v'_u$  punktu  $B$ ;  $\omega_1 = \frac{v'_u}{O_2B}$ .



Rys. 2.4.4b

Prędkość bezwzględna punktu  $B$  jest więc równa  $v_B = v_u = \omega r \sin \alpha$ , a prędkość unoszenia punktu  $B$   $v'_u = v_B \cos \beta$ .

Obliczając  $O_2B = \sqrt{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2}$ ,  $\cos \beta = \frac{R}{O_2B}$ , otrzymano

$$\omega_1 = \frac{rR\omega \sin \alpha}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2}.$$

Ponieważ  $\omega = \text{const}$ , więc  $\alpha = \omega t$  i prędkość  $\omega_1$  wynosi

$$\omega_1 = \frac{rR\omega \sin \alpha t}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2}.$$

Przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_1$  można obliczyć jako pochodną  $\omega_1$  względem czasu

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{rR\omega^2}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2} \left[ \cos \alpha + \frac{2r(r \cos \alpha + l - k)}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2} \sin^2 \alpha \right].$$

Przyspieszenie  $\varepsilon_1$  otrzymać można też, korzystając z wektorowych równań przyspieszeń punktu  $A$  i  $B$ .



Rozpatrując ruch złożony tych punktów, otrzymuje się równania:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{uA} + \bar{a}_{wA}, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_{uB} + \bar{a}_{wB} + \bar{a}_{cor},$$

przy czym:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}, \quad \bar{a}_{uA} = \bar{a}_B,$$

$$\bar{a}_{uB} = \bar{a}_{uB}^\tau + \bar{a}_{uB}^n,$$

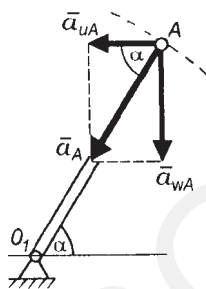
$$\bar{a}_{cor} = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_w$$

i w związku z tym

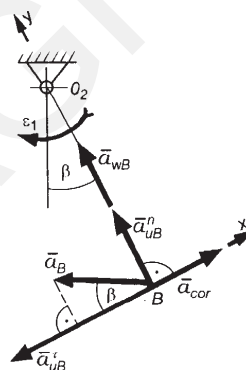
$$\bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} = \bar{a}_B + \bar{a}_{wA},$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{uB}^\tau + \bar{a}_{uB}^n + \bar{a}_{wB} + \bar{a}_{cor}.$$

Rozkład przyspieszeń pokazano na rysunku 2.4.4c i 2.4.4d.



Rys. 2.4.4c



Rys. 2.4.4d

Obliczając:

$$a_{A\tau} = \dot{\omega} \cdot OA = 0,$$

$$a_{An} = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 r,$$

$$a_{uB}^n = \omega_1^2 \cdot O_2B,$$

$$a_{cor} = 2\omega_1 v'_w \sin 90^\circ = 2\omega_1 v_B \sin \beta = 2\omega_1 v_A \sin \alpha \sin \beta = 2\omega_1 \omega r \sin \alpha \sin \beta,$$

oraz rzutując na osie  $x$  i  $y$  układu odniesienia (rys. 2.4.4d) równania wektorowe przyspieszeń z uwzględnieniem powyższych zależności oraz obliczonych wcześniej wartości  $\omega_1$ ,  $O_2B$  i kąta  $\beta$ , otrzymano

$$a_{uB}^\tau = \frac{rR\omega^2}{\sqrt{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2}} \left[ \cos \alpha + \frac{2r(r \cos \alpha + l - k)}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2} \sin^2 \alpha \right].$$

Przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_1$  korby  $O_2C$  wylicza się z zależności  $\varepsilon_1 = \frac{a_{uB}^\tau}{O_2B}$  i ostatecznie otrzymuje się

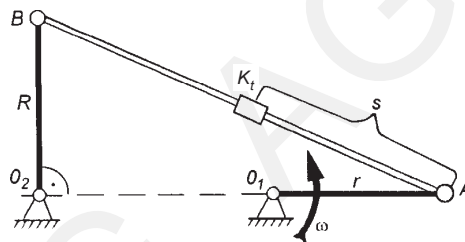
$$\varepsilon_1 = \frac{rR\omega^2}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2} \left[ \cos \alpha + \frac{2r(r \cos \alpha + l - k)}{R^2 + (r \cos \alpha + l - k)^2} \sin^2 \alpha \right].$$

#### ZADANIE 2.4.5

W mechanizmie czworoboku przegubowego  $O_1ABO_2$  (rys. 2.4.5) napędzana jest korba  $O_1A = r$  ze stałą prędkością kątową  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ . Wzdłuż pręta  $AB$  porusza się tulejka  $K_t$  zgodnie z prawem ruchu

$$AK_t = s = \frac{1}{2} (1+t) \text{ m}.$$

W chwili  $t_1 = 1 \text{ s}$  korba  $O_1A$  przyjmuje położenie poziome, a korba  $O_2B$  pionowe.



Rys. 2.4.5

Wyznaczyć w tym położeniu prędkość i przyspieszenie bezwzględne tulejki  $K_t$ , jeżeli  $AB = l = 2 \text{ m}$ ,  $O_2B = R = 3r = \frac{1}{2}l$ .

#### Rozwiązanie

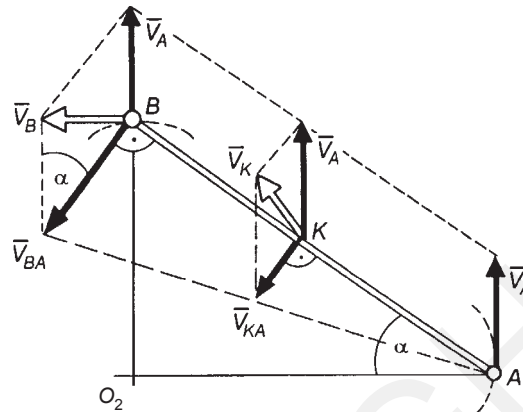
Punkt  $K_t$  porusza się ruchem złożonym. Ruch względny jest ruchem względem układu ruchomego, tzn. ruchem względem pręta  $AB$ . Jest to ruch prostoliniowy zgodnie z równaniem  $s(t)$ . Ruch unoszenia jest ruchem punktu  $K$  związanego sztywnie z prętem  $AB$  w danej chwili i poruszającego się razem z nim. Pręt  $AB$  porusza się ruchem płaskim i ruch unoszenia tulejki  $K_t$  rozpatrywany jest jak ruch punktu bryły w ruchu płaskim. Prędkość bezwzględna tulejki jest równa

$$\vec{v}_b = \vec{v}_u + \vec{v}_w.$$

Prędkość unoszenia wyznaczona może być z rozkładu prędkości w ruchu płaskim (ruch unoszenia jest ruchem płaskim)

$$\vec{v}_u = \vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA}.$$

Rozkład prędkości w ruchu unoszenia w położeniu mechanizmu w chwili  $t_1 = 1$  s (tulejka  $K_r$  jest wówczas w położeniu  $s = \frac{1}{2}l$ ) pokazano na rysunku 2.4.5a. Prędkość bieguna  $A$  wynosi  $v_A = \omega \cdot O_1A = \omega \cdot r$ .



Rys. 2.4.5a

Prędkość względem bieguna  $v_{KA}$  obliczyć można z proporcji

$$\frac{v_{KA}}{KA} = \frac{v_{BA}}{AB}, \quad \text{tj.} \quad v_{KA} = v_{BA} \frac{KA}{AB} = \frac{1}{2} v_{BA}.$$

Prędkość punktu  $B$  względem bieguna  $A$  wyznaczyć można z rozkładu prędkości w punkcie  $B$  (rys. 2.4.5a)

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Wynosi ona

$$v_{BA} = \frac{v_A}{\cos \alpha} = \frac{\omega \cdot r}{\cos \alpha},$$

przy czym  $\cos \alpha = \frac{O_2A}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - O_2B^2}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Składowe prędkości unoszenia wynoszą więc:

$$v_A = \omega r, \quad v_{KA} = \omega r \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Prędkość względna jest równa

$$v_w = \dot{s} = \frac{1}{2} \text{ m/s.}$$

Prędkość bezwzględna tulejki  $K_t$  można zapisać więc jako sumę wektorową

$$\vec{v}_b = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA} + \vec{v}_w,$$

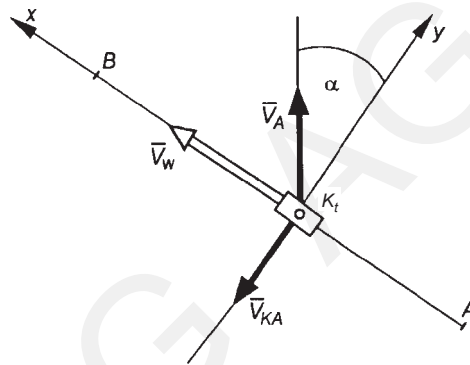
co pokazano na rysunku 2.4.5b.

Obliczając:

$$v_{bx} = v_w + v_A \sin \alpha,$$

$$v_{by} = v_A \cos \alpha - v_{KA},$$

prędkość bezwzględna wyznaczono z zależności  $v_b = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$  i dla danych liczbowych otrzymano  $v_b \cong 0,1$  m/s.



Rys. 2.4.5b

Przyspieszenie bezwzględne tulejki równe jest

$$\vec{a}_b = \vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_{\text{cor}}.$$

Przyspieszenie unoszenia wyznaczone może być z rozkładu przyspieszeń w ruchu płaskim

$$\vec{a}_u = \vec{a}_A + \vec{a}_{KA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{KA}^{\tau} + \vec{a}_{KA}^n.$$

Przyspieszenie  $a_A = a_{An} = \omega^2 r$ ,

ponieważ  $\omega = \text{const}$  i  $a_{A\tau} = 0$ .

$$\text{Przyspieszenie } a_{KA}^n = \frac{(v_{KA})^2}{KA} = \frac{2\omega^2 r^2}{3l}.$$

Przyspieszenie  $a_{KA}^\tau$  wyznaczyć można, obliczając przyspieszenie punktu  $B$ :

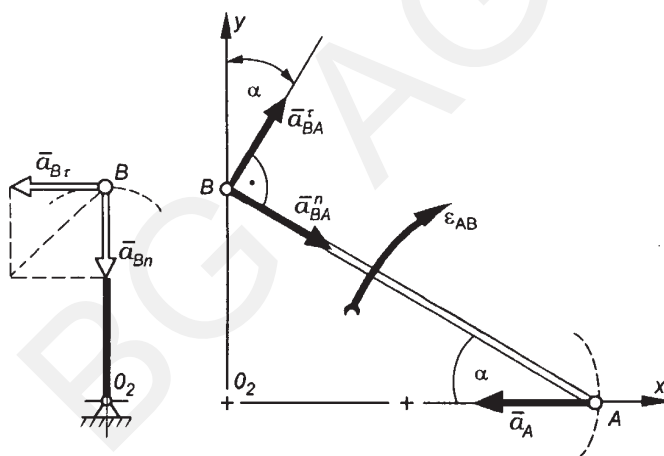
$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \quad \text{względnie} \quad \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n.$$

Rozkład przyspieszeń przedstawiono na rysunku 2.4.5c. Rzutując powyższe równanie na oś  $Y$  przyjętego układu odniesienia otrzymano

$$\bar{a}_{BA}^\tau = -\frac{a_{Bn}}{\cos \alpha} + a_{BA}^n \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\text{przy czym } a_{Bn} = \frac{v_B^2}{O_2B} = \frac{v_A^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{R} = \frac{\omega^2 r^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{R},$$

$$a_{BA}^n = \frac{(v_{BA})^2}{BA} = \frac{\omega^2 r^2}{l \cos^2 \alpha}.$$



Rys. 2.4.5c

Znając przyspieszenie  $a_{BA}^\tau$ , wyznaczyć można przyspieszenie  $a_{KA}^\tau$  z zależności:

$$\frac{a_{KA}^\tau}{KA} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}, \quad \text{tzn.} \quad a_{KA}^\tau = a_{BA}^\tau \frac{KA}{AB} = \frac{1}{2} a_{BA}^\tau.$$

Przyspieszenie względne tulejki  $K_t$  jest równe  $a_w = \ddot{s} = 0$ .

Przyspieszenie Coriolisa tulejki  $K_t$  zapisać można jako iloczyn wektorowy:  $\bar{a}_{\text{cor}} = 2\bar{\omega}_u \times \bar{v}_w$ , gdzie prędkość kątowa  $\bar{\omega}_u$  ruchu unoszenia jest prędkością kątową  $\bar{\omega}_{AB}$  w obrotowym ruchu względnym pręta  $AB$  (jako składowym ruchu płaskiego pręta).

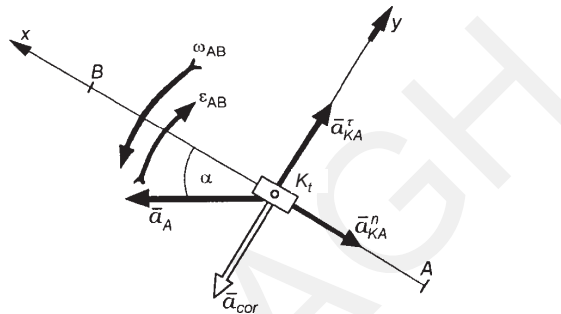
Wartość przyspieszenia Coriolisa wynosi:

$$a_{\text{cor}} = 2\omega_u \cdot v_w \sin 90^\circ = 2\omega_{AB} \cdot v_w = 2 \frac{v_{BA}}{AB}, \quad v_w = \frac{2\omega r \dot{s}}{l \cos \alpha}.$$

Tak więc przyspieszenie bezwzględne tulejki  $K_t$  zapisać można

$$\bar{a}_b = \bar{a}_A + a_{KA}^\tau + \bar{a}_{KA}^n + \bar{a}_{\text{cor}}.$$

Rozkład przyspieszeń pokazano na rysunku 2.4.5d.



Rys. 2.4.5d

Obliczając współrzędne przyspieszenia bezwzględnego, otrzymano:

$$a_{bx} = a_A \cos \alpha - a_{KA}^n,$$

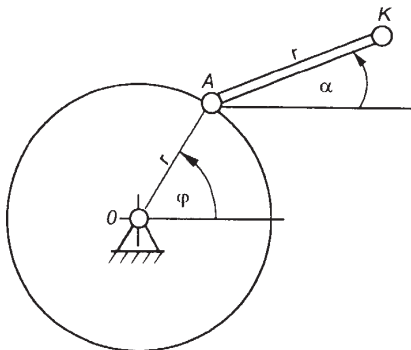
$$a_{by} = -a_A \sin \alpha + a_{KA}^\tau - a_{\text{cor}}.$$

Z zależności  $a_b = \sqrt{a_{bx}^2 + a_{by}^2}$  dla danych liczbowych otrzymano  $a_b = 0,25 \text{ m/s}^2$ .

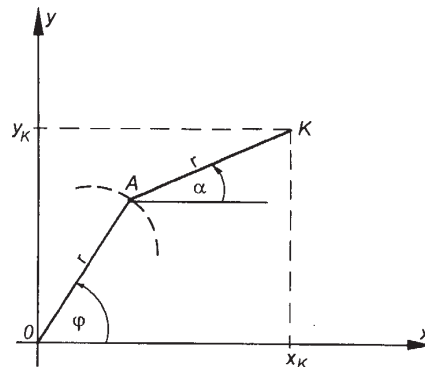
#### ZADANIE 2.4.6

Tarcza o promieniu  $r$  (rys. 2.4.6) wykonuje ruch obrotowy względem osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku w punkcie  $O$ . Do tarczy zamocowany jest przegubowo w punkcie  $A$  pręt  $AK$  o długości  $r$ , poruszający się w płaszczyźnie ruchu tarczy.

Ruch tarczy względem jej osi obrotu opisuje równanie  $\varphi = \frac{1}{3}t$ , a ruch pręta względem osi prostopadłej w punkcie  $A$  do płaszczyzny rysunku opisuje równanie  $\alpha = \frac{1}{4}t$ . Obliczyć prędkość punktu  $K$  w chwili  $t_1 = \pi \text{ s}$ , jeżeli  $r = 1 \text{ m}$ .



Rys. 2.4.6



Rys. 2.4.6a

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiązano trzema metodami:

- 1) wykorzystując skończone równania ruchu punktu  $K$ ,
- 2) traktując ruch punktu  $K$  jako ruch złożony,
- 3) traktując ruch pręta jako ruch płaski.

**Ad 1)**

Współrzędne punktu  $K$  zapisano w nieruchomym układzie odniesienia (rys. 2.4.6a):

$$x_K = OA \cos \varphi + AK \cos \alpha = r \left( \cos \frac{1}{3}t + \cos \frac{1}{4}t \right),$$

$$y_K = OA \sin \varphi + AK \sin \alpha = r \left( \sin \frac{1}{3}t + \sin \frac{1}{4}t \right).$$

Obliczając pochodne względem czasu, otrzymano współrzędne prędkości punktu  $K$ :

$$v_{Kx} = \dot{x}_K = -r \left( \frac{1}{3} \sin \frac{1}{3}t + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{4}t \right),$$

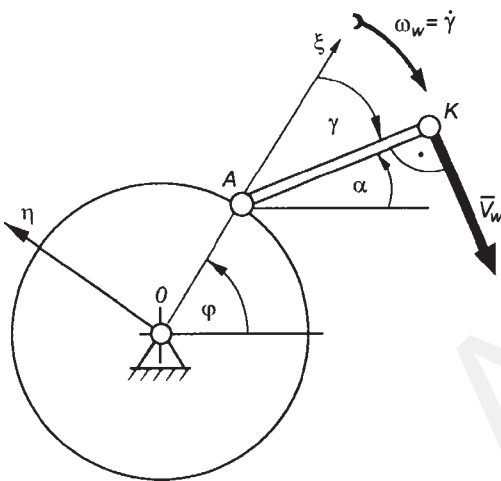
$$v_{Ky} = \dot{y}_K = r \left( \frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}t + \frac{1}{4} \cos \frac{1}{4}t \right).$$

Z zależności  $v_K = \sqrt{\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2}$  dla  $t = t_1 = \pi$  s, otrzymano  $v_K = 0,58$  m/s.

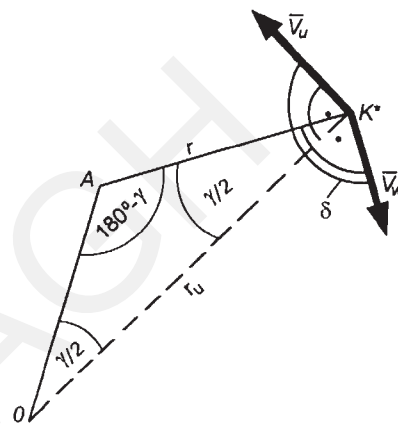
**Ad 2)**

Wprowadzając ruchomy układ odniesienia  $O\xi\eta$  związany z tarczą (poruszający się razem z tarczą), ruch względny punktu  $K$  opisać można kątem  $\gamma = \varphi(t) - \alpha(t)$  (rys. 2.4.6b). Prędkość względna w obrocie pręta  $AK$  względem osi obrotu w punkcie  $A$  jest równa

$$v_w = \omega_w \cdot AK = \dot{\gamma} \cdot AK = (\dot{\varphi} - \dot{\alpha})r.$$



Rys. 2.4.6b



Rys. 2.4.6c

Ruch unoszenia punktu  $K$  rozpatruje się jako ruch końca pręta  $AK$  unieruchomionego w danej chwili względem tarczy i poruszającego się razem z tarczą, tj. ruch śladu  $K^*$  punktu  $K$  na płaszczyźnie  $O\xi\eta$ . Rozkład prędkości pokazano na rysunku 2.4.6c.

Prędkość unoszenia jest równa:

$$v_u = v_{K^*} = \omega_u r_u = \omega_u \cdot OK = \dot{\varphi} \cdot 2r \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Prędkość bezwzględną obliczono z zależności

$$v_b = v_k = \sqrt{v_w^2 + v_u^2 - 2v_u v_w \cos \delta},$$

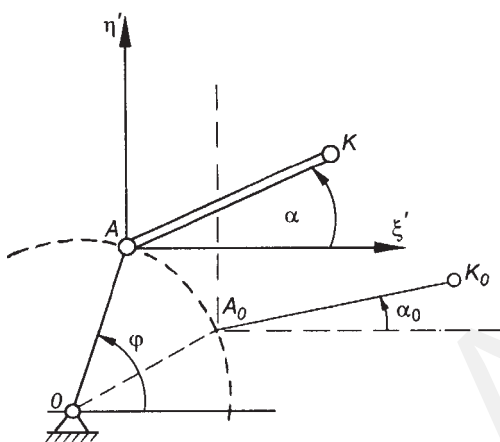
gdzie  $\cos \delta = \cos \left( 180 - \frac{\gamma}{2} \right) = -\cos \frac{\gamma}{2}.$

Dla danych liczbowych otrzymano  $v_K = v_b = 0,58$  m/s.

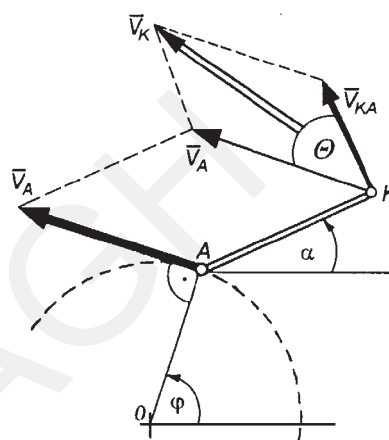


**Ad 3)**

Wprowadzając układ ruchomy  $A\xi'\eta'$  (rys. 2.4.6d) tak, aby poruszał się on ruchem postępowym podczas ruchu tarczy (osie tego układu poruszają się stale równoległe), ruch płaski pręta  $AK$  rozpatruje się jako ruch złożony z postępowego ruchu unoszenia układu  $A\xi'\eta'$  (jest to ruch pręta razem z układem  $A\xi'\eta'$ ) i obrotowego ruchu względniego, tj. ruchu obrotowego pręta  $AK$  względem osi przechodzącej przez punkt  $A$ . Ruch względny opisuje równanie  $\alpha(t)$ .



Rys. 2.4.6d



Rys. 2.4.6e

Przyjmując biegun w punkcie  $A$ , prędkość punktu  $K$  oblicza się z równania (rys. 2.4.6e)

$$\vec{v}_K = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA}$$

Wartości składowych  $\vec{v}_A$  i  $\vec{v}_{KA}$  wynoszą:

$$v_A = \dot{\varphi} \cdot OA = \dot{\varphi} \cdot r, \quad v_{KA} = \dot{\alpha} \cdot AK = \dot{\alpha} \cdot r,$$

a wartość prędkości punktu  $K$ :

$$v_K = \sqrt{v_A^2 + v_{KA}^2 + 2v_A v_{KA} \cos \theta}, \quad \text{gdzie } \theta = \varphi - \alpha.$$

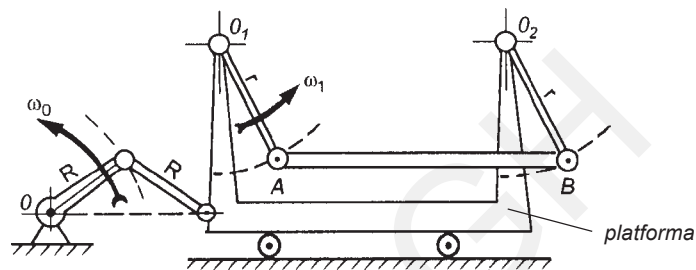
Podstawiając dane liczbowe otrzymuje się  $v_K = 0,58 \text{ m/s}$ .

## 2.5. Składanie ruchów postępowych i obrotowych

### ZADANIE 2.5.1

Mechanizm korbowo-wodzikowy napędza ruchomą platformę, na której zamocowany jest wahliwie podwieszony na prętach pomost  $AB$  (rys. 2.5.1).

Dla danych:  $\omega_0 = 0,25\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{3}\pi \text{ s}^{-1}$ ,  $r = 0,6 \text{ m}$ ,  $R = 0,4 \text{ m}$  obliczyć bezwzględną prędkość pomostu w chwili  $t_1 = 1 \text{ s}$ .

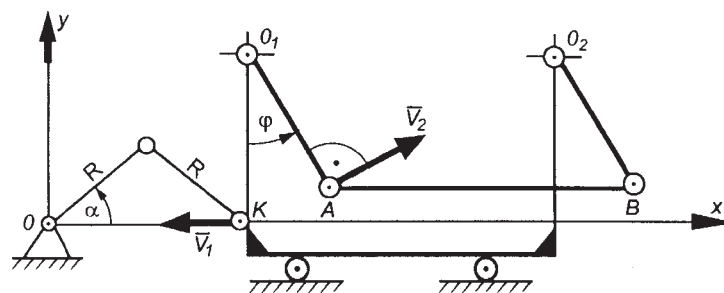


Rys. 2.5.1

### Rozwiązanie

Pomost  $AB$  porusza się ruchem złożonym: względnym ruchem postępowym względem platformy i postępowym ruchem unoszenia wynikającym z postępowego ruchu platformy.

Ruch bezwzględny pomostu jako złożenie dwóch ruchów postępowych jest też ruchem postępowym. Obliczając prędkość bezwzględną dowolnego punktu pomostu np. punktu  $A$ , wyznaczmy tym samym prędkość bezwzględną całego pomostu  $\vec{v}_A = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , gdzie  $\vec{v}_1$  jest prędkością unoszenia (prędkość platformy),  $\vec{v}_2$  jest prędkością względną (prędkość względem platformy).



Rys. 2.5.1a

Prędkość  $v_1$  jako prędkość dowolnego punktu platformy wyznaczyć można, obliczając w przyjętym, jak na rysunku 2.5.1a, układzie odniesienia współrzędne punktu  $K$ , a następnie obliczając współrzędne prędkości:

$$x_K = 2R \cos \alpha = 2R \cos \omega_0 t, \quad y_K = 0,$$

$$v_1 = \dot{x}_K = -2R\dot{\alpha} \sin \alpha = -2R\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Wartość prędkości w chwili  $t_1 = 1$  s wynosi

$$v_1(t) = |\dot{x}_K(t_1)| = 0,1\pi\sqrt{2} \text{ m/s.}$$

Prędkość  $v_2$  obliczyć można względem punktu  $O_1$  ze wzoru:  $v_2 = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot r$ .

W chwili  $t_1 = 1$  s  $v_2 = 0,2\pi$  m/s. Ze względu na to, że  $\omega_1 = \text{const}$ , ruch korby  $O_1A$  względem punktu  $O_1$  opisany jest równaniem  $\varphi = \omega_1 t$ , skąd dla  $t = t_1$   $\varphi = 60^\circ$ .

Prędkość bezwzględna punktu  $A$ , a tym samym prędkość bezwzględna pomostu, równa jest

$$v_b = v_A = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos 120^\circ} = 0,56 \text{ m/s.}$$

Identyczną metodykę obliczeń można zastosować do wyznaczenia przyspieszenia pomostu.

### ZADANIE 2.5.2

Korba  $OA$  obraca się wokół osi  $O$  z prędkością kątową  $\omega_0$  i wprawia w ruch koło IV toczące się bez poślizgu wewnątrz koła nieruchomego V. Ruch koła IV powoduje z kolei ruch koła II – III i następnie koła I (rys. 2.5.2). Znając promienie  $r_1, r_2, r_3, r_4$  wyznaczyć, prędkości kątowe poszczególnych kół.

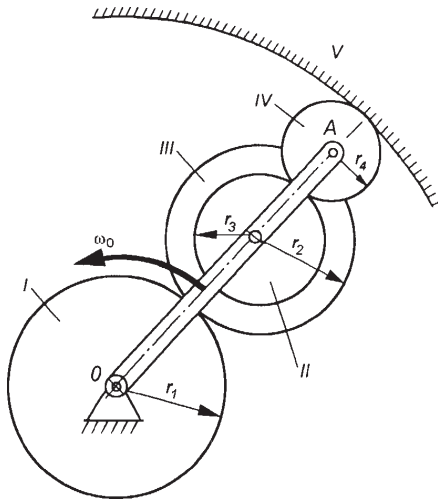
#### Rozwiązanie

Koło I wykonuje ruch obrotowy względem osi  $O$ , natomiast koła II – III i IV ruch płaski, tj. ruch złożony z ruchu unoszenia wynikającego z ruchu korby  $OA$  i ruchu względnego obrotowego odpowiednio względem osi przechodzących przez środki kół II – III i IV. Kierunek obrotu względnego wyznacza się z pozycji obserwatora „znajdującego się na ramie  $OA$ ”.

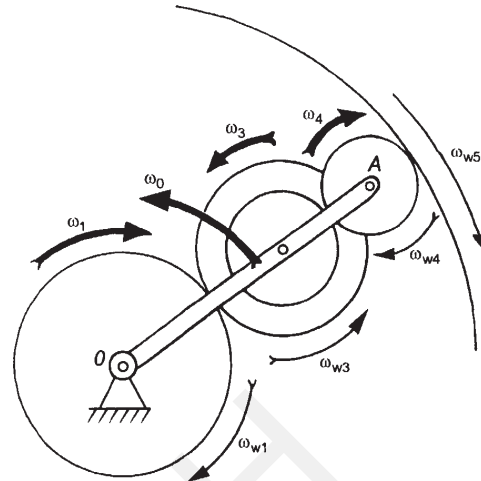
Dla każdego z kół można napisać zależność:

$$\omega_i = \omega_{ui} \pm \omega_{wi}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

gdzie  $\omega_i$  jest prędkością kątową bezwzględną,  $\omega_{ui}$  jest prędkością kątową unoszenia równą  $\omega_0$ , a  $\omega_{wi}$  jest prędkością kątową względną.



Rys. 2.5.2



Rys. 2.5.2a

Dla poszczególnych kół prędkości kątowne zaznaczono na rysunku 2.5.2a. Tak więc:

$$\omega_1 = \omega_0 - \omega_{w1},$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_0 + \omega_{w3},$$

$$\omega_4 = \omega_0 - \omega_{w4},$$

$$\omega_5 = \omega_0 - \omega_{w5} = 0 \quad (\text{koło V jest nieruchome}).$$

Wykorzystując powyższe związki oraz zależności na przełożenia względne poszczególnych par kół:

$$\frac{\omega_{w1}}{\omega_{w3}} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\omega_{w3}}{\omega_{w4}} = \frac{r_4}{r_3}, \quad \frac{\omega_{w4}}{\omega_{w5}} = \frac{r_5}{r_4},$$

otrzymano:

$$\omega_{w1} = \omega_0 \frac{r_5 r_2}{r_1 r_3},$$

$$\omega_{w3} = \omega_0 \frac{r_5}{r_3},$$

$$\omega_{w4} = \omega_0 \frac{r_5}{r_4},$$

a po podstawieniu  $r_5 = r_1 + r_2 + r_3 + 2r_4$  otrzymuje się prędkości kątowe poszczególnych kół:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{r_3(r_1 - r_2) - r_2(r_1 + r_2 - 2r_4)}{r_1 r_3},$$

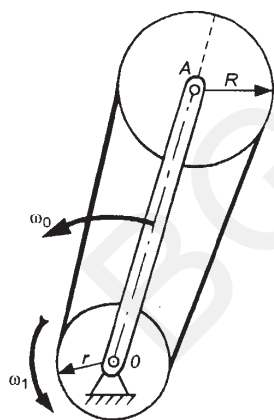
$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_0 \frac{r_1 + r_2 + 2(r_3 + r_4)}{r_3},$$

$$\omega_4 = \omega_0 \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{r_4}.$$

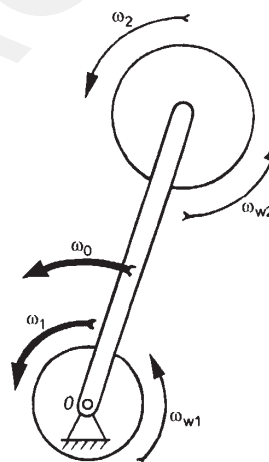
Dobierając odpowiednie długości promieni kół, uzyskać można nie tylko różne wartości prędkości kątowych, ale również różne kierunki obrotów poszczególnych kół.

### ZADANIE 2.5.3

W przekładni pasowej jak na rysunku 2.5.3 prędkość kątowa ramki równa jest  $\omega_0$ . Koło pasowe o promieniu  $r$  napędzane jest z prędkością kątową  $\omega_1$ . Wyznaczyć prędkość kątową  $\omega_2$  koła o promieniu  $R$ .



Rys. 2.5.3



Rys. 2.5.3a

### Rozwiązanie

Prędkość kątową bezwzględną kół zapisać można zależnością

$$\omega_i = \omega_{ui} \pm \omega_{wi}, \quad i = 1, 2,$$

gdzie  $\omega_{ui}$  jest prędkością unoszenia wynikającą z ruchu ramki, tzn.  $\omega_{ui} = \omega_0$ , a  $\omega_{wi}$  jest prędkością względną (rys. 2.5.3a).

$$\text{Zatem } \omega_1 = \omega_0 + \omega_{w1},$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \omega_{w2},$$

a po uwzględnieniu przełożenia względnego

$$\frac{\omega_{w1}}{\omega_{w2}} = \frac{R}{r}$$

otrzymano  $\omega_2 = \omega_0 + \frac{r}{R} (\omega_1 - \omega_0)$ .

Dobierając odpowiednio promienie kół oraz prędkość kątową  $\omega_1$  uzyskać można różne wartości prędkości kątowej  $\omega_2$  i różny kierunek obrotów tego koła, np. dla  $\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{R}{r}\right)$  prędkość  $\omega_2 = 0$  i koło to porusza się ruchem postępowym, a dla  $\omega_1 = \omega_0$  prędkość kątowa  $\omega_2$  równa się  $\omega_0$ .

## 3. Dynamika

### 3.1. Uwagi metodyczne dotyczące rozwiązywania zadań z dynamiki

Zadania z dynamiki zaliczyć można ogólnie do dwóch grup: zadań dotyczących dynamiki punktu materialnego i zadań dotyczących dynamiki układu punktów materialnych. Przez układ punktów materialnych w sensie mechanicznym rozumie się układ, w którym położenie jednego punktu uzależnione jest od położenia pozostałych punktów. Jeżeli odległości pomiędzy punktami w układzie punktów materialnych nie zmieniają się, to taki układ nazywa się bryłą lub ciałem sztywnym. W związku z tym dynamikę dzieli się na trzy części:

- 1) dynamikę punktu,
- 2) dynamikę układu punktów,
- 3) dynamikę bryły.

Przystępując do rozwiązywania zadań z dynamiki, można kierować się poniższymi wskazówkami metodycznymi.

- Zrozumieć zadanie.
- Podjąć decyzję dotyczącą umieszczenia rozpatrywanego problemu w jednej z trzech części dynamiki.

Nie zawsze jest to sprawą oczywistą, ponieważ punkty materialne i ich układy są pewnymi modelami układów rzeczywistych (maszyn, urządzeń itp.). Modelowanie takich układów wiąże się przede wszystkim z przyjęciem pewnych kryteriów dotyczących osiągnięcia założonego celu i dlatego możemy na przykład w pewnych przypadkach traktować bryły jak punkty materialne, a w innych nie.

- Wybrać odpowiednią metodę do rozwiązania zadania.

Do rozwiązania określonego zadania możemy zastosować wiele metod wynikających z praw i zasad mechaniki, tzn. że rozwiązanie uzyskać można, wykorzystując równorzędnie różne prawa i zasady, np. II prawo Newtona lub zasadę równowagi energii kinetycznej i pracy czy równania Lagrange'a II rodzaju.

Wybór metody zależy głównie od łatwości jej zastosowania dla danego przypadku i szybkości osiągnięcia celu, tj. rozwiązania zadania.

- Sprawdzić wymiary wyznaczonych wielkości.
- Przeprowadzić, jeżeli to potrzebne, dyskusję nad otrzymanymi wynikami oraz analizę rozpatrywanego problemu.

Szczegółowe uwagi metodyczne dla poszczególnych typów zadań podano przy ich rozwiązaniach.

## 3.2. Dynamika punktu materialnego

### 3.2.1. Różniczkowe równania ruchu – wyznaczanie sił

#### ZADANIE 3.2.1

Obliczyć wartość siły naciągu liny dźwigu osobowego podczas ruchu kabiny w dół, jeżeli ciężar kabiny wynosi  $G = 8000$  N, jej przyspieszenie  $a = 0,4g$  ( $g$  – przyspieszenie ziemskie), a siła oporu jazdy  $F = 0,2G$ .

#### Rozwiązanie

Ze względu na postępowy ruch kabiny traktowana jest ona jako punkt materialny, do którego przyłożono wszystkie działające siły (rys. 3.2.1), przy czym siłę naciągu  $\bar{S}$  liny przyłożono, stosując znane ze statyki metody uwalniania od więzów.

Wartość siły naciągu  $\bar{S}$  liny obliczono bezpośrednio z równania różniczkowego ruchu, które w przyjętym jak na rysunku 3.2.1 układzie odniesienia ma postać

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^3 P_{ix} = G - F - S,$$

gdzie:

$$m = \frac{G}{g}, \quad \ddot{x} = a = 0,4g,$$

$g$  – przyspieszenie ziemskie,

$$F = 0,2G.$$

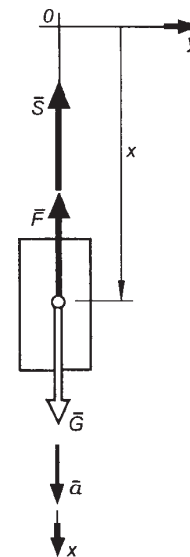
Obliczając  $S = G - F - m\ddot{x} = 0,4G$ , otrzymano ostatecznie  $S = 3200$  N. Wartość siły  $\bar{S}$  będzie inna w przypadku ruchu ustalonego kabiny oraz hamowania.

W przypadku ruchu ustalonego przyspieszenie  $\ddot{x} = 0$  i  $S = G - F = 0,8G = 6400$  N.

Podczas hamowania z przyspieszeniem (opóźnieniem), np. równym co do wartości przyspieszeniu  $a = 0,4g$ , otrzymuje się

$$S = G - F + m\ddot{x}, \quad \text{i stąd} \quad S = 1,2G = 9600 \text{ N.}$$

Znak „+” przy  $m\ddot{x}$  wynika ze zmiany zwrotu przyspieszenia (opóźnienia) w stosunku do zwrotu przyspieszenia w okresie rozruchu (rys. 3.2.1).



Rys. 3.2.1



**ZADANIE 3.2.2**

Wyznaczyć siłę oporu wody w zależności od prędkości łódki, której ruch opisany

jest równaniem  $x = \frac{Q}{kg} v_0 \left( 1 - e^{-\frac{kg}{Q} t} \right)$ ,

gdzie:

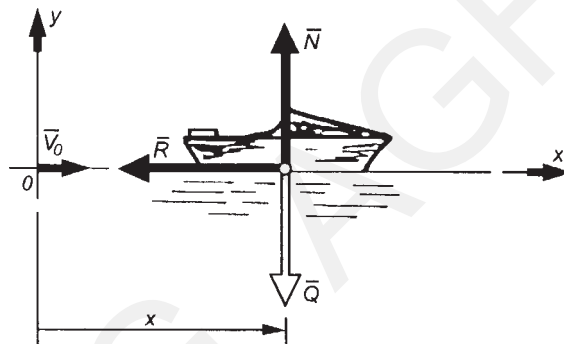
$Q$  – ciężar łódki,

$k = \text{const} > 0$ ,

$v_0$  – prędkość początkowa łódki.

**Rozwiązanie**

Przyjęto układ odniesienia jak na rysunku 3.2.2 i przyłożono do łódki (traktujemy ją jak punkt materialny) siły: ciężkości łódki  $\bar{Q}$ , reakcji normalnej wody  $\bar{N}$  oraz oporu wody  $\bar{R}$  na kierunku ruchu łódki.



Rys. 3.2.2

Współrzędne prędkości i przyspieszenia łódki na osi  $x$  są odpowiednio:

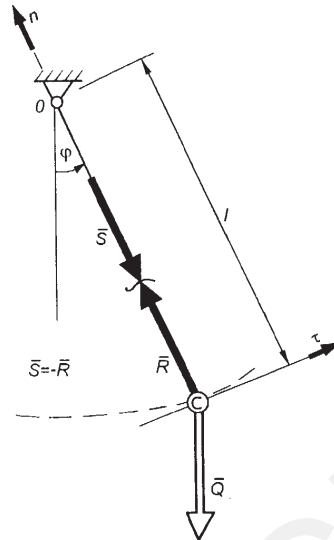
$$v_x = \dot{x} = v_0 e^{-\frac{kg}{Q} t}, \quad a_x = \ddot{x} = -\frac{kg}{Q} v_0 e^{-\frac{kg}{Q} t}.$$

Układając równanie różniczkowe ruchu w odniesieniu do osi  $x$   $m\ddot{x} = R_x$ ;  $m = \frac{Q}{g}$ , otrzymano  $R_x = -kv_0 e^{-\frac{kg}{Q} t}$ , a uwzględniając współrzędną prędkości  $v_x$ , ostatecznie obliczono siłę oporu wody w zależności od prędkości:  $R_x = -kv_x$ .

Znak „-” oznacza, że siła oporu wody i prędkość łódki mają przeciwne zwroty.

**ZADANIE 3.2.3**

Obliczyć siłę w nici wahadła matematycznego o długości  $l$  i ciężarze  $Q$ , jeżeli jego ruch opisany jest równaniem  $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$  ( $\varphi$  – kąt odchylenia wahadła od pionu,  $\omega = \text{const} > 0$ ).



Rys. 3.2.3

**Rozwiązanie**

Ze względu na to, że ruch wahadła może być opisany jedną współrzędną kątową (ruch po okręgu), wygodnie jest wprowadzić układ odniesienia jak na rysunku 3.2.3 (oś  $\tau$  na kierunku stycznym, oś  $n$  na kierunku normalnym do toru). Do wahadła przyłożono siłę ciężkości  $\bar{Q}$  i siłę reakcji  $\bar{R}$  nici, otrzymaną w wyniku oswobodzenia wahadła od więzów. Siła  $\bar{R}$  jest co do wartości równa sile  $\bar{S}$  w nici.

Do wyznaczenia siły  $\bar{R}$  wystarczy wykorzystać równania różniczkowe ruchu w odniesieniu do osi normalnej  $n$

$$ma_n = \sum_{i=1}^n P_{in},$$

gdzie  $a_n$  jest przyspieszeniem normalnym.

Podstawiając  $a_n = l\dot{\varphi}^2$  do równania różniczkowego ruchu, otrzymuje się

$$ml\dot{\varphi}^2 = R - Q \cos \varphi,$$

skąd

$$R = Q \left( \frac{l}{g} \dot{\varphi}^2 + \cos \varphi \right).$$

Różniczkując równanie ruchu  $\varphi(t)$ , otrzymano

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 \omega \cos \omega t.$$

Podstawiając  $\dot{\varphi}$  do równania na siłę  $R$ , otrzymuje się

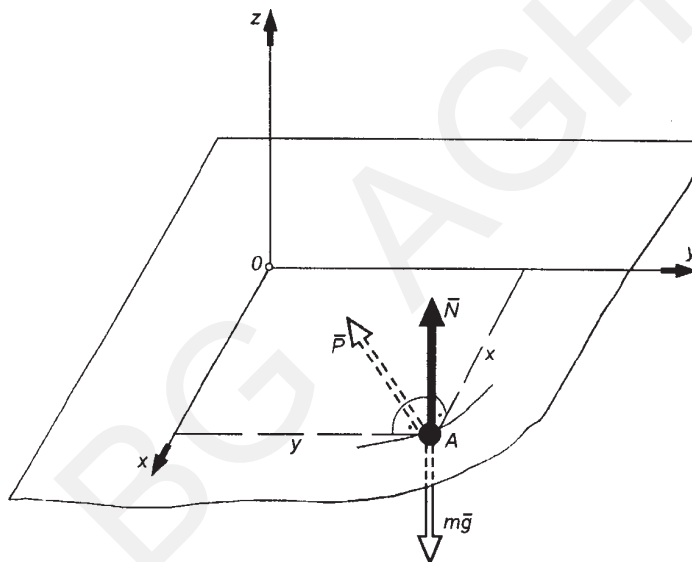
$$R = Q \left[ \frac{l\varphi_0^2 \omega^2}{g} \cos^2 \omega t + \cos(\varphi_0 \sin \omega t) \right].$$

Wartość siły  $\bar{S}$  w nici równa jest wartości siły  $\bar{R}$ ;  $S = R$ . Korzystając z otrzymanego wyrażenia można obliczyć również wartość maksymalną siły  $\bar{R}$ .

$$R_{\max} = Q \left( \frac{l\varphi_0^2 \omega^2}{g} + 1 \right) \quad \text{dla} \quad \omega t = k \cdot \pi.$$

### ZADANIE 3.2.4

Ruch punktu materialnego  $A$  o masie  $m$  opisany jest równaniem:  $x = x_0 \cos \omega t$ ,  $y = y_0 \sin \omega t$  ( $\omega = \text{const}$ ). Wyznaczyć siłę działającą na punkt, jeżeli porusza się on po gładkiej poziomej płaszczyźnie.



Rys. 3.2.4a

### Rozwiązanie

Do wyznaczenia działającej siły wykorzystano drugie prawo Newtona, zgodnie z którym  $m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{P}$ , gdzie  $\bar{P}$  jest geometryczną sumą sił czynnych i reakcji działających na punkt o masie  $m$  i nadających mu przyspieszenie  $\bar{a}$ .

Z warunków zadania wynika, że ruch punktu  $A$  zachodzi tylko w płaszczyźnie  $xy$ . Na rysunku 3.2.4a przedstawiono punkt  $A$  o masie  $m$  z przyłożonymi siłami: ciężkości i reakcją normalną płaszczyzny (reakcja styczna nie występuje ze względu na to, że płaszczyzna jest gładka). Na rysunku zaznaczono również orientacyjnie szukaną siłę  $\bar{P}$ .

Z trzech skalarnych równań:

$$P_x = m\ddot{x},$$

$$P_y = m\ddot{y},$$

$$P_z = m\ddot{z},$$

do wyznaczenia siły  $\bar{P}$  wykorzystano dwa pierwsze. Obliczając:

$$\dot{x} = -x_0\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = y_0\omega \cos \omega t,$$

$$\ddot{x} = -x_0\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} = -y_0\omega^2 \sin \omega t,$$

otrzymuje się współrzędne siły  $\bar{P}$ :

$$P_x = -mx_0\omega^2 \cos \omega t = -m\omega^2 x,$$

$$P_y = -my_0\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 y,$$

której moduł wynosi

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2 r,$$

gdzie  $r$  jest modułem wektora – promienia wodzącego punktu  $A$  (rys. 3.2.4b).

Kierunek siły  $\bar{P}$  określić można, wyznaczając cosinus kierunkowy kąta  $\alpha$ , jaki tworzy ona z osią  $x$

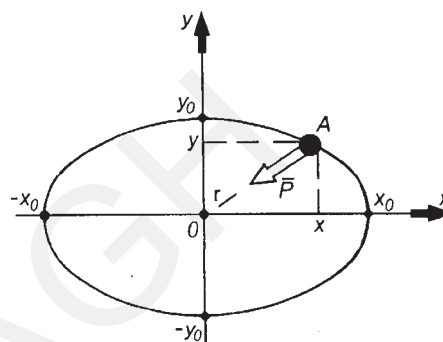
$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P} = -\frac{x}{r}.$$

Kierunek siły  $\bar{P}$  jest taki sam jak kierunek wektora  $\bar{r}$ , przy czym jej zwrot jest przeciwny do zwrotu wektora  $\bar{r}$  (rys. 3.2.4b).

Punkt  $A$  porusza się więc po elipsie

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$$

(patrz równanie ruchu  $x(t)$ ,  $y(t)$ ), pod działaniem siły o wartości  $P = m\omega^2 r$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ), prostej działania przechodzącej stale przez punkt  $O$  i o zwrocie do punktu  $O$ . Siłę taką nazywa się siłą centralną.



Rys. 3.2.4b

### 3.2.2. Różniczkowe równania ruchu – wyznaczanie równań skończonych ruchu

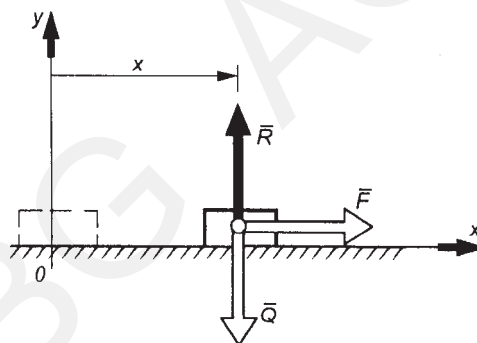
#### ZADANIE 3.2.5

Bryła o ciężarze  $Q$  porusza się po gładkiej poziomej płaszczyźnie pod wpływem poziomej siły  $F = F_x = F_0 \sin \omega t$  ( $F_0, \omega$  – stałe). Wyznaczyć skończone równanie ruchu, jeżeli w chwili początkowej bryła była w spoczynku. Bryłę należy traktować jak punkt materialny.

#### Rozwiązanie

Początek układu odniesienia przyjęto w położeniu początkowym bryły. Ze względu na to, że w chwili początkowej bryła znajdowała się w spoczynku, warunki początkowe ruchu zapisać można w postaci:  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$ .

Na bryłę działają następujące siły:  $\bar{Q}, \bar{F}$  – siły czynne,  $\bar{R}$  – reakcja normalna podłoża (rys. 3.2.5a).



Rys. 3.2.5a

Korzystając z drugiego prawa Newtona, otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu

$$m\ddot{x} = F_x,$$

lub

$$\ddot{x} = \frac{F_0 g}{Q} \sin \omega t \quad (1)$$

Rozwiązując powyższe równanie, wyznaczyć można prędkość  $\dot{x}$  i współrzędną  $x$  określającą położenie bryły w dowolnej chwili  $t$ , tj. skończone równanie ruchu.

Mamy więc:

$$\dot{x} = -\frac{F_0 g}{Q\omega} \cos \omega t + C_1 \quad (2)$$

$$x = -\frac{F_0 g}{Q\omega^2} \sin \omega t + C_1 t + C_2 \quad (3)$$

przy czym stałe całkowania  $C_1$  i  $C_2$  wyznacza się z warunków początkowych ruchu:

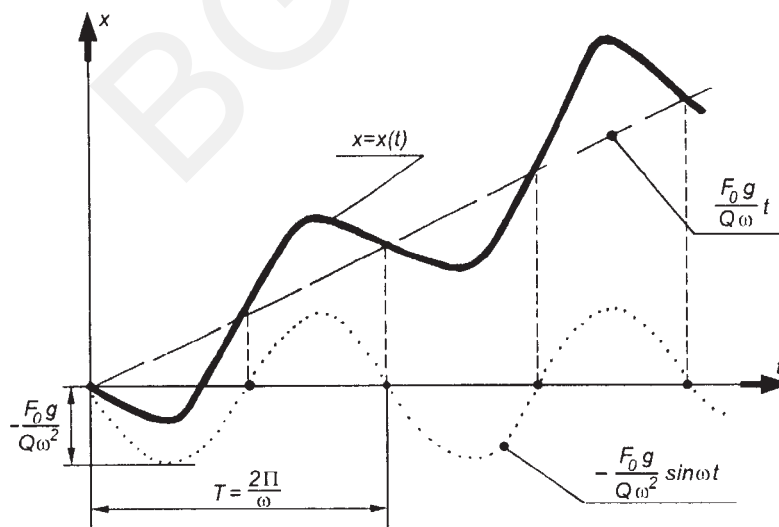
$$\text{dla } t=0, \quad \dot{x}=0, \quad \text{stąd } C_1 = \frac{F_0 g}{Q\omega},$$

$$\text{dla } t=0, \quad x=0, \quad \text{stąd } C_2 = 0.$$

Szukane równanie ruchu ma więc następującą postać

$$x = \frac{F_0 g}{Q\omega} \left( t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (4)$$

Zauważmy, że od wartości prędkości początkowej zależy charakter ruchu bryły. W tym przypadku, co wynika z równania (4), na ruch jednostajny z prędkością  $\frac{F_0 g}{Q\omega}$  nakładają się drgania o amplitudzie  $\frac{F_0 g}{Q\omega^2}$  i okresie  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (rys. 3.2.5b).



Rys. 3.2.5b

Przyjmując inną wartość prędkości początkowej, np.  $\dot{x}(0) = \frac{F_0 g}{Q\omega}$ , otrzymuje się  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 0$  i ruch ma charakter tylko oscylacyjny, zgodnie z równaniem

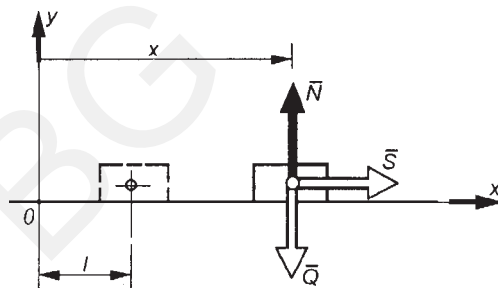
$$x = -\frac{F_0 g}{Q\omega^2} \sin \omega t.$$

Na charakter ruchu nie wpływa natomiast wybór położenia początkowego, które decyduje jedynie o tym, czy w przyjętym układzie odniesienia ruch rozpoczyna się dla  $x = x_0 = 0$  czy  $x = x_0 \neq 0$ .

### ZADANIE 3.2.6

Bryła o masie  $m$  może poruszać się wzdłuż osi  $x$  (rys. 3.2.6a) pod wpływem siły  $\bar{S}$ , przy czym  $|\bar{S}| = S_x = k^2 m x$ , gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem,  $x$  – współrzędną bieżącą. Traktując bryłę jak punkt materialny oraz przyjmując, że w chwili początkowej bryła była w spoczynku w odległości  $l$  od początku układu odniesienia, wyznaczyć równanie skończone ruchu dla dwóch przypadków:

- 1) powierzchnia, po której porusza się bryła jest gładka,
- 2) powierzchnia ta jest chropowata, przy czym współczynnik tarcia wynosi  $\mu$ .



Rys. 3.2.6a

### Rozwiązanie

#### Ad 1)

Do bryły przyłożone są siły; ciężar  $\bar{Q}$  oraz siła  $\bar{S}$  (siły czynne) i  $\bar{N}$  – reakcja normalna podłoża (rys. 3.2.6a). Z treści zadania wynika, że warunki początkowe ruchu są następujące:

$$t = 0, \quad x = l, \quad \dot{x} = 0.$$

Równanie różniczkowe ruchu w odniesieniu do osi  $x$  ma postać

$$m\ddot{x} = S$$

lub

$$\ddot{x} - k^2x = 0 \quad (1)$$

Poszukując rozwiązania w postaci  $x = Ce^{\lambda t}$ , otrzymuje się równanie charakterystyczne  $\lambda^2 - k^2 = 0$ , skąd  $\lambda_{1,2} = \pm k$  i rozwiązanie równania (1) można napisać jako

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} \quad (2)$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  wyznaczono, korzystając z warunków początkowych oraz z równania (2) i z równania (3) otrzymanego po zróźniczkowaniu względem czasu równania (2)

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt} \quad (3)$$

Uwzględniając warunki początkowe ruchu, obliczono  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2l}$  i ostatecznie równanie ruchu otrzymano w postaci

$$x = \frac{1}{2} l (e^{kt} + e^{-kt}) \quad (4)$$

lub

$$x = lchkt.$$

### Ad 2)

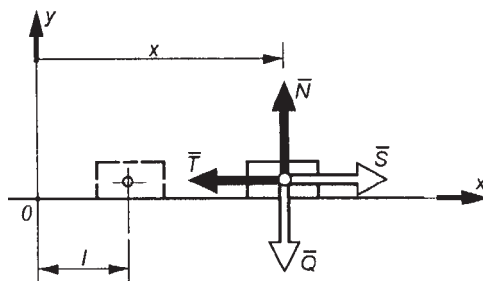
W tym przypadku, poza siłami  $\bar{S}$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{N}$ , do bryły należy przyłożyć siłę tarcia  $\bar{T}$  jak na rysunku 3.2.6b.

Równanie różniczkowe ruchu ma postać

$$m\ddot{x} = S - T.$$

Podstawiając za siłę tarcia  $T = \mu N = \mu Q = \mu mg$ , otrzymano

$$\ddot{x} - k^2x = -\mu g \quad (5)$$



Rys. 3.2.6b



Rozwiązanie równania (5) jest sumą rozwiązań równania jednorodnego ( $x_1$ ) i niejednorodnego ( $x_2$ )

$$x = x_1 + x_2 \quad (6)$$

Rozwiązanie  $x_1$  równania jednorodnego wyraża się zależnością (2), rozwiązanie  $x_2$  przewiduje się w postaci  $x_2 = A$  (prawa strona równania (5) jest stała). Podstawiając  $x_2 = A$  do równania (5), otrzymuje się  $x_2 = \frac{\mu g}{k^2}$  i rozwiązanie (6) otrzymuje postać

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} + \frac{\mu g}{k^2} \quad (7)$$

Dla wyznaczenia stałych  $C_1$  i  $C_2$  obliczono

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt} \quad (8)$$

Korzystając z warunków początkowych ruchu, otrzymano

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left( l - \frac{\mu g}{k^2} \right).$$

Uwzględniając obliczone stałe w równaniu (7) otrzymuje się ostatecznie równanie skończone ruchu

$$x = \frac{1}{2} \left( l - \frac{\mu g}{k^2} \right) (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{\mu g}{k^2} \quad (9)$$

lub

$$x = \left( l - \frac{\mu g}{k^2} \right) chkt + \frac{\mu g}{k^2}.$$

Porównując wyrażenia (4) i (9) można stwierdzić, że jeżeli działa siła tarcia, to ruch bryły jest wolniejszy (współczynnik  $\frac{1}{2} \left( l - \frac{\mu g}{k^2} \right)$  przy  $e^{kt} + e^{-kt}$ , w równaniu (9) jest mniejszy od odpowiedniego współczynnika  $\frac{1}{2}l$  w równaniu (4).

W przypadku granicznym, przy  $l - \frac{\mu g}{k^2} = 0$ , tzn. jeżeli współczynnik tarcia  $\mu = \frac{lk^2}{g}$ , to równanie skończone ruchu ma postać

$$x = \frac{\mu g}{k^2},$$

co oznacza, że bryła znajduje się w spoczynku. Rzeczywiście, jeżeli  $\mu g \geq lk^2$ , tzn.  $\mu Q > lk^2 m$  lub  $T \geq S(x=l)$ , to ruch nie może się rozpocząć, ponieważ siła tarcia  $T$  jest większa od wartości siły  $\bar{S}$  w położeniu początkowym.

Podstawiając  $\mu = 0$  w równaniu (9), otrzymuje się oczywiście równanie (4).

**ZADANIE 3.2.7**

Cieżarek o masie  $m$  porusza się w wodzie pionowo w kierunku dna. Przy opadaniu z prędkością początkową  $\bar{v}_0$  ciężarek osiągnął dno w czasie  $T$  sekund. Obliczyć drogę  $H$ , jaką przebył ciężarek, jeżeli siła oporu ośrodka  $\bar{R} = -km\bar{v}$ , gdzie:  $k$  – stały współczynnik,  $m$  – masa ciężarka,  $\bar{v}$  – prędkość ciężarka.

**Rozwiązanie**

Układ odniesienia przyjęto jak na rysunku 3.2.7. Na ciężarek (punkt materialny) działa siła ciężkości  $\bar{Q}$  i siła oporu wody  $\bar{R}$ , przy czym siła  $\bar{R}$ , jak wynika z treści zadania, działa na kierunku prędkości i ma do niej zwrot przeciwny.

Równanie różniczkowe ruchu względem osi  $x$  ma postać

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n P_{ix} = Q - R.$$

Po podzieleniu obu stron przez masę  $m$  otrzymuje się

$$\ddot{x} = g - k\dot{x} \quad (1)$$

Rozwiązując równanie (1) przy warunkach początkowych:

$$t = 0, \quad \dot{x} = v_0, \quad x = 0,$$

otrzymano równania ruchu  $x = f(x)$ , z którego będzie można obliczyć szukaną drogę  $H$ .

Podstawiając  $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$  oraz rozdzielając zmienne, otrzymuje się

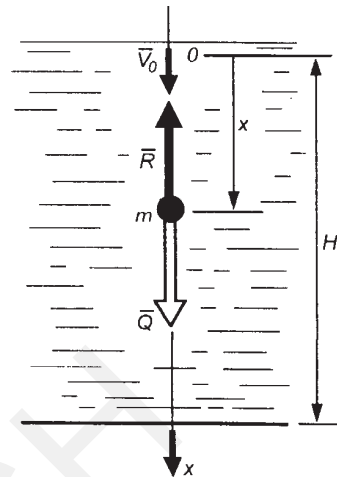
$$\frac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = dt,$$

a po scałkowaniu

$$-\frac{1}{k} \ln(g - k\dot{x}) = t + C_1 \quad (2)$$

Stałą całkowania  $C_1$  wyznaczamy, korzystając z równania (2) i z warunków początkowych ruchu, tj.  $t = 0, \dot{x} = v_0$ , otrzymując

$$C_1 = -\frac{1}{k} \ln(g - kv_0).$$



Rys. 3.2.7

Podstawiając  $C_1$  do równania (2) otrzymuje się

$$\frac{1}{k} \ln \frac{g - kv_0}{g - k\dot{x}} = t$$

i po przekształceniu

$$\dot{x} = \frac{g}{k} - \frac{g - kv_0}{k} e^{-kt} dt \quad (3)$$

Podstawiając w równaniu (3)  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  i rozdzielając zmienne, otrzymano

$$dx = \frac{g}{k} dt - \frac{g - kv_0}{k} e^{-kt} dt,$$

a po scałkowaniu

$$x = \frac{g}{k} t + \frac{g - kv_0}{k^2} e^{-kt} + C_2 \quad (4)$$

Podstawiając do równania (4) warunki początkowe, tj.  $t = 0, x = 0$ , obliczono

$$C_2 = -\frac{g - kv_0}{k^2}$$

i ostatecznie równanie ruchu ciężarka ma postać

$$x = \frac{g}{k} t + \frac{g - kv_0}{k^2} (e^{-kt} - 1) \quad (5)$$

Równanie to pozwala na określenie położenia ciężarka w dowolnej chwili, a więc szukaną drogę  $H$  obliczyć można, podstawiając w równaniu (5)  $x = H$  i  $t = T$ ;

$$H = \frac{g}{k} T + \frac{g - kv_0}{k^2} (e^{-kT} - 1).$$

Jeżeli prędkość początkową dobieramy tak, aby  $v_0 = \frac{g}{k}$ , to ruch ciężarka w wodzie będzie jednostajny, równanie ruchu ma wówczas postać  $x = v_0 t$  i oczywiście droga  $H = v_0 T$ .

### ZADANIE 3.2.8

Z wysokości  $h$  nad powierzchnią ziemi wyrzucono w kierunku poziomym punkt materialny z prędkością  $\bar{v}_0$ . Wyznaczyć równania skończone ruchu punktu, równanie toru, zasięg rzutu  $L$ ; prędkość  $\bar{v}_k$  w chwili upadku na ziemię w dwóch przypadkach:

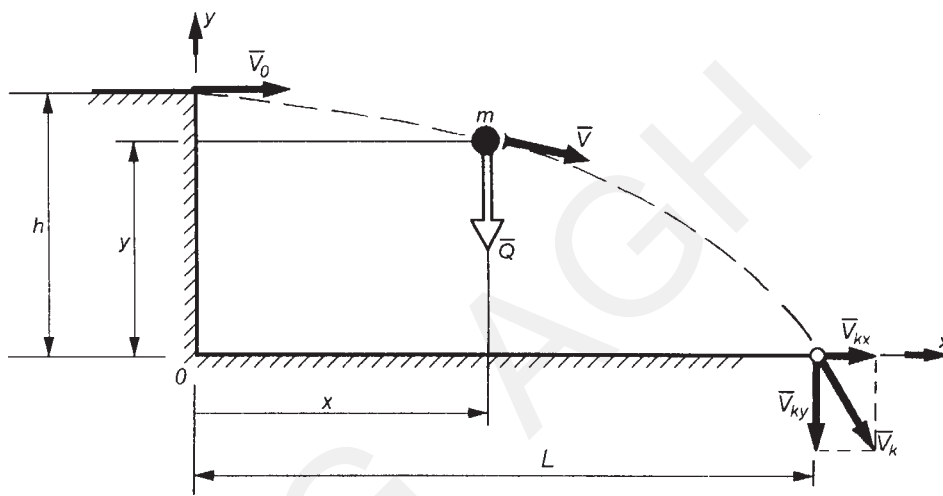
- 1) przy pominięciu oporu powietrza,
- 2) z uwzględnieniem siły oporu powietrza:  $\bar{R} = -km\bar{v}$ ,  $m$  – masa punktu,  $k$  – stały współczynnik.

**Rozwiązanie****Ad 1)**

Przyjmując układ odniesienia jak na rysunku 3.2.8a, warunki początkowe ruchu można zapisać następująco:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = h, \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$

Podczas ruchu na punkt działa jedynie siła ciężkości  $\bar{Q}$ .



Rys. 3.2.8a

Równanie różniczkowe ruchu w zapisie wektorowym ma postać

$$m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{Q},$$

z którego otrzymano dwa równania:

$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = -Q, \quad Q = mg,$$

lub po podzieleniu obu stron tych równań przez masy w postaci:

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

(1)

Rozwiązując równania (1), otrzymano:

$$\dot{x} = C_1 \quad (2)$$

$$\dot{y} = -gt + C_2$$

$$x = C_1 t + C_3 \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_2 t + C_4$$

Stałe całkowania wyznaczono z równań (2) i (3), korzystając z warunków początkowych. Wynoszą one odpowiednio:  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = h$ , i równania ruchu punktu ostatecznie mają postać:

$$x = v_0 t \quad (4)$$

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Równania skończone ruchu pozwalają określić położenie punktu dla dowolnej chwili czasu, przy czym jeżeli chodzi o tor punktu, to równania będąc parametrycznymi równaniami toru, służą do wyznaczenia równania toru w postaci  $y = f(x)$ .

Rugując z równań (4) czas  $t$  (np. obliczając  $t$  z pierwszego równania i wstawiając do równania drugiego), otrzymuje się równanie toru

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (5)$$

Z równania (5) obliczyć można zasięg rzutu  $x_{\max} = L$ , odpowiadający współrzędnej  $y = 0$

$$L = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (6)$$

Zasięg rzutu można obliczyć również z równań (4), wyznaczając czas  $t_1$ , dla którego  $y = 0$ , i obliczony czas wstawiając do równania pierwszego. Wówczas

$$L = x(t_1) = x_{\max} = v_0 t_1.$$

W celu wyznaczenia prędkości  $\bar{v}_k$  w momencie uderzenia o ziemię obliczyć należy współrzędne tej prędkości:

$$\dot{x}_k = v_{kx} \quad \text{i} \quad \dot{y}_k = v_{ky} \quad (\text{rys. 3.2.8a}).$$

Znając stałe  $C_1$  i  $C_2$ , z równań (2) otrzymuje się równania prędkości:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_0 \\ \dot{y} &= -gt\end{aligned}\tag{7}$$

z których wyznaczyć można współrzędne prędkości  $\bar{v}_k$  w momencie uderzenia o ziemię, jeżeli znany jest czas  $t_1$  uderzenia. Czas  $t_1$  wyznacza się z równania  $y = h - \frac{1}{2}gt^2$ , przyjmując, że w momencie uderzenia  $y = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{Dla: } y = 0, \quad t_1 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \dot{x}_k &= v_0 \\ \dot{y}_k &= -\sqrt{2hg}\end{aligned}\tag{8}$$

wartość prędkości  $\bar{v}_k$  wynosi

$$v_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} = \sqrt{v_0^2 + 2hg}\tag{9}$$

a jej kierunek określa się, podając cosinus kierunkowy kąta pomiędzy kierunkiem  $\bar{v}_k$  i osią  $x$

$$\cos(x, \bar{v}_k) = \frac{\dot{x}_k}{v_k} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2hg}}\tag{10}$$

Tak więc w przypadku rzutu poziomego z wysokości  $h$  punkt porusza się po paraboli (równanie (5)), jeżeli nie uwzględnimy oporu powietrza. Przyjmując prędkość początkową  $v_0 = 0$ , równania ruchu punktu mają postać:

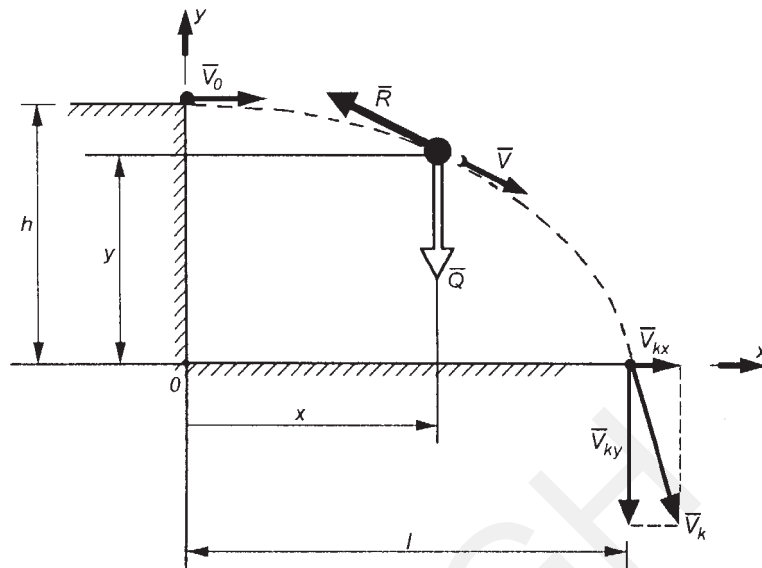
$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= h - \frac{gt^2}{2},\end{aligned}$$

i są równaniami swobodnego spadania punktu materialnego w próżni.

### Ad 2)

Z zapisu siły oporu  $\bar{R}$  wynika, że jest ona proporcjonalna do prędkości  $\bar{v}$ , ma kierunek prędkości i zwrot do niej przeciwny. Punkt z działającymi na niego siłami pokazano na rysunku 3.2.8b. Warunki początkowe ruchu są identyczne jak w przypadku 1), tzn.:

$$\text{dla } t = 0, \quad x = 0, \quad y = h, \quad \dot{x} = v_0, \quad \dot{y} = 0.$$



Rys. 3.2.8b

Wektorowe równanie różniczkowe ruchu

$$m\bar{a} = \bar{Q} + \bar{R}$$

lub

$$m\bar{a} = \bar{Q} - km\bar{v}$$

daje w tym przypadku dwa skalarnie różniczkowe równania:

$$m\ddot{x} = -km\dot{x},$$

$$m\ddot{y} = -mg - km\dot{y}$$

lub

$$\ddot{x} = -k\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y}$$

(11)

Rozwiązując równania (11), mając zadane warunki początkowe, otrzymuje się równanie prędkości:

$$\dot{x} = v_0 e^{-kt}$$

$$\dot{y} = \frac{g}{k} (e^{-kt} - 1)$$

(12)

i równania skończone ruchu:

$$\begin{aligned}x &= \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \\y &= h - \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt})\end{aligned}\quad (13)$$

Rugując z równań (13) czas  $t$ , otrzymuje się równanie toru w postaci

$$y = h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx}{kv_0}\quad (14)$$

Przyjmując w równaniu (14)  $y = 0$ , zasięg  $L = x_{\max}$  rzutu wyznaczyć można z równania

$$h - \frac{g}{k^2} \ln \frac{v_0}{v_0 - kx} + \frac{gx_{\max}}{kv_0} = 0.$$

Współrzędne  $v_{kx}$  i  $v_{ky}$  prędkości  $v_k$  w momencie uderzenia o ziemię oblicza się z równań (12), podstawiając za czas  $t$  wyznaczony z drugiego z równań (13) czas  $t_1$  upadku na ziemię, tj. dla  $y = 0$ , wyznaczamy  $t = t_1$ , wówczas otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= v_{kx} = v_0 e^{-kt_1}, \\ \dot{y}_k &= v_{ky} = \frac{g}{k} (e^{-kt_1} - 1)\end{aligned}$$

i prędkość uderzenia o ziemię

$$v_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} = \sqrt{v_0^2 e^{-2kt_1} + \frac{g^2}{k^2} (e^{-kt_1} - 1)^2}.$$

Kierunek prędkości  $\bar{v}_k$  określić można podobnie jak poprzednio, tzn.

$$\cos(x, \bar{v}_k) = \frac{\dot{x}_k}{v_k} = \frac{v_0 e^{-kt_1}}{\sqrt{v_0^2 e^{-2kt_1} + \frac{g^2}{k^2} (e^{-kt_1} - 1)^2}}.$$

### 3.2.3. Pęd, kręt, zasada równowartości energii kinetycznej i pracy, zasada zachowania energii

#### ZADANIE 3.2.9

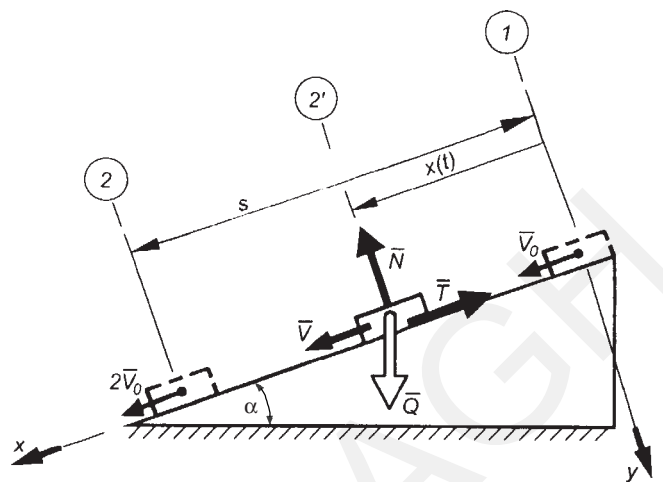
Bryła o masie  $m$  zsuwa się po chropowatej powierzchni nachylonej pod kątem  $\alpha$  do poziomu. Znając współczynnik tarcia  $\mu$  oraz prędkość początkową  $\bar{v}_0$ , obliczyć czas, po którym bryła osiągnie prędkość  $2\bar{v}_0$ .



**Rozwiązanie**

Traktując bryłę jak punkt materialny, rozwiązano zadanie, wykorzystując trzy zasady:

- 1) zasadę pędu i popędu,
- 2) II prawo Newtona.
- 3) zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy.



Rys. 3.2.9

Ruch rozpatrzono w układzie odniesienia  $(x, y)$  przyjętym jak na rysunku 3.2.9, gdzie przez 1 oznaczono położenie początkowe, a przez 2 położenie punktu po osiągnięciu prędkości  $2v_0$ . Dowlone położenie  $2'$  pomiędzy 1 i 2 oznaczono współrzędną  $x(t)$ . Ruch punktu zachodzi pod wpływem siły czynnej  $\bar{Q}$  (ciężar) i sił reakcji: normalnej  $\bar{N}$  i tarcia  $\bar{T}$ .

**Ad 1)**

Zasadę pędu i popędu w odniesieniu do osi  $x$  zapisać można następująco

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \int_0^{t_2} P_x dt, \quad (1)$$

gdzie:

$v_{1x} = v_0$  – prędkość w położeniu początkowym,

$v_{2x} = 2v_0$  – prędkość w położeniu końcowym,

$t_1 = 0$  (chwila początkowa),

$t_2$  – czas osiągnięcia prędkości  $2v_0$ ,

$P_x = Q \sin \alpha - T$  – suma rzutów wszystkich sił na osi  $x$ .

Obliczając  $T = \mu N = \mu Q \cos \alpha$  i podstawiając do równania (1), otrzymuje się

$$m(2v_0) - mv_0 = \int_0^{t_2} (Q \sin \alpha - \mu Q \cos \alpha) dt \quad (2)$$

i stąd po scałkowaniu

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

### Ad 2)

Korzystając z drugiego prawa Newtona, otrzymuje się równanie różniczkowe ruchu w postaci

$$m\ddot{x} = Q(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (3)$$

Całkując równanie (3), mając zadany warunek początkowy:  $t = 0, \dot{x} = v_0$ , otrzymano

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + v_0 \quad (4)$$

Z równania powyższego obliczyć można czas osiągnięcia żądanej prędkości i tak dla  $\dot{x} = 2v_0$  czas  $t_2$  wynosi

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

### Ad 3)

Zasadę równoważności energii kinetycznej i pracy zapisano następująco

$$E_2 - E_1 = L_{1-2}, \quad (5)$$

gdzie:

$E_1, E_2$  – energia kinetyczna punktu w położeniu 1 i 2,

$L_{1-2}$  – praca wykonana przez siły czynne i reakcje na przesunięciu  $s$  (rys. 3.2.9), tj. od położenia 1 do 2.

Dla wygody obliczeń korzystnie jest w tym przypadku przyjąć dowolne położenie punktu po rozpoczęciu ruchu, w związku z czym prędkość punktu w takim położeniu można traktować jako funkcję czasu. Na rysunku 3.2.9 położenie takie oznaczono przez 2'.

Zależność (5) w związku z powyższym przedstawić można następująco

$$E_{2'} - E_1 = L_{1-2'}, \quad (6)$$

gdzie:  $E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$ ,

$$E_{2'} = \frac{1}{2}mv^2(t).$$

Suma prac wszystkich sił działających na punkt na przesunięciu  $x(t)$  wynosi

$$L_{1-2} = Q(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) x(t).$$

Po podstawieniu powyższych zależności do równania (6) otrzymano

$$\frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{1}{2}mv_0^2 = Q(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) x(t) \quad (7)$$

względnie po przekształceniu

$$v(t) = \sqrt{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) x(t) + v_0^2}.$$

Podstawiając  $v(t) = \frac{dx}{dt}$ , otrzymano równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{dx}{\sqrt{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) x(t) + v_0^2}} = dt \quad (8)$$

Rozwiązując równanie (8) przy warunkach początkowych  $t = 0, x = 0$ , otrzymano

$$\sqrt{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) x + v_0^2} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t + v_0 \quad (9)$$

Z równania (9) można wyznaczyć czas  $t$ , po którym punkt znajduje się w położeniu  $x(t)$ , w szczególności czas  $t_2$ , po którym  $x(t_2) = s$ , tj. w położeniu 2, gdy prędkość wynosi  $2v_0$ . Drogę  $x(t_2) = s$  wyliczyć można z równania (7), podstawiając:

$$x(t_2) = s, \quad v(t_2) = 2v_0.$$

Otrzymano

$$x(t_2) = s = \frac{3v_0^2}{2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)},$$

a następnie z równania (9)

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

Wynik ten uzyskać można inaczej, różniczkując względem czasu równanie (7). Otrzymuje się wówczas równanie

$$\frac{1}{2}m \left( 2v(t) \frac{dv(t)}{dt} \right) = Q(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \frac{dx(t)}{dt}, \quad \text{gdzie} \quad \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x}, \quad \frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

lub po przekształceniach równanie

$$m\ddot{x} = Q(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (10)$$

identyczne z równaniem (3) otrzymanym w rezultacie zastosowania II prawa Newtona. Postępując jak w punkcie 2) uzyskuje się szukany czas  $t_2$ .

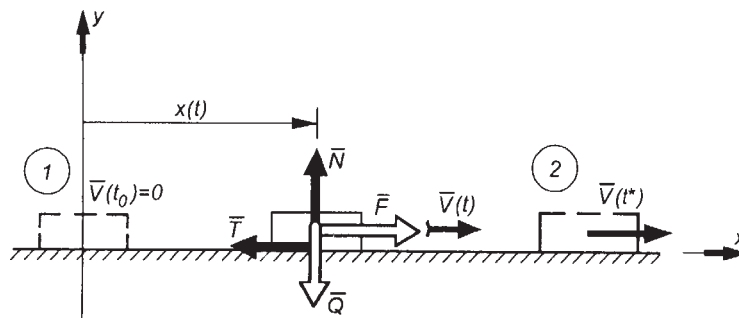
Zastosowane trzy sposoby rozwiązania są równorzędne, przy czym najszybciej prowadzi do celu zasada pędu i popędu, ze względu na to, że wiąże bezpośrednio parametr szukany z wielkościami zadanymi. Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy, podobnie jak; II prawo Newtona, prowadzi do rozwiązywania równania różniczkowego o rząd wyższego niż zasada pędu i popędu, co jak widać wydłuża czas rozwiązania zadania.

### ZADANIE 3.2.10

Ciało o ciężarze  $Q$  porusza się po poziomej chropowatej powierzchni pod działaniem siły proporcjonalnej do czasu  $F = kt$ , gdzie  $k = \text{const}$ . Obliczyć prędkość ciała po czasie  $t^*$ , jeżeli w chwili początkowej znajdowało się w spoczynku, a współczynnik tarcia wynosi  $\mu$ .

### Rozwiązanie

Ze względu na ruch postępowy ciała traktuje się go jak punkt materialny. Ruch punktu rozpatrzono w przyjętym układzie odniesienia jak na rysunku 3.2.10. Na punkt działają siły czynne  $\vec{F}$  i  $\vec{Q}$  oraz siły reakcji  $\vec{N}$  i  $\vec{T}$ . Szukaną prędkość obliczyć można, korzystając z zasady pędu i popędu jako metody, która w tym przypadku najszybciej prowadzi do rozwiązania.



Rys. 3.2.10

Na rysunku 3.2.10 położenie początkowe, tj. w chwili  $t_0 = 0$ , oznaczono przez 1, a końcowe, tj. w chwili  $t = t^*$ , przez 2. Zasadę pędu i popędu zapisano w postaci

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P} dt,$$

gdzie:

$\bar{v}_1$  i  $\bar{v}_2$  – prędkości punktu odpowiednio w chwili  $t_1$  i  $t_2$ ,

$\bar{P}$  – suma geometryczna sił działających na punkt.

Do wyznaczenia szukanej prędkości wykorzystano zasadę pędu i popędu w odniesieniu do osi  $x$ , tzn. po zrzutowaniu powyższego równania wektorowego na oś  $x$ , otrzymuje się

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} P_x dt.$$

W tym przypadku  $v_{2x} = v(t^*)$ ,  $v_{1x} = v(t_0) = 0$ ,  $t_1 = t_0 = 0$ ,  $t_2 = t^*$ ,  $P_x = F - T$ , gdzie siła tarcia  $T = \mu N = \mu Q$ .

Podstawiając  $F = kt$ , otrzymano

$$mv(t^*) = \int_0^{t^*} (kt - \mu Q) dt,$$

a uwzględniając, że  $m = \frac{Q}{g}$ , po scałkowaniu wyznaczono

$$v(t^*) = gt^* \left( \frac{kt^*}{2Q} - \mu \right).$$

Rozwiązanie powyższe uzyskać można, korzystając z innych metod, np. II prawa Newtona lub zasady równowartości energii kinetycznej i pracy, jednakże metody te, prowadzące do rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu, są bardziej czasochłonne niż zastosowana zasada pędu i popędu.

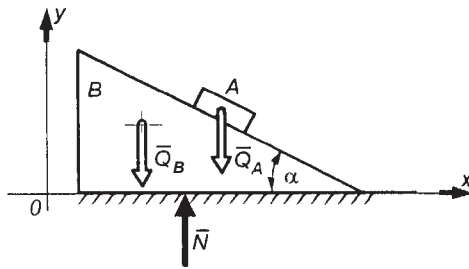
### ZADANIE 3.2.11

Układ materialny składa się z dwóch ciał: ciała  $A$  o ciężarze  $Q_A$  oraz klina  $B$  o ciężarze  $Q_B$  i kącie  $\alpha$ . Pomijając tarcie klina o powierzchnię poziomą, obliczyć prędkość klina, jeżeli ciało  $A$  zsuwa się po nim z prędkością względną  $\bar{v}_w$ , a w chwili początkowej układ znajdował się w spoczynku.

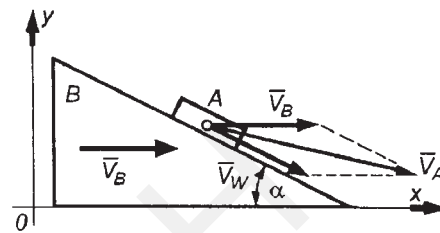
**Rozwiązanie**

Ze względu na ruch postępowy obu ciał traktuje się je jak punkty materialne poruszające się pod działaniem sił czynnych  $\bar{Q}_A$  i  $\bar{Q}_B$  oraz siły biernej  $\bar{N}$  (rys. 3.2.11a).

Rozpatruje się ruch obu brył jako ruch jednego układu i w związku z tym siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy ciałami  $A$  i  $B$  są siłami wewnętrznymi, nie wpływającymi na ruch układu.



Rys. 3.2.11a



Rys. 3.2.11b

Zadanie rozwiązano, korzystając z zasady pędu i popędu

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{P} dt,$$

gdzie:

$\bar{p}_1$  i  $\bar{p}_2$  – pęd układu w chwili  $t_1$  i  $t_2$ ,

$\bar{P}$  – suma geometryczna sił czynnych i reakcji działających na układ.

Na rysunku 3.2.11b pokazano rozkład prędkości obu ciał; prędkość  $\bar{v}_B$  jest prędkością klina i równocześnie prędkością unoszenia ciała  $A$ , prędkość  $\bar{v}_w$  jest prędkością względną ciała  $A$  względem klina, prędkość  $\bar{v}_A$  jest prędkością bezwzględną ciała  $A$ . Po rzutowaniu na oś  $x$  równania wektorowego przedstawiającego zapisaną wyżej zasadę, otrzymuje się

$$p_{2x} - p_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} P_x dt.$$

Suma rzutów wszystkich sił na oś  $x$  równa się zero, tj.

$$P_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0,$$

i przyrost pędu w kierunku osi  $x$  równa się zero

$$p_{2x} - p_{1x} = 0,$$

tzn. spełniona została zasada zachowania pędu w odniesieniu do osi  $x$ . W chwili początkowej układ znajdował się w spoczynku i pęd  $p_{1x}$  w tym położeniu wynosił  $p_{1x} = 0$ , tak więc ostatecznie otrzymuje się zależność:  $p_{2x} = 0$ , tzn. pęd układu w chwili  $t_2$  (dowolne położenie układu) musi być równy zero.

Pęd układu jako geometryczna suma pędów poszczególnych punktów wynosi

$$\bar{p}_2 = m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = m_A (\bar{v}_B + \bar{v}_w) + m_B \bar{v}_B,$$

a po zrzutowaniu na oś  $x$

$$\begin{aligned} p_{2x} &= m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = m_A (v_{Bx} + v_{wx}) + m_B v_{Bx} = \\ &= m_A (v_B + v_w \cos \alpha) + m_B v_B = \frac{Q_A}{g} (v_B + v_w \cos \alpha) + \frac{Q_B}{g} v_B. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że  $p_{2x} = 0$ , otrzymano

$$v_B = - \frac{Q_A}{Q_A + Q_B} v_w \cos \alpha.$$

Znak minus oznacza, że w rzeczywistości klin przesunie się w lewo z prędkością równą co do wartości prędkości obliczonej. Przy rozwiązywaniu innych, podobnych do tego zadań, należy pamiętać o tym, żeby podczas obliczania pędu układu uwzględnić prędkości **bezwzględne** poszczególnych punktów układu.

### ZADANIE 3.2.12

Rozwiązać poprzednie zadanie przy założeniu, że w chwili początkowej klin  $B$  poruszał się w prawo z prędkością  $\bar{v}_B^0$  i ciało  $A$  znajdowało się w spoczynku względem klina.

#### Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu spełniona jest w tym przypadku zasada zachowania pędu względem osi  $x$ , tj.:

$$P_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0,$$

$$p_{2x} - p_{1x} = 0.$$

W chwili początkowej oba ciała poruszały się razem z prędkością klina i rzut pędu na oś  $x$  w tym położeniu wynosił

$$p_{1x} = (m_A + m_B)v_{Bx}^0 = (m_A + m_B)v_B^0.$$

W chwili  $t_2$  pęd układu wyraża się identycznym związkiem jak w zadaniu 3.2.11, a jego rzut na oś  $x$  wynosi

$$p_{2x} = m_A(v_B + v_w \cos \alpha) + m_B v_B.$$

Obliczając z równania  $p_{2x} - p_{1x} = 0$ , prędkość  $v_B$  otrzymuje się

$$v_B = v_B^0 - \frac{Q_A}{Q_A + Q_B} v_w \cos \alpha.$$

Jest to przypadek ogólniejszy, z którego dla  $v_B^0 = 0$  otrzymujemy wynik jak w zadaniu 3.2.11. Dla przyjętych ciężarów ciał i kąta  $\alpha$  klina ruch zachodzić może w prawo lub w lewo, w zależności od prędkości  $v_w$  i prędkości początkowej  $v_B^0$ .

### ZADANIE 3.2.13

Wyznaczyć równanie skończone ruchu i okres drgań wahadła matematycznego o długości  $l$  i masie  $m$ , jeżeli w chwili początkowej  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ . Opory ośrodka pominać i rozpatrzeć małe wahania wokół położenia równowagi.

#### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano trzema metodami, wykorzystując:

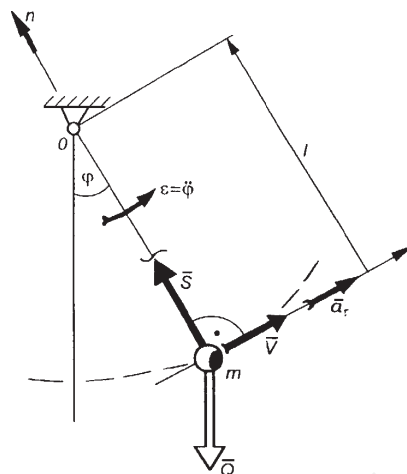
- 1) II prawo Newtona,
- 2) zasadę krętu,
- 3) zasadę zachowania energii.

Rozkład sił działających na wahadło pokazano na rysunku 3.2.13a, przy czym przez  $\vec{S}$  oznaczono siłę działającą w linie. Na rysunku zaznaczono również prędkość liniową wahadła w dowolnym położeniu określonym kątem  $\varphi$ .

#### Ad 1)

Równania różniczkowe ruchu napisano w układzie osi  $\tau, n$  (styczna, normalna). Ze względu na jeden stopień swobody wahadła do opisanego jego ruchu przyjęto współrzędną  $\varphi$ .





Rys. 3.2.13a

Korzystając z II prawa Newtona, można napisać:

$$ma_{\tau} = \sum_{i=1}^n P_{i\tau} = -Q \sin \varphi,$$

$$ma_n = \sum_{i=1}^n P_{in} = S - Q \sin \varphi.$$

Do dalszych rozważań wystarczy rozpatrzyć tylko pierwsze równanie, ponieważ nie szuka się w tym przypadku wartości siły  $\bar{S}$ .

Podstawiając  $Q = mg$ ,  $a_{\tau} = \varepsilon \cdot l = \ddot{\varphi}l$ , po przekształceniach otrzymano

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Jest to nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu opisujące ruch wahadła matematycznego. Biorąc pod uwagę jedynie małe wychylenia wokół położenia równowagi, można napisać, że  $\sin \varphi \cong \varphi$ , i otrzymuje się proste do rozwiązania równanie różniczkowe w postaci:  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$  gdzie  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ .

Rozwiązaniem powyższego równania jest

$$\varphi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Stałe całkowania wyznacza się, obliczając

$$\dot{\varphi} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$

i korzystając z warunków początkowych ruchu, tj.  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ .

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymano  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}$ , a szukane równanie skończone ruchu ma postać  $\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ .

Amplituda drgań wahadła wynosi  $\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}$ , natomiast częstość drgań  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Okres drgań wahadła obliczyć można ze wzoru

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Z otrzymanych wyników widać, że okres drgań wahadła nie zależy od masy wahadła, lecz jedynie od jego długości, tzn. że wahadła o różnych masach i jednakowych długościach wykonują drgania o tym samym okresie.

### Ad 2)

Zasadę krętu napisano względem osi przechodzącej przez punkt 0 i prostopadłej do płaszczyzny ruchu wahadła, tj.

$$\frac{dK_0}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{i(0)}.$$

Wartość krętu względem przyjętej osi wynosi

$$K_0 = mvl = m\omega l^2 = ml^2 \dot{\varphi},$$

a jego pochodna względem czasu

$$\frac{dK_0}{dt} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\varphi}) = ml^2 \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = ml^2 \ddot{\varphi}.$$

Algebraiczna suma momentów względem tej samej osi

$$\sum_{i=1}^n M_{i(0)} = -Ql \sin \varphi = -mgl \sin \varphi.$$

Podstawiając obliczone wyrażenia do zasady krętu, otrzymujemy

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

względnie przyjmując  $\sin \varphi \cong \varphi$ , równanie  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ ,  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ .

Otrzymano więc identyczne równanie różniczkowe ruchu jak poprzednio i dalszy tok postępowania jest taki sam, jak w rozwiązaniu metodą poprzednią.

**Ad 3)**

Ruch wahadła zachodzi na skutek działania siły ciężkości (siły potencjalnej), co przy pominięciu oporów ruchu w łożysku  $A$  (opory tarcia) i oporów ośrodka (powietrza) pozwala na zastosowanie zasady zachowania energii. Zasadę tę w tym przypadku stosuje się w polu potencjalnym. Mówi ona, że suma energii kinetycznej i potencjalnej w każdym punkcie pola potencjalnego jest stała, tzn.

$$E + V = \text{const.}$$

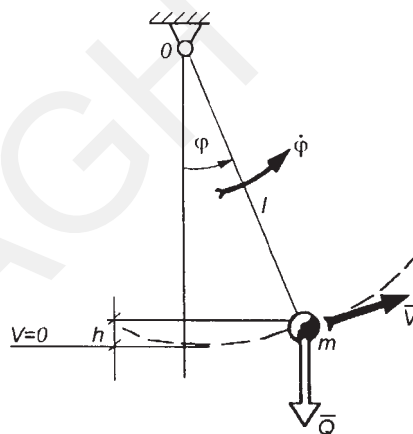
Rozpatruje się dowolne położenie wahadła określone kątem  $\varphi$  (rys. 3.2.13b). W położeniu tym prędkość liniowa wahadła wynosi  $\bar{v}$ . Energia kinetyczna wahadła w tym położeniu wynosi

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2 l^2.$$

Energia potencjalna zależy od położenia i w naszym przypadku wygodnie jest przyjąć poziom zerowy energii potencjalnej ( $V = 0$ ) w najniższym położeniu wahadła. Przy takim założeniu energia potencjalna wahadła będzie zawsze większa lub równa zero.

Obliczając energię potencjalną, otrzymano

$$V = Q \cdot h = mgl(1 - \cos \varphi) = mgl(1 - \cos \varphi).$$



Rys. 3.2.13b

Podstawiając otrzymane wyrażenia na energię kinetyczną i potencjalną do zasady zachowania energii otrzymuje się

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const.}$$

Różniczkując powyższy związek według czasu i porządkując go, uzyskuje się równanie różniczkowe ruchu wahadła w postaci:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

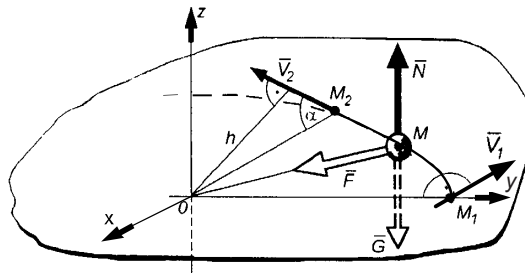
Wynik powyższy jest również identyczny z wynikiem otrzymanym dwiema poprzednimi metodami.

Należy zaznaczyć, że do rozwiązania zadania można wykorzystać również inne metody, np. zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy, zasadę d'Alamberta lub równania Lagrange'a II rodzaju.

**ZADANIE 3.2.14**

Punkt materialny porusza się po gładkiej poziomej powierzchni pod wpływem oddziaływania siły centralnej  $\vec{F}$  o prostej działania przechodzącej stale przez punkt 0 (rys. 3.2.14). Obliczyć prędkość  $v_2$  punktu w położeniu  $M_2$ , jeżeli w położeniu  $M_1$  prędkość  $v_1 = 4$  m/s, przy czym

$$\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{3}{2}, \quad \alpha = 60^\circ.$$



Rys. 3.2.14

**Rozwiązanie**

Prędkość  $v_2$  wyznacza się, wykorzystując zasadę krętu względem osi  $z$ , prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez punkt 0. Na punkt  $M$  oprócz siły  $\vec{F}$  działają siły: ciężkości  $\vec{G}$  i reakcja normalna więzów  $\vec{N}$ .

Zasada krętu względem osi  $z$  ma postać

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz},$$

gdzie  $\sum_{i=1}^n M_{iz}$  jest algebraiczną sumą momentów wszystkich sił względem osi  $z$ .

Siła  $\vec{F}$  jest siłą centralną, a siły  $\vec{G}$  i  $\vec{N}$  są równoległe do osi  $z$  i w związku z tym  $\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$ . Oznacza to, że  $\frac{dK_z}{dt} = 0$  i  $K_z = \text{const}$ . Spełniona jest więc zasada zachowania krętu względem osi  $z$ , a to znaczy, że kręt punktu  $M$  względem tej osi jest stały w każdym położeniu. Można więc przyrównać kręty punktu w położeniu  $M_1$  i  $M_2$ , tj.  $K_{1z}$  i  $K_{2z}$ .

Obliczając  $K_{1z} = mv_1 \cdot OM_1$ ,  $K_{2z} = mv_2 \cdot h = mv_2 \cdot OM_2 \sin \alpha$ , otrzymuje się  $mv_1 \cdot OM_1 = mv_2 \cdot OM_2 \sin \alpha$  i stąd

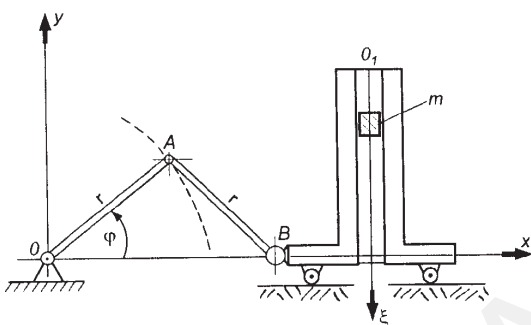
$$v_2 = v_1 \frac{OM_1}{OM_2 \sin \alpha}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymano  $v_2 = 6,92$  m/s. Zadanie powyższe jest typowym przykładem na zastosowanie zasady krętu punktu materialnego. Inne metody wiążą się ze znacznymi trudnościami obliczeniowymi.

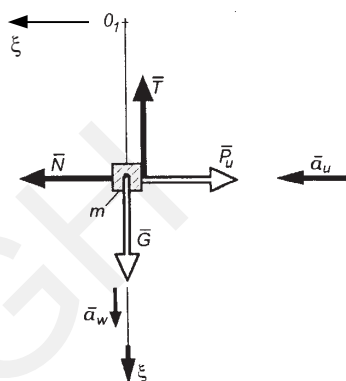
### 3.2.4. Dynamika punktu w ruchu względnym

#### ZADANIE 3.2.15

Ruch korby  $OA$  (rys. 3.2.15) opisuje funkcja  $\varphi = \frac{1}{4}\pi t$ . Klocek o masie  $m$  zablokowany jest w pionowej prowadnicy w położeniu  $O_1$ . W chwili  $t = 0$  klocek zostaje odblokowany i zaczyna poruszać się wzdłuż prowadnicy. Wyznaczyć prawo ruchu klocka względem prowadnicy oraz maksymalną siłę normalną oddziaływania prowadnicy na klocek, jeżeli współczynnik tarcia klocka o prowadnicę wynosi  $\mu$ .



Rys. 3.2.15



Rys. 3.2.15a

#### Rozwiązanie

W układzie odniesienia względnym, przyjętym jak na rysunku 3.2.15a, na klocek działają siły: ciężkości  $\bar{G}$ , normalna  $\bar{N}$ , tarcia  $\bar{T}$  i unoszenia  $\bar{P}_u = -m\bar{a}_u$ . Ruch prowadnicy jest ruchem postępowym i jest ruchem unoszenia klocka, a więc przyspieszenie unoszenia  $\bar{a}_u$  jest równe np. przyspieszeniu punktu  $B$ ;  $a_u = a_B = \ddot{x}$ . Obliczając współrzędną  $x$  punktu  $B$ , otrzymuje się

$$x = 2r \cos \varphi = 2r \cos \frac{1}{4}\pi t,$$

a następnie

$$\ddot{x} = -\frac{1}{8}\pi^2 r \cos \frac{1}{4}\pi t$$

oraz wartość siły unoszenia

$$P_u = m|\bar{a}_u| = \frac{1}{8}\pi^2 r m \cos \frac{1}{4}\pi t.$$

Ze względu na postępowy ruch unoszenia siła Coriolisa  $\bar{P}_C$  równa jest zeru.

Z wektorowego równania ruchu względnego

$$m\bar{a}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u = \bar{G} + \bar{T} + \bar{N} + \bar{P}_u,$$

gdzie  $\bar{a}_w(\xi, 0)$ ,

otrzymuje się dwa równania skalarne:

$$m\ddot{\xi} = G - T,$$

$$0 = N - P_u,$$

przy czym  $T = \mu N = \frac{1}{8}\pi^2 r \mu \cos \frac{1}{4}\pi t$ ,  $G = mg$ .

Z pierwszego z tych równań otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu względnego

$$\ddot{\xi} = g - \frac{1}{8}\pi^2 r \mu \cos \frac{1}{4}\pi t,$$

a z drugiego wartość siły normalnej oddziaływania prowadnicy

$$N = \frac{1}{8}\pi^2 r m \cos \frac{1}{4}\pi t.$$

Przyjmując warunki początkowe ruchu względnego  $\xi = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$  dla  $t = 0$ , po rozwiązaniu równania różniczkowego otrzymuje się prawo ruchu klocka w postaci

$$\xi = \frac{1}{2}gt^2 + 2\mu r \left( \cos \frac{1}{4}\pi t - 1 \right).$$

Maksymalna siła normalna wynosi  $N_{\max} = \frac{1}{8}\pi^2 r m$  i odpowiada skrajnym położeniom prowadnicy.

### ZADANIE 3.2.16

Układ mechaniczny, którego model pokazany jest na rysunku 3.2.16, napędzany jest korbą  $O_1A$  poruszającą się zgodnie z równaniem  $\varphi = \omega t$ ,  $\omega = \text{const}$ . Kłosek  $K$  o masie  $m$  umieszczony jest w gładkiej prowadnicy pochylonej pod kątem  $\alpha$ . Wyznać prawo ruchu klocka w układzie względnym  $Oxy$ , jeżeli w chwili początkowej znajdował się on w spoczynku w położeniu określonym współrzędną  $x = x_0$ . Dane są  $O_1A = O_2D = AB = CD = r$ .

### Rozwiązanie

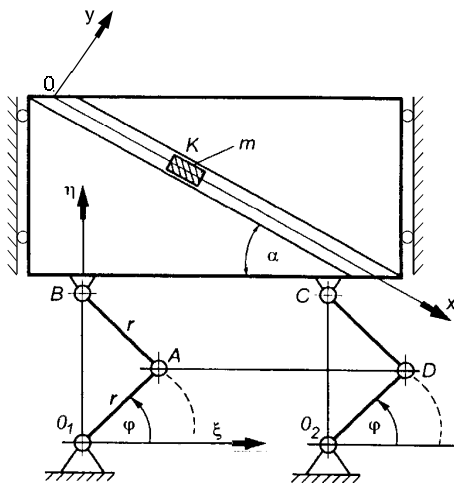
Ruch unoszenia (ruch układu  $Oxy$ ) jest ruchem postępowym, a więc siła Coriolisa jest równa zero. Przyspieszenie unoszenia  $\bar{a}_u$  punktu  $K$  jest równe przyspieszeniu punktu  $B$ . Równanie ruchu punktu  $B$  (w układzie  $\xi, \eta$ ) ma postać

$$\eta = 2r \sin \varphi = 2r \sin \omega t$$

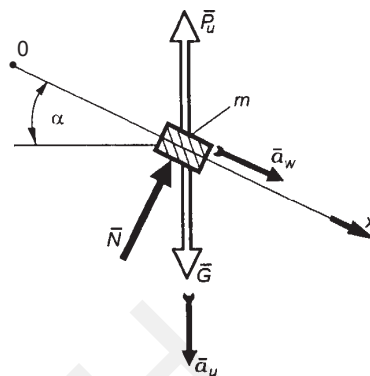
i stąd współrzędna przyspieszenia unoszenia

$$a_u = \ddot{\eta} = -2r\omega^2 \sin \omega t.$$

Siła unoszenia  $\bar{P}_u = -m\bar{a}_u$ , przy czym jej wartość wynosi  $P_u = m|\bar{a}_u| = m2r\omega^2 \sin \omega t$ .



Rys. 3.2.16



Rys. 3.2.16a

Przykładając do klocka siły działające w układzie względnym  $x, y$  (rys. 3.2.16a) oraz korzystając z równania dynamicznego ruchu względnego  $m\vec{a}_w = \vec{P}_b + \vec{P}_u$ , otrzymuje się skalarne równanie rzutów na oś  $x$

$$ma_{wx} = G \sin \alpha - P_u \sin \alpha,$$

a po podstawieniach równanie różniczkowe ruchu względnego ( $a_{wx} = \ddot{x}$ )

$$\ddot{x} = g \sin \alpha - 2r\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t.$$

Całkując powyższe równanie otrzymuje się:

$$\dot{x} = gt \sin \alpha + 2r\omega \sin \alpha \cos \omega t + C_1,$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + 2r \sin \alpha \sin \omega t + C_1 t + C_2.$$

Przyjmując warunki początkowe  $t = 0, x = x_0, \dot{x} = 0$ , wyznaczono stałe całkowania  $C_1 = -2r\omega \sin \alpha, C_2 = x_0$ .

Szukane prawo ruchu względnego ma postać

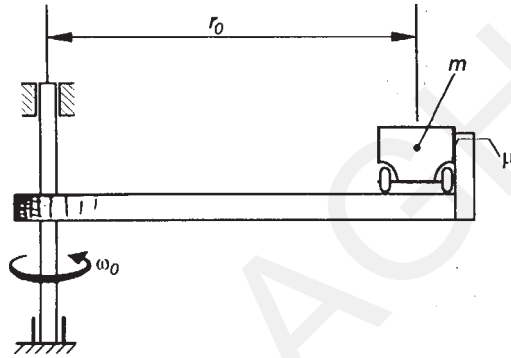
$$x = \left[ \frac{1}{2}gt^2 + 2r(\sin \omega t - \omega t) \right] \sin \alpha + x_0.$$

Rzutu dynamiczne równanie ruchu względnego na oś  $Oy$ , obliczyć można siłę reakcji

$$N = m(g - 2r\omega^2 \sin \omega t) \cos \alpha.$$

**ZADANIE 3.2.17**

Ruchomy podest (rys. 3.2.17) obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . Na podeście w odległości  $r_0 = 1 \text{ m}$  od osi obrotu znajduje się pojemnik na rolkach oparty o pionową listwę prowadzącą. Pomiedzy pionową listwą a boczną ścianką pojemnika występuje tarcie o współczynniku tarcia  $\mu = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ . Długość listwy prowadzącej  $l = 2 \text{ m}$ , masa pojemnika  $m = 20 \text{ kg}$ . Obliczyć prędkość względną pojemnika w chwili opuszczenia podestu, a także składową normalną  $N_1$  reakcji listwy pionowej dla dwóch wartości prędkości początkowej względnej  $v_0 = 0,25 \text{ m/s}$  i  $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ , jeżeli ruch względny pojemnika zachodzi wzdłuż listwy prowadzącej przeciwnie do  $\omega_0$ .



Rys. 3.2.17

**Rozwiązanie**

Przyjmując względny układ odniesienia  $\xi, \eta, \zeta$  jak na rysunku 3.2.17a oraz przykładając siły działające na pojemnik, otrzymano dynamiczne równanie ruchu względnego w postaci wektorowej

$$m\bar{a}_w = \bar{G} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{T} + \bar{P}_u^n + \bar{P}_{\text{cor}},$$

gdzie:

$$\bar{a}_w(\ddot{\xi}, 0, 0),$$

$$\bar{P}_{\text{cor}} = -m\bar{a}_{\text{cor}},$$

$$\bar{P}_u^n = -m\bar{a}_u^n.$$

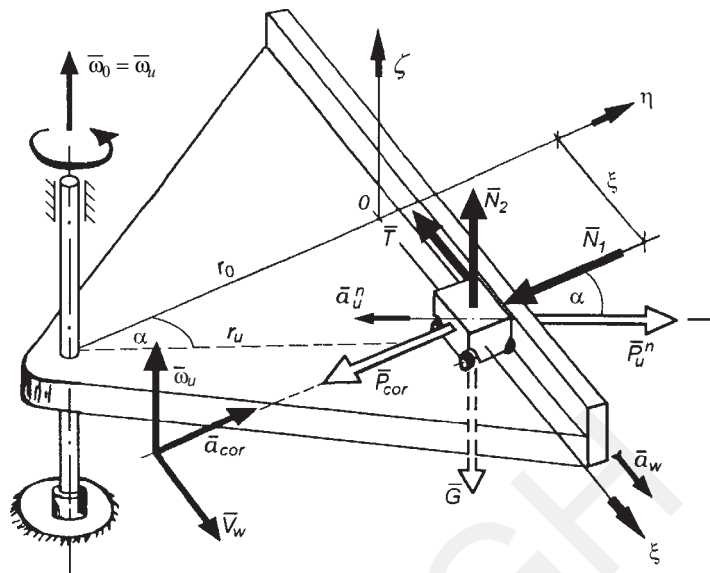
Po zrzutowaniu tego równania na osie układu względnego otrzymano trzy skalarne równania:

$$m\ddot{\xi} = P_u^n \sin \alpha - T,$$

$$0 = P_u^n \cos \alpha - N_1 - P_{\text{cor}},$$

$$0 = N_2 - G.$$





Rys. 3.2.17a

Siła unoszenia ma tylko składową normalną (obrotowy ruch unoszenia jest jednostajny,  $\omega_0 = \text{const}$ ), której wartość wynosi

$$P_u^n = m|\bar{a}_u^n| = m\omega_0^2 r_u,$$

gdzie  $r_u$  jest promieniem obrotu w ruchu unoszenia.

$$\text{Siła Coriolisa } P_{\text{cor}} = ma_{\text{cor}} = 2m\omega_u v_w = 2m\omega_0 \dot{\xi}.$$

$$\text{Siła tarcia } T = \mu N_1 = \mu(P_u^n \cos \alpha - P_{\text{cor}}) = \mu(m\omega_0^2 r_0 - 2m\omega_0 \dot{\xi}),$$

$$\text{przy czym } \cos \alpha = \frac{r_0}{r_u}, \quad \sin \alpha = \frac{\xi}{r_u}.$$

Uwzględniając powyższe, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\ddot{\xi} - 2\mu\omega_0 \dot{\xi} - \omega_0^2 \xi = -\mu\omega_0^2 r_0,$$

$$N_1 = m\omega_0^2 r_0 - 2m\omega_0 \dot{\xi},$$

$$N_2 = mg.$$

Obliczenie siły  $N_1$  możliwe jest po wyznaczeniu prędkości względnej  $\dot{\xi}$  i w związku z tym w pierwszej kolejności należy rozwiązać równanie różniczkowe ruchu względnego.

Podstawiając

$$\xi = \xi_1 + \mu r_0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_1, \quad \ddot{\xi} = \ddot{\xi}_1,$$

otrzymuje się jednorodne równanie różniczkowe

$$\ddot{\xi}_1 - 2\mu\omega_0\dot{\xi}_1 - \omega_0^2\xi_1 = 0.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 - 2\mu\omega_0\lambda - \omega_0^2 = 0,$$

a rozwiązanie równania różniczkowego

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych pierwiastki równania charakterystycznego równe są  $\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ .

Do wyznaczenia stałych  $C_1$  i  $C_2$  wykorzystano równanie  $\xi_1(t)$  i po zróżniczkowaniu

$$\dot{\xi}_1 = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t},$$

korzystając z warunków początkowych:

$$t = 0, \quad \xi = 0, \quad \dot{\xi} = v_0,$$

obliczono dla  $t = 0$ ,  $\xi_1 = \xi - \mu r_0 = -\mu r_0$ ,  $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi} = v_0$  i otrzymano układ równań, opisujących położenie i prędkość pojemnika w funkcji czasu i dla prędkości początkowej:

$$\xi = \frac{1-2v_0}{6} \sqrt{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \frac{1+4v_0}{12} \sqrt{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\dot{\xi} = \frac{1-2v_0}{6} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \frac{1+4v_0}{12} e^{\sqrt{2}t}.$$

Prędkość względną  $v_1$ , z jaką pojemnik opuści podest, obliczono z drugiego z powyższych równań, wyznaczając uprzednio z równania pierwszego czas  $t_1$  opuszczenia podestu dla  $\xi = \frac{1}{2}l$ .

Dla prędkości początkowej  $v_0 = 0,25$  m/s, czas  $t_1 = 0,43$  s i prędkość  $v_1 \cong 0,4$  m/s.

Dla prędkości początkowej  $v_0 = 0,5$  m/s, czas  $t_1 = 0,41$  s i prędkość  $v_1 \cong 0,9$  m/s.

Odpowiadające obliczonym prędkościom  $v_1$  składowe normalne  $N_1$  reakcji listwy pionowej wynoszą  $4N$  i  $-16N$ .

Ujemna wartość siły  $N_1 = -16N$ , odpowiadająca początkowej prędkości  $v_0 = 0,5$  m/s, świadczy o tym, że dla przyjętych parametrów kinematycznych, masowych i geometrycznych, pojemnik nie będzie dociskany do listwy prowadzącej. Prowadzenie pojemnika w tej części podestu zapewni listwa umieszczona po drugiej stronie pojemnika w stosunku do przyjętej na rysunku 3.2.17a.

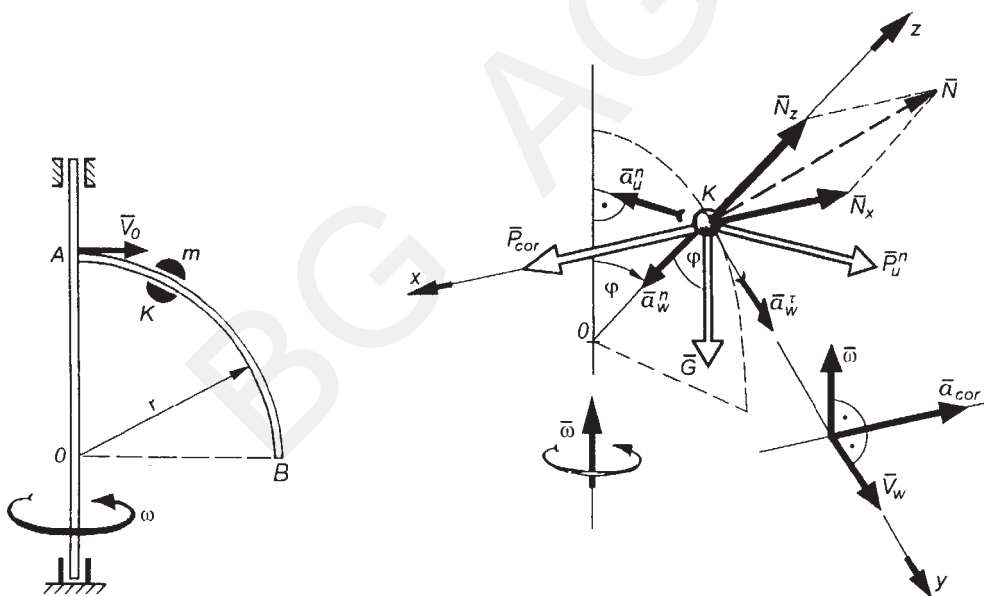
Wniosek ten wynika również z analizy równania sił względem osi  $\eta$ , co prowadzi do warunku  $N_1 > 0$  dla zapewnienia docisku do listwy. Prostoliniowy ruch względny zapewnić można, wprowadzając rozwiązanie konstrukcyjne w postaci dwóch równoległych listw. W zależności od parametrów układu reakcje boczne występować będą na jednej lub drugiej listwie takiego przewodnika.

### ZADANIE 3.2.18

Pierścień o masie  $m$  (rys. 3.2.18) rozpoczyna ruch z prędkością początkową  $\bar{v}_0$  po gładkiej prowadnicy  $AB$  od punktu  $A$  do  $B$ . Prowadnica obraca się ze stałą prędkością kątową  $\bar{\omega}$  względem pionowej osi obrotu. Promień krzywizny prowadnicy wynosi  $r$ . Obliczyć prędkość względną pierścienia w momencie opuszczania prowadnicy oraz siłę reakcji prowadnicy.

### Rozwiązanie

Siły działające na pierścień pokazano na rysunku 3.2.18a, przy czym dla wygody obliczeń układ odniesienia przyjęto tak, że oś  $y$  jest styczna do prowadnicy, a oś  $z$  poprowadzona jest wzdłuż promienia  $r$ . Ruch względny opisano współrzędną kątową  $\varphi$ .



Rys. 3.2.18

Rys. 3.2.18a

Siłę reakcji  $\bar{N}$  prowadnicy rozłożono na dwie składowe  $\bar{N}_x$  i  $\bar{N}_z$ . Siła unoszenia  $\bar{P}_u = \bar{P}_{u_n}$  działa w płaszczyźnie  $yz$  i jest prostopadła do osi obrotu prowadnicy. Równanie dynamiczne ruchu względnego ma postać

$$m\bar{a}_w = m\bar{g} + \bar{N}_x + \bar{N}_y + \bar{P}_u + \bar{P}_{cor}, \quad \text{gdzie} \quad \bar{a}_w = \bar{a}_w^\tau + \bar{a}_w^n.$$

Rzutuując to równanie na osie układu odniesienia otrzymano:

$$ma_{wx} = 0 = P_{\text{cor}} - N_x,$$

$$ma_{wy} = ma_w^\tau = mg \sin \varphi + P_u \cos \varphi,$$

$$ma_{wz} = -ma_w^n = N_z + P_u \sin \varphi - mg \cos \varphi.$$

Wprowadzając  $v_w = v$  i  $a_w^\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{v}{r}$ ,  $P_u = P_u^n = ma_u^n = m\omega^2 r \sin \varphi$ , drugie z równań sił zapisać można następująco

$$m \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{v}{r} = mg \sin \varphi + m\omega^2 r \sin \varphi \cos \varphi,$$

lub po rozdzieleniu zmiennych

$$v dv = \left( gr \sin \varphi + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin 2\varphi \right) d\varphi.$$

Całkując powyższe równanie otrzymano  $\frac{1}{2}v^2 = -gr \cos \varphi - \frac{1}{4}\omega^2 r^2 \cos 2\varphi + C_1$  i korzystając z warunku początkowego dla  $t = 0$ ,  $v = v_0$ ,  $\varphi = 0$  wyznaczono  $C_1 = r \left( g + \frac{1}{4}\omega^2 r \right) + \frac{1}{2}v_0^2$  i ostatecznie

$$v = \sqrt{r[2g(1 - \cos \varphi) + 0,5\omega^2 r(1 - \cos 2\varphi)] + v_0^2}.$$

Wprowadzenie współrzędnej kątowej  $\varphi$  pozwoliło na uzyskanie wygodnej do analizy zależności  $v = v(\varphi)$ .

Prędkość względną w momencie opuszczenia pierścienia prowadnicy obliczyć można podstawiając  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$v = \sqrt{r(2g + \omega^2 r) + v_0^2}.$$

Obliczając:

$$N_x = P_{\text{cor}} = 2m\omega v \cos \varphi,$$

$$N_z = m \left[ g(3 \cos \varphi - 2) - 2\omega^2 r \sin^2 \varphi - \frac{v_0^2}{r} \right]$$

i podstawiając  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , otrzymuje się

$$N_x = 0, \quad N_z = -m \left( 2g + 2\omega^2 r + \frac{v_0^2}{r} \right)$$

oraz wartość reakcji prowadnicy  $N = |N_z|$ .

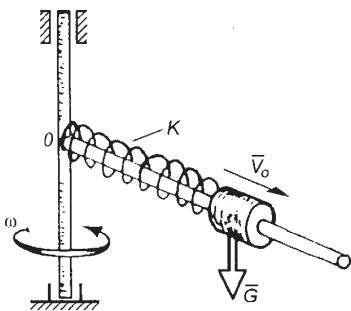
### ZADANIE 3.2.19

Tuleja o ciężarze  $G = 50 \text{ N}$  może poruszać się po gładkim poziomym pręcie obracającym się dookoła pionowej osi z prędkością kątową  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$  (rys. 3.2.19). Do tulei zamocowana jest jednym końcem liniowa sprężyna o współczynniku sprężystości  $k = 520 \text{ N/m}$  i długości swobodnej  $l_0 = 0,5 \text{ m}$ . Drugi koniec sprężyny zamocowany jest w osi obrotu. Wyznaczyć:

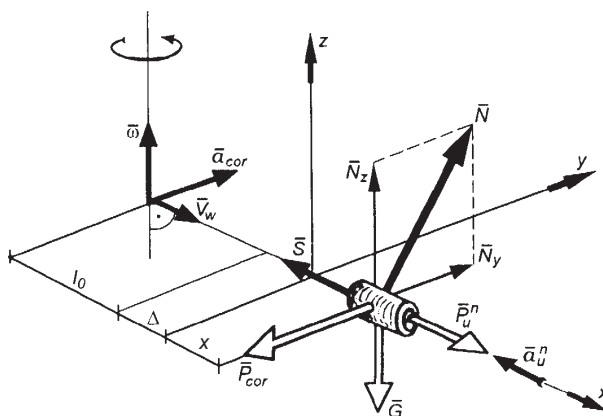
- 1) położenie tulei w stanie równowagi względnej,
- 2) maksymalną odległość tulei od osi obrotu, jeżeli nadano jej prędkość początkową  $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$ ,
- 3) siłę reakcji pręta.

### Rozwiązanie

Siły działające na tuleję w układzie względnym  $xyz$  pokazano na rysunku 3.2.19a.



Rys. 3.2.19



Rys. 3.2.19a

Dynamiczne równanie ruchu względnego ma postać

$$m\bar{a}_w = \bar{G} + \bar{N} + \bar{S} + \bar{P}_u + \bar{P}_{\text{cor}},$$

gdzie:

$\bar{S}$  – siła sprężystości sprężyny,

$\bar{P}_u = \bar{P}_u^n$  – siła unoszenia,

$\bar{N} = \bar{N}_y + \bar{N}_z$  – siła reakcji pręta.

Rzutuąc równanie dynamiczne na oś  $x$  i korzystając z warunku równowagi względnej, tj.  $\bar{a}_w = 0$  i  $\bar{v}_w = 0$ , otrzymuje się skalarne równanie sił w położeniu równowagi względnej

$$P_u^n - S_0 = 0,$$

gdzie:

$S_0 = k \cdot \Delta$  – siła sprężystości w położeniu równowagi,

$\Delta$  – wydłużenie sprężyny w tym położeniu,

$P_u^n = ma_u^n = m\omega^2(l_0 + \Delta)$  – siła unoszenia.

Uwzględniając powyższe, otrzymuje się z równania równowagi względnej wydłużenie sprężyny

$$\Delta = \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2}.$$

Położenie tulei w stanie równowagi względnej w stosunku do osi obrotu obliczyć można z zależności

$$l = l_0 + \Delta.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymano  $\Delta = 0,02$  m i  $l = 0,52$  m. Maksymalną odległość tulei od osi obrotu przy zadanej prędkości początkowej  $v_0$  można otrzymać, rozwiązując równanie ruchu względnego po zrzutowaniu dynamicznego równania wektorowego na oś  $x$

$$ma_w = P_u^n - S.$$

Podstawiając:

$$P_u^n = ma_u^n = m\omega^2(l_0 + \Delta + x),$$

$$S = k(\Delta + x),$$

$$a_w = \ddot{x},$$

otrzymano równanie różniczkowe ruchu względnego

$$m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = m\omega^2(l_0 + \Delta) - k\Delta.$$

Uwzględniając otrzymaną zależność na wydłużenie  $\Delta$ , powyższe równanie ma postać

$$m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = 0.$$

Dla danych liczbowych w zadaniu  $k - m\omega^2 = 500 \text{ N/m} > 0$  rozwiązanie równania różniczkowego będzie miało postać

$$x = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}.$$

Obliczając  $\dot{x} = -C_1\alpha \sin \alpha t + C_2\alpha \cos \alpha t$  oraz korzystając z warunków początkowych ruchu dla  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\dot{x} = v_0$ , obliczono stałe całkowania  $C_1 = 0$  i  $C_2 = \frac{v_0}{\alpha}$ , otrzymując skończone równanie ruchu względnego

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t \right).$$

Równanie to opisuje ruch względny jako drgania harmoniczne o amplitudzie  $a_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}$ .

Maksymalna odległość tulei od osi obrotu wynosi

$$L = l_0 + \Delta + a_0 = l_0 + \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2} + v_0 \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2}}.$$

Po uwzględnieniu danych liczbowych  $L = 0,57 \text{ m}$ .

Obliczając składowe siły reakcji z równań:

$$N_y - P_{\text{cor}} = 0,$$

$$N_z - G = 0.$$

gdzie:

$$P_{\text{cor}} = ma_{\text{cor}} = 2m\omega v_w = 2m\omega \dot{x}, \quad G = mg,$$

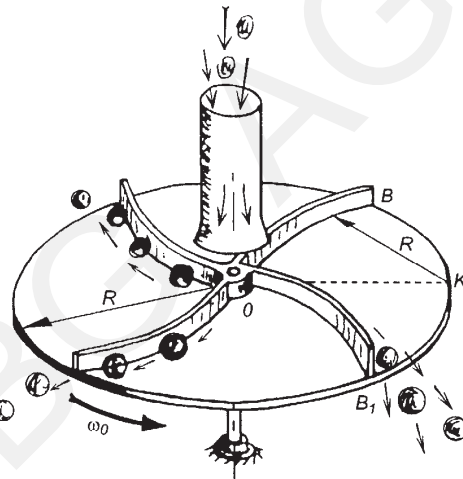
$$\dot{x} = v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t\right),$$

otrzymuje się, przyjmując wartość przyspieszenia ziemskiego  $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = 50\sqrt{0,4\cos^2 \omega t + 1}.$$

### ZADANIE 3.2.20

Turbinka rozrzutnika granulatu obraca się wokół pionowej osi ze stałą prędkością kątową  $\omega_0$  (rys. 3.2.20). Padające w pobliżu osi obrotu cząstki są zgarniane przez łopatki turbiny i wyrzucane na zewnątrz. Promień tarczy oraz łopatki wynosi  $R$ . Pomijając tarcie, wyznaczyć prędkość bezwzględną cząstek w momencie wyrzucania.



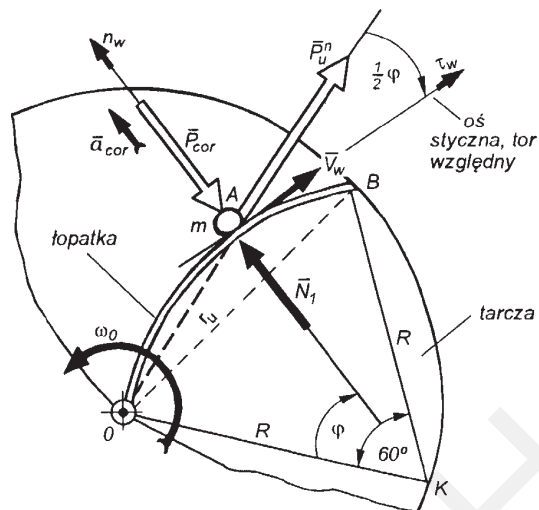
Rys. 3.2.20

### Rozwiązanie

Siły działające na cząsteczkę o masie  $m$  w płaszczyźnie tarczy turbinki pokazano na rysunku 3.2.20a. Siła ciężkości  $\vec{G}$ , prostopadła do tarczy, równoważy się z reakcją  $\vec{N}_2$  tarczy. Siła  $\vec{N}_1$  jest reakcją łopatki działającą na cząstkę granulatu. Siła unoszenia  $\vec{P}_u$  ma tylko składową normalną  $\vec{P}_u^n$  działającą wzdłuż kierunku  $OA$ , przy czym  $OA = r_u$  jest promieniem unoszenia. Do opisu ruchu względnego wygodnie jest przyjąć współrzedną kątową  $\varphi$ . Równanie wektorowe ruchu względnego cząstki ma postać

$$m\vec{a}_w = \vec{P}_{\text{cor}} + \vec{N}_1 + \vec{P}_u^n + \vec{N}_2 + \vec{G}, \quad \text{gdzie} \quad \vec{a}_w = \vec{a}_w^t + \vec{a}_w^n.$$





Rys. 3.2.20a

Rzutuując powyższe równanie na osie  $\tau_w$  i  $n_w$  przyjętego układu odniesienia, otrzymuje się:

$$ma_w^\tau = P_u^n \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$ma_w^n = P_{cor} - N_1 - P_u^n \sin \frac{\varphi}{2},$$

gdzie:

$$a_w^\tau = \ddot{\varphi}R,$$

$$a_w^n = \dot{\varphi}^2 R,$$

$$P_u^n = ma_u^n = m\omega_0^2 r_u = m\omega_0^2 \cdot 2R \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$P_{cor} = ma_{cor} = m2\omega_0 v_w = 2m\omega_0 R \dot{\varphi}.$$

Po uwzględnieniu powyższych związków równania ruchu względnego mają postać:

$$\ddot{\varphi} = R\omega_0^2 \sin \varphi,$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = 2m\omega_0 R \dot{\varphi} - 2m\omega_0^2 R \sin^2 \frac{\varphi}{2} - N_1.$$

Podstawiając  $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega$ , z pierwszego równania otrzymano  $\omega d\omega = R\omega_0^2 \sin \varphi d\varphi$ .

Przyjmując warunki początkowe dla  $t = 0$ ,  $v_w = 0$  (z tego wynika, że  $\omega = 0$ ),  $\varphi = \varphi_0$ , po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych otrzymano

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}.$$

Z warunków geometrycznych tarczy rozrzutnika wynika, że  $0 \leq \varphi \leq 60^\circ$  i prędkość względna w momencie wyrzutu wynosi

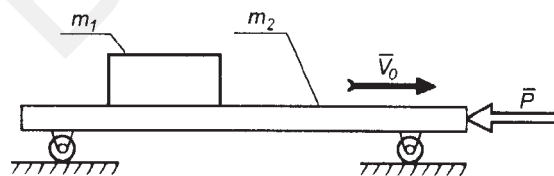
$$v_w = \omega_B R = \omega_{(\varphi=60^\circ)} \cdot R = \omega_0 R \sqrt{2} \sqrt{\cos \varphi_0 - 0,5}.$$

W momencie wyrzutu prędkość unoszenia wynosi  $v_u = \omega_0 OB = \omega_0 R$  i jest wektorem prostopadłym do  $OB$  (zgodnie z obrotem tarczy). Wektor prędkości względnej  $\bar{v}_w$  w tym punkcie jest prostopadły do  $KB$  i kąt pomiędzy prędkościami  $\bar{v}_u$  i  $\bar{v}_w$  wynosi  $120^\circ$ . Prędkość bezwzględna cząstki granulatu w momencie wyrzutu oblicza się ze wzoru

$$v_b = \sqrt{v_u^2 + v_w^2 + 2v_u v_w \cos 120^\circ} = R\omega_0 \sqrt{2 \cos \varphi_0 - \sqrt{2 \cos \varphi_0} - 1}.$$

### ZADANIE 3.2.21

Na platformie o masie  $m_2 = 400$  kg, poruszającej się z prędkością  $v_0 = 2$  m/s, leży klocek o masie  $m_1 = 100$  kg (rys. 3.2.21). W pewnej chwili do platformy przyłożono stałą siłę  $\bar{P}$  o zwrocie przeciwnym do zwrotu prędkości  $\bar{v}_0$ . Współczynnik tarcia klocka po platformie  $\mu = 0,1$ .



Rys. 3.2.21

Wyznaczyć:

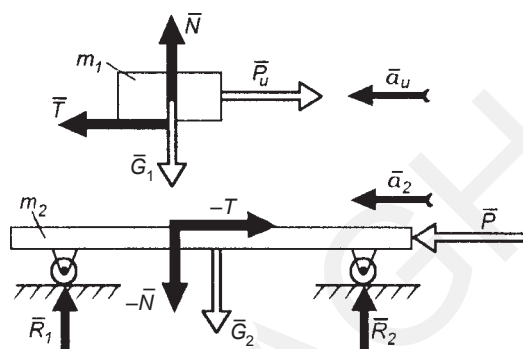
- 1) siłę  $\bar{P}$  tak, aby nie nastąpił poślizg klocka,
- 2) drogę klocka w przypadku jego poślizgu, jeżeli do platformy przyłożona jest siła  $2\bar{P}$ .

Opory ruchu platformy po podłożu pominać.

**Rozwiązanie****Przypadek 1**

Rozkład sił działających na platformę i klocek po przyłożeniu siły  $\bar{P}$  pokazano na rysunku 3.2.21a. Siła unoszenia  $\bar{P}_u = -m_1 \bar{a}_u = -m_1 \bar{a}_2$ . Siła tarcia  $\bar{T}$  ma zwrot przeciwny do zwrotu przewidywanej prędkości poślizgu masy  $m_1$ . Musi zachodzić zatem warunek równowagi względnej  $m_1 \bar{a}_w = \bar{P}_u + \bar{T} = 0$ , z którego wynika równanie

$$m_1 a_2 - T = 0.$$



Rys. 3.2.21a

Zakładając tarcie rozwinięte, otrzymano wartość siły tarcia  $T = \mu N = \mu m_1 g$  i z równania równowagi obliczono przyspieszenie

$$a_2 = \frac{T}{m_1} = \mu g = 1 \text{ m/s}^2 \quad (g = 10 \text{ m/s}^2).$$

Szukaną siłę  $\bar{P}$  wyznaczono z dynamicznego równania ruchu masy  $m_2$

$$m_2 a_2 = P - T,$$

tzn.  $P = m_2 a_2 + T = 400 + 0,1 \cdot 100g = 500 \text{ N}$ .

Jest to maksymalna, graniczna wartość siły  $P$ , przy której jeszcze nie nastąpi poślizg. Przekroczenie tej wartości spowoduje poślizg, w którym droga klocka zależna będzie od wartości przyłożonej siły.

**Przypadek 2**

Ruch masy  $m_1$  w tym przypadku dzieli się na dwa etapy:

- a) od chwili przyłożeniu siły  $2\bar{P}$  do chwili zatrzymania się masy  $m_2$ ; czas trwania poślizgu  $t_1$ ,
- b) okres, w którym masa  $m_2$  jest w spoczynku ( $m_1$  w ruchu); czas trwania poślizgu  $t_2$ .

Czas trwania całego poślizgu  $t_p = t_1 + t_2$ .

**Ad a)**

Korzystając z rysunku 3.2.21a można napisać dynamiczne równania ruchu obu mas:

ruchu względnego masy  $m_1$  jako  $m_1 a_w = P_u - T$ ,

ruchu bezwzględnego masy  $m_2$  w postaci  $m_2 a'_2 = 2P - T$ .

Z równania drugiego obliczyć można przyspieszenie

$$a'_2 = \frac{2P - T}{m_2} = \frac{2P - \mu m_1 g}{m_2} = \frac{1000 - 100}{400} = 2,25 \text{ m/s}^2$$

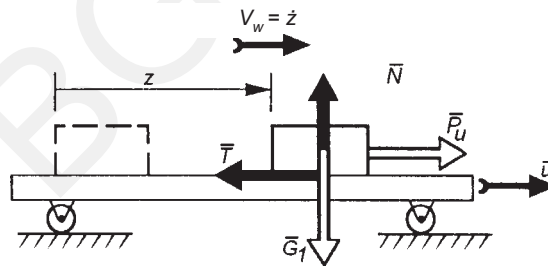
i w dalszej kolejności prędkość masy  $m_2$ ;  $u_2 = v_0 - a'_2 t = 2 - 2,25 t$ .

Masa  $m_2$  zatrzymuje się po czasie  $t_1$ . Zatem dla  $t = t_1$   $u_2 = 0$  i z tego warunku otrzymuje się czas poślizgu do chwili zatrzymania się masy  $m_2$ ,  $t_1 = \frac{v_0}{a'_2} = 0,89 \text{ s}$ .

Obliczając wartość siły unoszenia  $P_u = m_1 |a_u| = m_1 |a'_2| = 225 \text{ N}$ , z równania ruchu względnego wyznaczono przyspieszenie względne

$$a_w = \frac{P_u - T}{m_1} = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

Prędkość względna w tym etapie wynosi  $v_w = a_w t$  (prędkość początkowa względna równa jest zero), a równanie ruchu względnego ma postać  $z = \frac{1}{2} a_w t^2 = 0,625 t^2$  (oznaczenia jak na rysunku 3.2.21b).



Rys. 3.2.21b

Z powyższych równań obliczyć można prędkość i drogę przebytą w pierwszym etapie ruchu masy  $m_1$  odpowiadające chwili  $t = t_1$ :

$$v_w(t_1) = a_w t_1 = 1,11 \text{ m/s}, \quad z(t_1) = 0,625 t_1^2 = 0,5 \text{ m}.$$

Prędkość  $v_w(t_1)$  i droga  $z(t_1)$  są warunkami początkowymi dla drugiego etapu ruchu przy zatrzymanej masie  $m_2$ .

**Ad b)**

Równanie dynamiczne ruchu masy  $m_1$  ma postać:

$$m_1 \ddot{z} = -T$$

lub po podstawieniu danych liczbowych  $\ddot{z} = -1$ .

Obliczając prędkość i drogę przy warunkach początkowych, tzn. dla  $t_1 = 0$   $\dot{z} = v_w(t_1) = 1,11$  m/s,  $z = z(t_1) = 0,5$  m, otrzymano:

$$\dot{z} = t + 1,11,$$

$$z = -\frac{1}{2}t^2 + 1,11t + 0,5.$$

Z równania prędkości obliczyć można czas do chwili zatrzymania się masy  $m_1$ , tzn. dla  $\dot{z} = 0$   $t_2 = 1,11$  s, a z równania drogi drogę poślizgu odpowiadającą czasowi  $t_p = t_1 + t_2 = 2$  s. Wynosi ona  $z(t_2) = s = -\frac{1}{2}t_2^2 + 1,11t_2 + 0,5 = 1,11$  m.

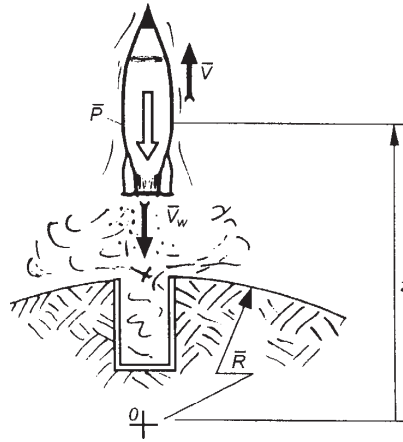
Ruch masy  $m_1$  w drugim etapie rozpatrywany był jako bezwzględny, gdyż od chwili  $t_1$  masa  $m_2$  nie porusza się.

**Uwaga.** Zadanie to rozwiązano innymi metodami w przykładzie 3.3.3.

### 3.2.5. Dynamika punktu o zmiennej masie

#### ZADANIE 3.2.22

Rakieta, startując z wyrzutni podziemnej, korzystając z dodatkowego zbiornika paliwa, osiąga prędkość  $\bar{v}$  w chwili opuszczania wyrzutni, i w tym momencie odrzucony jest zbiornik dodatkowy, a dopływ paliwa do silnika odbywa się z właściwego zbiornika rakiety. Podczas lotu z dyszy wyrzucane są cząsteczki masy ze stałą prędkością względną  $\bar{v}_w$ , a na raketę działa siła powszechnego ciężenia  $P = k \frac{M \cdot m}{z^2}$ , gdzie  $k$  jest stałym współczynnikiem,  $M$  masą Ziemi o promieniu  $R$ ,  $m$  masą rakiety,  $z$  odległością rakiety od środka  $O$  Ziemi (rys. 3.2.22). Początkowa masa rakiety wraz z paliwem wynosi  $m_0 = m_R + m_{p0}$ , gdzie  $m_R$  jest masą rakiety bez paliwa,  $m_{p0}$  masą początkową paliwa. Wyznaczyć funkcję zmiany masy paliwa  $m_p = m_p(t)$ , jeżeli rakieta porusza się ze stałą prędkością.



Rys. 3.2.22

**Rozwiązanie**

Funkcję zmiany masy paliwa otrzymać można z równania Mieszczerskiego

$$m(t) \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{\Phi},$$

gdzie  $\bar{\Phi} = \bar{v}_w \frac{dm}{dt}$  jest siłą reaktywną.

Rzutuując powyższe równanie na oś  $z$ , otrzymuje się równanie skalarne

$$m \frac{dv}{dt} = -P - v_w \frac{dm}{dt}.$$

Ponieważ prędkość rakiety  $v = \text{const}$ , więc  $\frac{dv}{dt} = 0$ . Siła  $P$  na powierzchni Ziemi, tj. dla  $z = R$ , równa jest sile ciężkości rakiety  $mg$ , i z tego warunku wyliczyć można współczynnik  $k = \frac{gR^2}{M}$ . Siłę  $P$  zapisać można wzorem  $P = gR^2 \frac{m^2}{z^2}$ , przy czym  $z$ , ze względu na ruch jednostajny rakiety ( $\bar{v} = \text{const}$ ), jest znaną funkcją czasu i wynosi  $z = R + vt$ .

Uwzględniając powyższe zależności w równaniu Mieszczerskiego oraz rozdziela-  
jąc zmienne, otrzymuje się równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$\frac{dm}{m} = -\frac{gR^2}{v_w} \frac{dt}{(R + vt)^2}.$$

Rozwiązując powyższe równanie, otrzymuje się

$$\ln|m| = \frac{gR^2}{v_w} \frac{1}{v(R + vt)} + C.$$

Stałą całkowania można wyznaczyć, znając masę  $m = m_0$  w chwili  $t = 0$

$$C = \ln m_0 - \frac{gR^2}{v_w v}.$$

Podstawiając obliczoną stałą  $C$  do rozwiązania równania różniczkowego oraz przekształcając to rozwiązanie otrzymuje się

$$m = m_0 e^{-\frac{gR}{v_w} \frac{t}{R+vt}}.$$

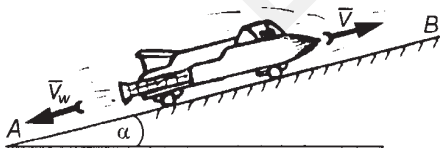
Uwzględniając, że masa  $m$  jest sumą zmiennej masy paliwa  $m_p = m_p(t)$  i masy  $m_R$  rakiety bez paliwa oraz że masa początkowa  $m_0$  jest sumą początkowej masy paliwa  $m_{p0}$  i masy  $m_R$ , szukaną funkcję zmiany masy paliwa zapisać można w postaci

$$m_p = (m_{p0} + m_R) e^{-\frac{gR}{v_w} \frac{t}{R+vt}} - m_R.$$

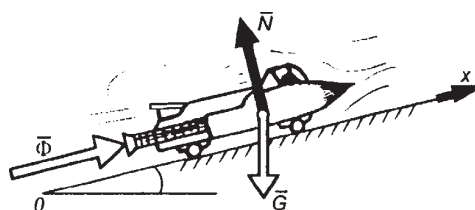
### ZADANIE 3.2.23

Pojazd odrzutowy startuje w górę stoku nachylonego pod kątem  $\alpha = 30^\circ$  o długości stoku  $AB = l = 2600$  m (rys. 3.2.23). Masa pojazdu bez paliwa  $m_R = 100$  kg, masa zaś paliwa zmienia się w czasie spalania według zależności  $m_p = 160 - 4t$ .

Wyznaczyć najmniejszą stałą prędkość względną  $\bar{v}_w$ , przy której pojazd ruszy natychmiast pod górę oraz czas i prędkość osiągnięcia szczytu wzniesienia (punkt  $B$ ). Przyspieszenie ziemskie przyjąć  $g \cong 10$  m/s<sup>2</sup>.



Rys. 3.2.23



Rys. 3.2.23a

### Rozwiązanie

Siły działające na pojazd pokazano na rysunku 3.2.23a, gdzie  $\bar{N}$  jest siłą oddziaływania podłoża,  $\bar{G} = m\bar{g}$  siłą ciężkości pojazdu,  $\bar{\Phi} = \bar{v}_w \frac{dm}{dt}$  siłą reaktywną.

Korzystając z równania Mieszczerzkiego

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{v}_w \frac{dm}{dt} \quad \left( \bar{\Phi} \text{ przeciwna do } \bar{v}_w, \text{ gdyż } \frac{dm}{dt} < 0 \right)$$

otrzymuje się równanie skalarne względem osi  $x$  (dla przypadku odrywania się cząstek od masy  $m$ ) w postaci

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha - v_w \frac{dm}{dt}.$$

Warunkiem rozpoczęcia ruchu w chwili początkowej jest

$$-mg \sin \alpha - v_w \frac{dm}{dt} \geq 0$$

dla masy  $m$  odpowiadającej chwili początkowej, tj.

$$m_0 = m(t=0) = m_R + m_p(t=0) = 100 + 160 \text{ kg}$$

i

$$\frac{dm}{dt}(t=0) = -4 \text{ kg/s.}$$

Z powyższego warunku otrzymuje się  $v_w \geq \frac{m_0 g \sin \alpha}{4} = 325 \text{ m/s}$ .

Załóżmy, że cząstki paliwa są wyrzucane w chwili startu z prędkością względną  $v_w = 330 \text{ m/s}$ . Analizując ruch pojazdu na drodze równej długości stoku  $l$ , rozważyć należy następujące trzy przypadki:

- 1) paliwo ulegnie całkowitemu spaleniowi przed osiągnięciem szczytu stoku i w tym wariantcie rozważa się dwa etapy ruchu: do chwili wypalenia się paliwa i po spaleniowi paliwa,
- 2) paliwo ulegnie całkowitemu spaleniowi w momencie osiągnięciowi szczytu stoku,
- 3) paliwo nie zostanie całkowicie spalone w momencie osiągnięciowi szczytu stoku.

### Przypadek 1

Równanie ruchu pojazdu ma postać

$$m \frac{dv_1}{dt} = -mg \sin \alpha - v_w \frac{dm}{dt},$$

gdzie:

$$g \cong 10 \text{ m/s}^2,$$

$$m = m_R + m_p = 260 - 4t \text{ kg},$$

$$\frac{dm}{dt} = -4 \text{ kg/s},$$

$$v_w = 330 \text{ m/s}.$$



Po podstawieniu otrzymuje się

$$(260 - 4t) \frac{dv_1}{dt} = -5(260 - 4t) + 1320,$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{330}{65 - t} - 5.$$

Po scałkowaniu otrzymano

$$v_1 = -330 \ln |65 - t| - 5t + C_1.$$

Stałą  $C_1$  wyznaczono z warunków początkowych: dla  $t = 0$ ,  $v_1 = 0$ ;  $C_1 = 330 \ln 65$ . Prędkość pojazdu w tym etapie zmienia się więc zgodnie z równaniem

$$v_1 = 330(\ln 65 - \ln |65 - t|) - 5t.$$

Czas  $t_s$  całkowitego spalania paliwa obliczyć można z zależności:

$$m_p = 160 - 4t_s = 0,$$

skąd

$$t_s = 40 \text{ s.}$$

W tym czasie pojazd osiągnie prędkość

$$v_s = v_1(t_s) = 115,3 \text{ m/s} \cong 415 \text{ km/godz.}$$

Równanie skończone ruchu, odpowiadające etapowi spalania paliwa, otrzymać można, całkując prędkość  $v_1$ , tzn.

$$x_1 = 330 \left[ t \ln 65 + (65 - t)(\ln |65 - t| - 1) \right] - 2,5t^2 + C_2,$$

gdzie  $C_2 = -330 \cdot 206,3$  wyznacza się z warunków początkowych dla  $t = 0$ ,  $x_1 = 0$ .

Równanie ruchu ma postać

$$x_1 = 330 \left[ t \ln 65 + (65 - t)(\ln |65 - t| - 1) - 206,3 \right] - 2,5t^2.$$

Z równania tego obliczyć można drogę  $x_s = x_1(t_s)$  odpowiadającą chwili całkowitego spalania paliwa. Podstawiając  $t_s = 40$  s, otrzymuje się  $x_s = 1280$  m. Paliwo ulegnie więc całkowitemu spalaniu przed osiągnięciem szczytu wzniesienia i drugi etap ruchu odbywa się pod wpływem oddziaływania stałej siły ciężkości równej  $m_R g$  (ciężar konstrukcji rakiety).

Równanie dynamiczne ruchu w tym etapie ma postać

$$m_R \frac{dv_2}{dt} = -m_R g \sin \alpha,$$

skąd

$$v_2 = -gt \sin \alpha + C_3,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + C_3t + C_4, \quad g \cong 10 \text{ m/s}^2.$$

Stałe całkowania  $C_3$  i  $C_4$  wyznacza się z warunków początkowych ruchu dla tego etapu, tzn.

dla

$$t = 0, \quad v_2 = 115,3 \text{ m/s}, \quad x_2 = 0,$$

skąd

$$C_3 = 115,3 \text{ m/s}, \quad C_4 = 0.$$

Z otrzymanych równań:

$$v_2 = -5t + 115,3,$$

$$x_2 = -2,5t^2 + 115,3t,$$

obliczyć można czas  $t_k$  osiągnięcia szczytu stoku (punkt  $B$ ) oraz  $v_2(t_k)$ . Oznaczając

$$x_k = l - x_s = 2600 - 1280 = 1320 \text{ m jako drogę do punktu } B,$$

czas  $t_k$  oblicza się z równania

$$x_k = -2,5t_k^2 + 115,3t_k,$$

czyli

$$2,5t_k^2 - 115,3t_k + 1320 = 0 \quad t_{k1} = 21,1 \text{ s}, \quad t_{k2} = 25,1 \text{ s}.$$

W czasie  $t_{k1} = 21,1$  s pojazd osiągnie prędkość równą

$$v_2(t_{k1}) = v_k = -5t_{k1} + 115,3 = 9,7 \text{ m/s} \approx 35 \text{ km/godz.}$$

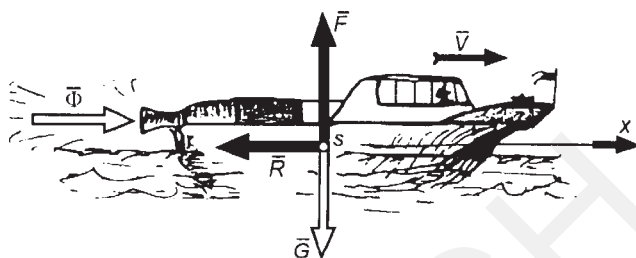
i jest to prędkość na szczycie stoku.

Czas  $t_{k2} = 25,1$  s odpowiada chwili powrotu dla przypadku „teoretycznego” ruchu pojazdu wzdłuż przedłużonej linii stoku poza punkt  $B$ . Pojazd osiągnąłby w którymś punkcie tej linii prędkość równą zero i powróciłby do punktu  $B$  w czasie  $t_{k2}$ . Ze względu na narzucone rzeczywiste warunki ruchu (punkt  $B$  jest najwyższym punktem stoku) nie można brać pod uwagę czasu  $t_{k2}$ . Zatem pojazd osiąga w punkcie  $B$  prędkość  $v_k = 9,7 \cong 35 \text{ km/godz.}$  w chwili  $t_c = t_s + t_{k1} = 61,1$  s od momentu ruszenia.

Ze względu na to, że paliwo ulegnie całkowitemu spaleniemu przed osiągnięciem szczytu stoku nie rozpatruje się przypadków 2 i 3.

**ZADANIE 3.2.24**

Łódź odrzutowa na skutek spalania się paliwa zmienia masę  $M$  zgodnie z równaniem  $M = 1800 - 2t$  kg. Prędkość względna wyrzucanych cząstek spalanego gazu  $v_w = 800$  m/s. Podczas ruchu łodzi działa na nią siła oporu  $\bar{R}$  proporcjonalna do prędkości łodzi  $\bar{v}$ ,  $\bar{R} = -2\bar{v}$  (rys. 3.2.24). Wyznaczyć równanie ruchu łodzi oraz jej prędkość po spalaniu się paliwa, jeżeli masa łodzi bez paliwa wynosi  $m_0 = 600$  kg.



Rys. 3.2.24

**Rozwiązanie**

Siły działające na łódź pokazano na rysunku 3.2.24, gdzie

$\bar{F}$  – siła wyporu wody.

$\bar{G}$  – siła ciężkości łodzi,

$\bar{R} = -k\bar{v}$  – siła oporu ruchu,  $k = 2 \frac{Ns}{m}$ ,

$\bar{\Phi} = \bar{v}_w \frac{dM}{dt}$  – siła reaktywna.

Rzutuując równanie Mieszczerskiego na oś  $x$  otrzymuje się

$$m \frac{dv}{dt} = -kv - v_w \frac{dM}{dt},$$

a po podstawieniu danych i rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dv}{800 - v} = \frac{dt}{900 - t}.$$

Wykorzystując warunki początkowe ruchu:  $t = 0$ ,  $v = 0$ ,  $x = 0$ , otrzymuje się, po rozwiązaniu równania różniczkowego, równanie prędkości i przemieszczenia łodzi:

$$v = \frac{8}{9} t, \quad x = \frac{4}{9} t^2.$$

Prędkość łodzi po spaleniu się paliwa wyznacza się, obliczając czas  $t_s$  spalania paliwa.

Dla  $t = 0$  całkowita masa łodzi wynosi  $M_0 = 1800$  kg.

Uwzględniając masę łodzi bez paliwa  $m_0 = 600$  kg, obliczyć można masę początkową paliwa  $m_{p0} = 1200$  kg.

Z zależności  $M = M_0 - 2t$ , gdzie  $M = m_0 + m_p$ ,  $M_0 = m_0 + m_{p0}$ , otrzymuje się funkcję zmiany masy paliwa  $m_p$  w czasie, tj.

$$m_p = m_{p0} - 2t.$$

Z powyższej zależności oblicza się czas  $t_s$  spalania paliwa, tzn. dla

$$m_p = 0, \quad t_s = 600 \text{ s.}$$

Prędkość łodzi po spaleniu paliwa wynosi więc

$$v_s = \frac{8}{9} t_s = \frac{8}{9} \cdot 600 \cong 533 \text{ m/s} \cong 1920 \text{ km/godz.}$$

Po spaleniu się paliwa na łódź nie działa siła reaktywna i dla tego etapu dynamiczne równanie ruchu ma postać:

$$m_0 \frac{dv_1}{dt} = -R, \quad R = 2v_1, \quad m_0 = 600 \text{ kg,}$$

a po przekształceniu

$$\frac{dv_1}{v_1} = -\frac{1}{300} dt.$$

Rozwiązując powyższe równanie przy warunkach początkowych dla tego etapu ruchu:  $t = 0$ ,  $v_1 = v_s = 533$  m/s,  $x_1 = 0$ , otrzymuje się równanie prędkości i przemieszczenia łodzi w drugim etapie ruchu:

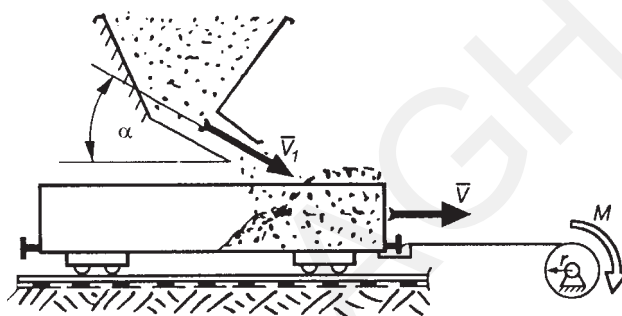
$$v_1 = 533 e^{-\frac{1}{300}t} \text{ [m/s],}$$

$$x_1 = 159900 \left( 1 - e^{-\frac{1}{300}t} \right) \text{ [m].}$$

**ZADANIE 3.2.25**

Platforma ładowana z rynny zsykowej zbiornika materiału sypkiego porusza się w czasie ładowania ze stałą prędkością  $v = 0,2$  m/s (rys. 3.2.25). Moment napędowy na bębnie linowej podciągarki platformy równy jest  $M = 160$  Nm. Promień bębna podciągarki  $r = 0,2$  m. Prędkość zsywania  $v_1 = 1,2$  m/s, kąt zsywania  $\alpha = 60^\circ$ , masa pustej platformy  $m_0 = 1000$  kg. Wyznaczyć równanie zmiany masy  $m = m(t)$  platformy w dwóch przypadkach:

- 1) z uwzględnieniem siły oporu jazdy  $F = 0,2G$  ( $G = mg$  jest ciężarem platformy),
- 2) z pominięciem siły oporu jazdy.



Rys. 3.2.25

**Rozwiązanie**

Jest to przypadek ruchu układu o zmiennej masie z dołączaniem się cząstek masy. Rozkład prędkości cząsteczki  $dm$  pokazano na rysunku 3.2.25a. Równanie Mieszczerskiego ogólnie można zapisać w postaci:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{P} + \bar{v}_w \frac{dm}{dt},$$

gdzie:

$$\bar{P} = \bar{S} + \bar{F} \quad \text{– siła dla przypadku (1),}$$

$$\bar{P} = \bar{S} \quad \text{– siła dla przypadku (2),}$$

gdzie:

$$\bar{S} \quad \text{– siła w linie podciągarki,}$$

$$\bar{F} \quad \text{– siła oporu jazdy.}$$

**Ad 1)**

Rzutując równanie Mieszczerskiego na oś  $x$  przyjętego układu odniesienia (rys. 3.2.25a) otrzymuje się

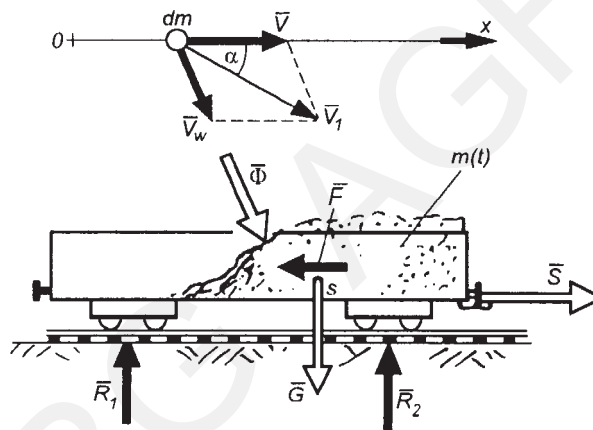
$$m \frac{dv}{dt} = S - F + v_{wx} \frac{dm}{dt}, \quad v_{wx} = v_1 \cos \alpha, \quad S = \frac{M}{r}, \quad F = 0,2 mg.$$

Ponieważ  $v = \text{const}$ , więc

$$\frac{M}{r} - 0,2 mg + (v_1 \cos \alpha - v) \frac{dm}{dt} = 0$$

i po podstawieniu danych liczbowych i rozdzieleniu zmiennych otrzymuje się

$$\frac{dm}{m - 400} = 5dt.$$



Rys. 3.2.25a

Rozwiązując powyższe równanie z uwzględnieniem początkowej masy platformy  $m_0 = 1000$  kg, otrzymuje się równanie zmiany masy w postaci

$$m = 400 + 600 e^{5t} \text{ [kg]}.$$

**Ad 2)**

Równanie ruchu względem osi  $x$  ma w tym przypadku postać

$$m \frac{dv}{dt} = S + v_{wx} \frac{dm}{dt},$$

lub po podstawieniu danych liczbowych i rozdzieleniu zmiennych

$$dm = -2000dt.$$

Uwzględniając masę początkową  $m_0 = 1000$  kg, otrzymuje się, po scałkowaniu, równanie zmiany masy

$$m = 1000 - 2000t \text{ [kg]}.$$

Otrzymany wynik jest sprzeczny z warunkami zadania, z których wynika, że masa platformy na skutek jej dosypywania musi rosnać w czasie, a nie maleć. Wzrost masy w tym przypadku, tj. przy pominięciu siły oporu jazdy, uzyskać można, zmieniając zwrot siły  $\bar{S}$  w linie podciągarki. Praktycznie oznacza to, że platforma nie może być ciągnięta, lecz hamowana siłą  $\bar{S}$  (napędza ją  $\bar{\Phi}_x$  – siła reaktywna).

Do samodzielnego rozważenia pozostawia się inne przypadki pracy ładowarki, np. pionowy kierunek zasypywania platformy oraz przeciwny do jej prędkości  $\bar{v}$ .

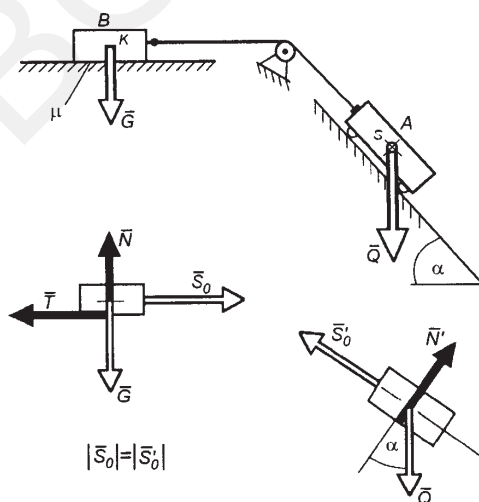
### 3.3. Dynamika układu punktów materialnych

#### ZADANIE 3.3.1

Dane są siły ciężkości  $\bar{Q}$  i  $\bar{G}$  ciał  $A$  i  $B$  oraz kąt równi pochyłej  $\alpha$ . Współczynnik tarcia kinetycznego ciała  $B$  po podłożu wynosi  $\mu$ . Wyznaczyć najmniejszy ciężar  $Q = Q_{\min}$ , który spowoduje ruch układu oraz prędkość ciał po czasie  $t = \tau$  sekund, jeżeli dla  $t = 0$ , prędkość  $v = v(0) = 0$ . Masę kółka pominąć.

#### Rozwiązanie

Wyznaczenie  $Q_{\min}$  jest zagadnieniem należącym do dziedziny statyki. Działanie tarcia statycznego na bryłę  $B$  może uniemożliwić ruch tego układu. Przykładając do ciała  $B$  siłę  $\bar{T}$  tarcia rozwiniętego i korzystając z równań równowagi, wyznacza się ciężar graniczny  $Q_{gr}$ . Każda wartość  $Q > Q_{gr}$  spowoduje ruch, który ze względu na  $\mu_s > \mu$  będzie się dalej rozwijał. Oba ciała oddziałują na siebie poprzez linę, co przedstawiono w postaci siły napięcia  $\bar{S}_0$  (rys. 3.3.1a).



Rys. 3.3.1a

Z warunku równowagi ciała  $A$  wynika, że  $S_0 = Q_{gr} \cdot \sin \alpha$ , dla ciała zaś  $B$  jest  $T_s = S_0$ , przy czym  $T_s = \mu_s N = \mu_s G$ . Z tych zależności otrzymano

$$Q_{gr} = G \frac{\mu_s}{\sin \alpha} \quad \text{i} \quad Q_{\min} > Q_{gr} = G \frac{\mu_s}{\sin \alpha} \quad \text{czyli} \quad Q_{\min} > G \frac{\mu_s}{\sin \alpha}.$$

Przy  $Q = Q_{gr}$  ruch jest możliwy tylko po zadaniu dowolnej prędkości początkowej  $v_0 \neq 0$ .

Wyznaczenie prędkości ciał po czasie  $t = \tau$  należy do zagadnień dynamiki. Rozwiązania tego problemu dokonano dwiema metodami, wykorzystując:

- 1) zasadę ruchu środka masy,
- 2) zasadę pędu i popędu układu punktów materialnych.

#### Ad 1)

Na rysunku 3.3.1b pokazano przyłożone siły zewnętrzne i wewnętrzne do ciał po uwolnieniu ich od więzów. Ponieważ masa krążka jest równa zero więc  $S_1 = S_2$ .

Zasadę ruchu środka masy zapisano wektorowo:

$$(m_A + m_B) \bar{a}_s = \bar{G} + \bar{N}_B + \bar{T} + \bar{R} + \bar{Q} + \bar{N}_A,$$

gdzie:

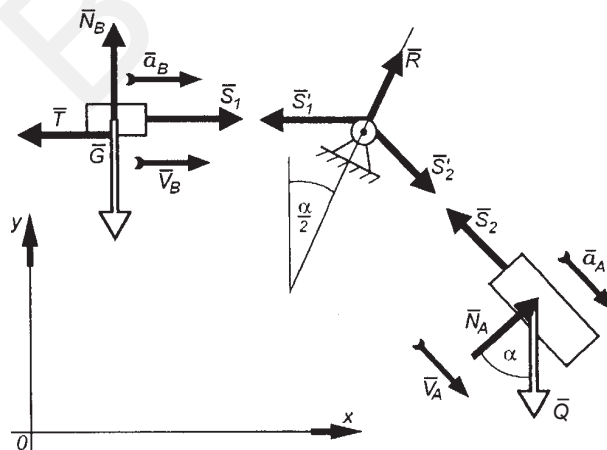
$m_A, m_B$  – masy ciał  $A$  i  $B$ ,

$\bar{a}_s$  – przyspieszenie środka masy układu,

$\bar{N}_A, \bar{N}_B$  – siły reakcji normalne,

$\bar{T}$  – siła tarcia,

$\bar{R}$  – reakcja zewnętrzna układu przyłożona na krążku.



Rys. 3.3.1b



Rzutuując to równanie na osie  $x$  i  $y$  przyjętego układu odniesienia, otrzymano:

$$(m_A + m_B)a_{sx} = N \sin \alpha - T + R \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$(m_A + m_B)a_{sy} = N \cos \alpha + N_B - G - Q + R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Rzut przyspieszenia  $\bar{a}_s$  na osie  $x$  i  $y$  można zapisać:

$$a_{sx} = \frac{d^2}{dt^2}(x_s) = \frac{m_A a_{Ax} + m_B a_{Bx}}{m_A + m_B},$$

$$a_{sy} = \frac{d^2}{dt^2}(y_s) = \frac{m_A a_{Ay} + m_B a_{By}}{m_A + m_B}.$$

Rzuty przyspieszeń ciał  $A$  i  $B$  zgodnie z rysunkiem 3.3.1a wynoszą:

$$a_{Ax} = a_A \cos \alpha, \quad a_{Ay} = -a_A \sin \alpha, \quad a_{Bx} = a_B, \quad a_{By} = 0,$$

przy czym  $a_A = a_B = a$ .

Uwzględniając powyższe zależności otrzymuje się

$$(m_A \cos \alpha + m_B)a = N_A \sin \alpha - T + R \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$-m_A a \sin \alpha = N_A \cos \alpha - G - Q + N_B + R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Z rzutów sił na kierunki normalne do kierunków ruchu dla każdej bryły wyznaczono:

$$N_A = Q \cos \alpha, \quad N_B = G \quad \text{oraz} \quad T = \mu N_B = \mu G.$$

Uwzględniając powyższe związki w układzie równań otrzymano:

$$(m_A \cos \alpha + m_B)a = Q \cos \alpha \sin \alpha - \mu G + R \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$-m_A a \sin \alpha = -Q \sin^2 \alpha + R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Podstawiając  $m_A = \frac{Q}{g}$ ,  $m_B = \frac{G}{g}$  oraz rugując  $R$  i korzystając z odpowiednich wzorów trygonometrycznych, wyznaczono wartość przyspieszenia  $a$

$$a = \frac{Q \sin \alpha - \mu G}{Q + G} \cdot g.$$

Całkując obustronnie powyższą zależność przy warunku początkowym  $v(0) = 0$  otrzymuje się

$$v = \frac{Q \sin \alpha - \mu G}{Q + G} gt,$$

a dla  $t = \tau$  prędkość  $v(\tau) = \frac{Q \sin \alpha - \mu G}{Q + G} g\tau$ .

Aby spełnić warunki zadania, musi zachodzić  $Q \sin \alpha - \mu G > 0$  (patrz pierwsza część rozwiązania).

### Ad 2)

Zasada pędu i popędu dla układu punktów materialnych ma postać

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \bar{W}_g dt.$$

W rozpatrywanym przypadku pęd w chwili początkowej  $t_1$  wynosi  $\bar{p}_1 = 0$ , natomiast w chwili  $t_2$   $\bar{p}_2 = m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B$  przy czym  $|\bar{v}_A| = |\bar{v}_B|$ .

Suma geometryczna sił zewnętrznych wynosi

$$\bar{W}_g = \bar{G} + \bar{Q} + \bar{N}_A + \bar{N}_B + \bar{T} + \bar{R}.$$

Zasada pędu i popędu ma więc postać

$$m_A \bar{v}_A + m_B \bar{v}_B = \int_{t_1}^{t_2} (\bar{G} + \bar{Q} + \bar{N}_A + \bar{N}_B + \bar{T} + \bar{R}) dt.$$

Rzutuując powyższe równanie wektorowe na osie  $x$  i  $y$ , otrzymuje się

$$\begin{aligned} m_A v_A \cos \alpha + m_B v_B &= \int_{t_1}^{t_2} \left( N_A \sin \alpha - T + R \sin \frac{\alpha}{2} \right) dt, \\ -m_A v_A \sin \alpha &= \int_{t_1}^{t_2} \left( N_A \cos \alpha - G - Q + N_B + R \cos \frac{\alpha}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że  $N_A = Q \cos \alpha$ ,  $N_B = G$ ,  $T = \mu N_B = \mu G$  po scałkowaniu, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} m_A v_A \cos \alpha + m_B v_B + (Q \cos \alpha \sin \alpha - \mu G)(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} R \sin \frac{\alpha}{2} dt, \\ m_A v_A Q \sin^2 \alpha (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} R \cos \frac{\alpha}{2} dt. \end{aligned}$$

Rugując z powyższych równań popęd siły  $\bar{R}$  oraz uwzględniając, że  $m_A = \frac{Q}{g}$ ,  $m_B = \frac{G}{g}$  i  $v_A = v_B = v$ , otrzymano  $v = \frac{Q \sin \alpha - \mu G}{Q + G} g \tau$  gdzie  $\tau = t_2 - t_1$ . Zasadę pędu i popędu wykorzystać można w tym przypadku również w inny sposób, stosując ją do każdego ciała osobno, a nie do całego układu.

Korzystając z rysunku 3.3.1b można powyższą zasadę zapisać dla każdego ciała w postaci:

$$m_A v_A = \int_{t_1}^{t_2} (Q \sin \alpha - S_2) dt,$$

$$m_B v_B = \int_{t_1}^{t_2} (S_1 - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} (S_1 - \mu G) dt,$$

a po scałkowaniu w postaci

$$m_A v_A = Q \sin \alpha (t_2 - t_1) - \int_{t_1}^{t_2} S_2 dt,$$

$$m_B v_B = \int_{t_1}^{t_2} S_1 dt - \mu G (t_2 - t_1).$$

Uwzględniając, że  $S_1 = S_2$ ,  $v_A = v_B = v$ ,  $m_A = \frac{Q}{g}$ ,  $m_B = \frac{G}{g}$  i rugując popędy sił  $S_1$  i  $S_2$ , otrzymuje się

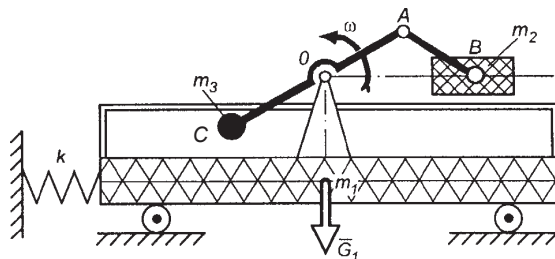
$$v = \frac{Q \sin \alpha - \mu G}{Q + G} g \tau, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

W rozpatrywanym przypadku ten sposób prowadzi najszybciej do celu.

### ZADANIE 3.3.2

Na wózku o masie  $m_1 = 500$  kg umieszczony jest zespół tłokowy o masie tłoka  $m_2 = 600$  kg i masie przeciwwagi  $m_3 = 20$  kg. Korba  $OA$  obraca się ze stałą prędkością kątową  $\omega = 10$  rad/s. Długość  $OA = AB = r$ ,  $OC = q$  (rys. 3.3.2).

Wyznaczyć współczynnik sprężystości  $k$  sprężyny tak, aby podczas ruchu układu nie zachodziły drgania rezonansowe wózka.



Rys. 3.3.2

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiązano dwiema metodami:

- 1) wykorzystując zasadę ruchu środka masy,
- 2) wykorzystując zasadę pędu układu punktów materialnych.

**Ad 1)**

Siły czynne i reakcje przyłożone do układu po uwolnieniu od więzów pokazano na rysunku 3.3.2a. Ze względu na to, że analizuje się ruch wózka, zasadę ruchu środka masy wykorzystano względem osi  $x$  odpowiednio przyjętego układu odniesienia:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_s = -S,$$

gdzie:

$S = k\Delta = k(x_1 - HK)$  siła sprężystości sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$ ,

$\Delta$  – odkształcenie sprężyny,

$HK = \text{const}$ ,

$x_1$  – współrzędna środka masy wózka.

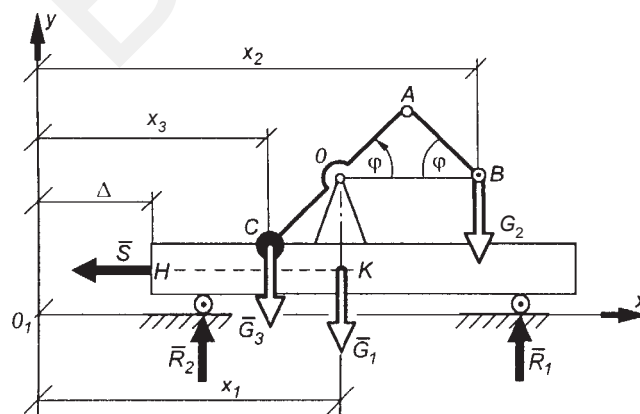
Obliczając współrzędne  $x$ -owe masy tłka i przeciwwagi

$$x_2 = x_1 + 2r \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t,$$

$$x_3 = x_1 - q \cos \varphi$$

oraz korzystając ze wzoru na współrzędną  $x_s$ , środka masy układu, otrzymuje się po zróżniczkowaniu

$$\begin{aligned} \ddot{x}_s &= \frac{d^2}{dt^2} (x_s) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right) = \\ &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 + (m_3 q - 2m_2 r)\omega^2 \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$



Rys. 3.3.2a

Podstawiając  $\ddot{x}_s$  do zasady ruchu środka masy otrzymuje się

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_1 + kx_1 = (2m_2r - m_3q)\omega^2 \cos \omega t + k(HK)$$

lub

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = A \cos \omega t + C_1,$$

gdzie:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$A = \frac{2m_2r - m_3q}{m_1 + m_2 + m_3} \omega^2 = \frac{P_0}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$C_1 = k \frac{HK}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Powyższe równanie różniczkowe opisuje ruch (drżania) wózka pod wpływem siły wymuszającej o amplitudzie  $P_0$ , i częstotliwości wymuszenia  $\omega$ . Częstotliwość  $\omega_0$  nazywa się częstotliwością drgań własnych, a drżania rezonansowe zachodzą, jeżeli  $\omega_0 = \omega$ . Aby uniknąć drgań rezonansowych i niebezpiecznego wzrostu amplitud drgań w stanie rezonansu, musi być spełniony warunek  $\omega_0 \neq \omega$ , przy czym, jeżeli ruch drżający odbywa się z częstotliwością  $\omega < \omega_0$ , to nie ma możliwości wystąpienia drgań rezonansowych, a jeżeli  $\omega > \omega_0$ , to należy liczyć się ze wzrostem amplitud drgań podczas rozruchu układu i przechodzeniu przez rezonans przy  $\omega = \omega_0$ . W układach rzeczywistych stosuje się elementy tłumiące drżania i ograniczające amplitudy drgań rezonansowych. Znając częstotliwość drgań własnych  $\omega_0$ , obliczyć można współczynnik sprężystości sprężyny z zależności

$$k = \omega_0^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

Ruch wózka zachodzi poza rezonansem jeżeli  $\omega_0 \neq \omega$ , tzn. musi być

$$k \neq \omega^2 (m_1 + m_2 + m_3) = \omega_0^2 (m_1 + m_2 + m_3).$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymuje się  $k \neq 58 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ .

Dla obliczonego współczynnika sprężystości  $k$  oraz przyjmując materiał sprężyny, dobrać można z odpowiednich wzorów parametry geometryczne sprężyny, tzn. średnicę drutu, średnicę i długość sprężyny, ilość zwojów sprężyny.

**Ad 2)**

Wyznaczając podobnie jak poprzednio współrzędne  $x$ -owe poszczególnych mas, a następnie obliczając współrzędną  $x$ -ową pędu układu, otrzymuje się

$$P_{ux} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 - 2r\omega \sin \omega t) + \\ + m_3 (\dot{x}_1 + q\omega \sin \omega t) = (m_1 + m_2 + m_3) \dot{x}_1 - (2m_2 r - m_3 q) \omega \sin \omega t.$$

Zasada pędu względem osi  $x$  ma postać

$$\frac{dp_{ux}}{dt} = -S \quad \text{gdzie} \quad S = k(x_1 - HK).$$

Obliczając  $\frac{dp_{ux}}{dt} = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_1 - (2m_2 r - m_3 q) \omega^2 \cos \omega t$ , otrzymuje się z zasady pędu równanie

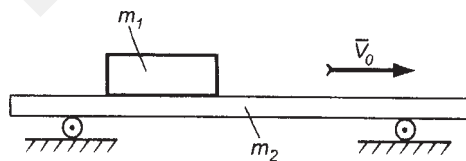
$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}_1 + kx_1 = (2m_2 r - m_3 q) \omega^2 \cos \omega t + k(HK),$$

identyczne jak równanie otrzymane przy wykorzystaniu zasady ruchu środka masy.

Dalszy tok obliczeń jest analogiczny jak poprzednio.

**ZADANIE 3.3.3**

Na platformie o masie  $m_2 = 400$  kg, poruszającej się z prędkością  $v_0 = 2$  m/s leży ciało o masie  $m_1 = 100$  kg. W pewnej chwili do platformy przyłożono stałą siłę  $\bar{P}$  o zwrocie przeciwnym do ruchu układu mas (rys. 3.3.3). Współczynnik tarcia ciała po platformie  $\mu = 0,1$ . Wyznaczyć maksymalną wartość siły  $\bar{P} = \bar{P}_0$  tak, aby nie wystąpił poślizg ciała po platformie, oraz drogę ciała o masie  $m_1$  do chwili zatrzymania się układu, jeżeli do platformy przyłożono siłę  $\bar{P} = 2\bar{P}_0$ .



Rys. 3.3.3

**Rozwiązanie**

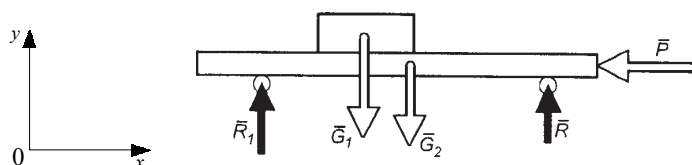
Zadanie rozwiązano, wykorzystując dwie zasady:

- 1) zasadę ruchu środka masy,
- 2) zasadę pędu i popędu.

**Ad 1)**

Siły zewnętrzne czynne i reakcje działające na układ mas pokazano na rysunku 3.3.3a. Siła tarcia pomiędzy ciałami jest siłą wewnętrzną układu i nie wystąpi w równaniu zasady ruchu środka masy, która ma postać:

$$(m_1 + m_2) \bar{a}_s = \bar{P} + \bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2.$$

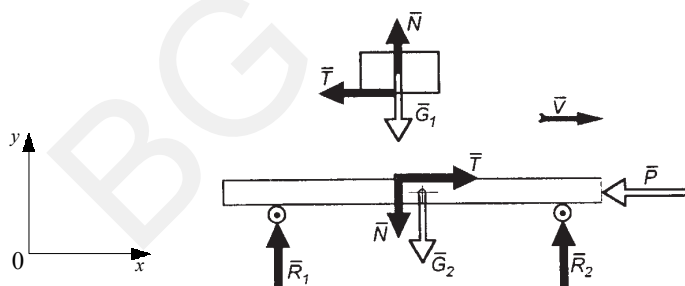


Rys. 3.3.3a

Rzutuując powyższe równanie wektorowe na oś  $x$  przyjętego układu odniesienia (układ odniesienia przyjęto tak, że w chwili przyłożenia siły  $\bar{P}$ , tzn. dla  $t = 0$ , prędkość obu mas jest równa  $\bar{v}_0$ , a  $x_s(0) = 0$ , otrzymuje się równanie

$$(m_1 + m_2) a_{sx} = -P.$$

Ponieważ ruch układu zachodzi tylko w kierunku osi  $x$ , przyspieszenie środka masy jest równoległe do osi  $x$  i  $a_{sx} = a_s$ . Jeżeli nie ma poślizgu, oznacza to, że każda z mas ma takie samo przyspieszenie jak środek masy. Przyspieszenie obliczyć można, badając ruch ciała o masie  $m_1$  (rys. 3.3.3b).



Rys. 3.3.3b

Równanie ruchu tego ciała ma postać

$$m_1 a = -T,$$

gdzie  $T = \mu N = \mu m_1 g$ .

Siła tarcia jest siłą tarcia rozwiniętego, co odpowiada maksymalnej wartości siły  $\bar{P} = \bar{P}_0$ , takiej, żeby jeszcze nie było poślizgu. Każda siła o wartości większej od  $P_0$  spowoduje wystąpienie poślizgu. Każda wartość siły  $\bar{P}$  mniejsza od  $P_0$  zapewnia ruch bez poślizgu.

Obliczając  $|\bar{a}| = |\bar{a}_s| = \frac{T}{m_1} = \frac{\mu m_1 g}{m_1} \cong 1 \text{ m/s}^2$ , wyznaczyć można  $|\bar{P}| = |\bar{P}_0| = (m_1 + m_2)|\bar{a}_s|$ . Po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się  $P_0 = 500 \text{ N}$ . W przypadku przyłożenia siły  $2\bar{P}_0$  ciało o masie  $m_1$  zacznie ślizgać się po platformie i aby obliczyć drogę poślizgu, rozpatrzeć należy niezależnie ruch obu ciał (rys. 3.3.3b).

Równanie ruchu masy  $m_1$  ma postać

$$m_1 a = -T,$$

skąd

$$a_1 = -\frac{T}{m_1} = -1 \text{ m/s}^2.$$

Po scałkowaniu otrzymuje się prędkość i przemieszczenie masy  $m_1$ :

$$v(t) = -t + C_1,$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + C_2t + C_2.$$

Równanie ruchu platformy ma postać

$$m_2 a_2 = T - 2P_0,$$

skąd

$$a_2 = \frac{T - 2P_0}{m_2} = 2,25 \text{ m/s}^2.$$

Po scałkowaniu otrzymuje się prędkość i przemieszczenie platformy:

$$u(t) = -2,25t + C_3,$$

$$x_2(t) = -1,125t^2 + C_3t + C_4.$$

Wykorzystując warunki początkowe ruchu

$$t = 0, \quad v = v_0, \quad x_1 = 0, \quad u = v_0, \quad x_2 = 0$$

wyznaczono stałe całkowania:

$$C_1 = v_0 = 2 \text{ m/s}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = v_0 = 2 \text{ m/s}, \quad C_4 = 0,$$

i otrzymano następujące równania opisujące prędkości i przemieszczenia obu mas:

$$v(t) = 2 - t, \quad u(t) = 2 - 2,25t,$$

$$x_1(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2, \quad x_2(t) = 2t - 1,125t^2.$$

Z powyższego układu równań wyznaczyć można czas  $t_1$  i drogę  $x_1(t_1)$  hamowania masy  $m_1$  oraz czas  $t_2$  i drogę  $x_2(t_2)$  hamowania platformy ( $v(t_1) = u(t_2) = 0$ ):

$$t_1 = 2 \text{ s}, \quad x_1(t_1) = 2 \text{ m}, \quad t_2 = 0,89 \text{ s}, \quad x_2(t_2) = 0,89 \text{ m}.$$

Drogę poślizgu masy  $m_1$  oblicza się jako różnicę dróg  $x_1(t_1)$  i  $x_2(t_2)$ :

$$l = x_1(t_1) - x_2(t_2) = 1,11 \text{ m}.$$



**Ad 2)**

Analizując ruch układu mas analogicznie jak w przypadku 1) zapisać można zasadę pędu i popędu dla obu mas i dla masy  $m_1$  w postaci (rys. 3.3.3.a, b):

$$\bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \int_0^{\tau} (\bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{P}) dt,$$

$$\bar{p}_{21} - \bar{p}_{11} = \int_0^{\tau} \bar{T} dt,$$

gdzie:

$\bar{p}_1 = (m_1 + m_2)\bar{v}_0$  jest pędem układu w chwili początkowej  $t = 0$ ,

$\bar{p}_2 = 0$  jest pędem układu po zatrzymaniu,

$\bar{p}_{11} = m_1\bar{v}_0$  jest pędem masy  $m_1$  w chwili początkowej  $t = 0$ ,

$\bar{p}_{21} = 0$  jest pędem masy  $m_1$  po zatrzymaniu,

$\tau$  – czas zatrzymania układu.

Po zrutowaniu na oś  $x$  oraz przyjmując  $P = P_0$ , otrzymuje się:

$$-(m_1 + m_2)v_0 = -\int_0^{\tau} P_0 dt = -P_0\tau,$$

$$-m_1v_0 = -\int_0^{\tau} T dt = -T\tau = -\mu N\tau = -\mu m_1 g\tau.$$

Rugując czas  $\tau$  z powyższych równań, obliczono siłę  $P_0 = 500$  N, która nie spowoduje poślizgu.

W przypadku wystąpienia poślizgu, tzn. po przyłożeniu siły  $\bar{P} = 2\bar{P}_0$ , drogę poślizgu wyznaczyć można, stosując zasadę pędu i popędu dla obu mas oddzielnie:

$$\bar{p}_{21} - \bar{p}_{11} = \int_0^t (\bar{T} + \bar{N} + \bar{G}_1) dt,$$

$$\bar{p}_{22} - \bar{p}_{12} = \int_0^t (\bar{G}_2 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{N} + \bar{T} + 2\bar{P}_0) dt,$$

gdzie:

$\bar{p}_{21} = m_1\bar{v}_1$  jest pędem masy  $m_1$  w dowolnej chwili  $t$ ,

$\bar{p}_{11} = m_1\bar{v}_{01}$  jest pędem tej masy w chwili  $t = 0$ ,

$\bar{p}_{22} = m_2\bar{v}_2$  jest pędem masy  $m_2$  w dowolnej chwili  $t$ ,

$\bar{p}_{12} = m_2\bar{v}_0$  jest pędem tej masy w chwili  $t = 0$ ,

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$  – prędkości bezwzględne obu mas.

Rzutowując na oś  $x$  równania przyrostów pędów otrzymuje się:

$$m_1v_1 - m_1v_0 = -\int_0^t T dt,$$

$$m_2v_2 - m_2v_0 = -\int_0^t (T - 2P_0) dt.$$

Podstawiając  $T = \mu N = \mu m_1 g$  i całkując, otrzymano równania prędkości:

$$v_1 = v_0 - \mu g t, \quad v_2 = v_0 - \frac{2P_0 - \mu m_1 g}{m^2} t.$$

Po ponownym scałkowaniu otrzymuje się równania skończone ruchu obu mas:

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} \mu g t^2, \quad x_2 = v_0 t - \frac{2P_0 - \mu m_1 g}{m^2} t^2,$$

przy warunkach początkowych:  $t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$ .

Przyjmując  $v_1 = 0, v_2 = 0$ , można z równań prędkości wyznaczyć czasy zatrzymania się obu mas, a następnie przebyte drogi, tzn.:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g}, \quad t_2 = \frac{m_2 v_0}{2P_0 - \mu m_1 g}, \quad x_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}, \quad x_2 = \frac{m_2 v_0^2}{2(P_0 - \mu m_1 g)}.$$

Drogę poślizgu wyznacza się jako różnicę dróg  $x_1$  i  $x_2$ :

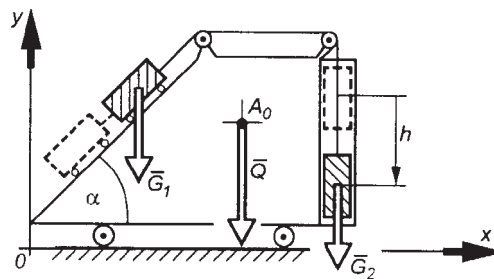
$$l = x_1 - x_2 = \frac{2P_0 - \mu g(m_1 + m_2)}{2\mu g(2P_0 - \mu m_1 g)} v_0^2.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymuje się  $l = 1,11$  m.

**Uwaga.** Zadanie to można rozwiązać, stosując równania dynamiki punktu w ruchu względnym (patrz zadanie 3.2.21).

### ZADANIE 3.3.4

Dane są siły ciężkości  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{Q}$  poszczególnych brył i kąt  $\alpha$  klina (rys. 3.3.4). W chwili początkowej układ ciał jest nieruchomy. Po zwolnieniu blokady ciężar  $G_2$  opada ruchem jednostajnie przyspieszonym zgodnie z równaniem  $h = kt^2, k = \text{const}$ . Obliczyć prędkość i drogę klina w funkcji czasu.



Rys. 3.3.4

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiązano dwiema metodami:

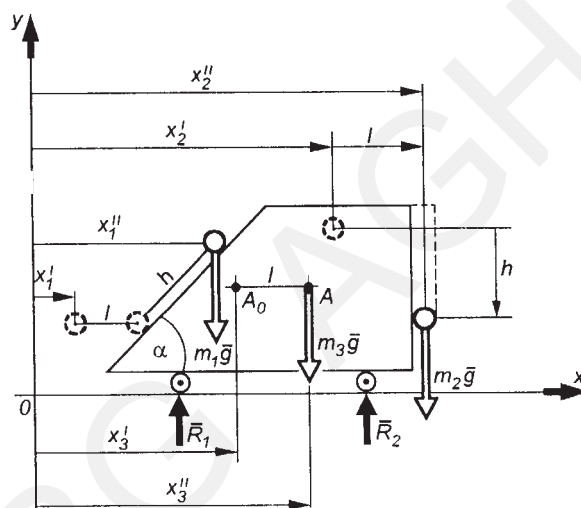
- 1) stosując zasadę zachowania ruchu środka masy,
- 2) wykorzystując zasadę zachowania pędu układu punktów materialnych.

**Ad 1)**

Przykładając siły zewnętrzne działające na układ materialny (rys. 3.3.4a) i stosując zasadę ruchu środka masy, po zrzutowaniu na oś  $x$  otrzymuje się

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x}_s = 0,$$

gdzie  $\ddot{x}_s$  jest współrzędną przyspieszenia środka masy na osi  $x$ .



Rys. 3.3.4a

Jak wynika z powyższego równania, spełniona została zasada zachowania ruchu środka masy względem osi  $x$ . Bezpośrednio z powyższego równania wynika, że  $\ddot{x}_s = 0$ , z czego  $\dot{x}_s = C_1$  i  $x_s = C_1 t + C_2$ .

W chwili początkowej układ był w spoczynku, tzn. dla  $t = 0$   $\dot{x}_s = 0$ , a więc  $C_1 = 0$  i  $x_s = C_2 = \text{const}$ .

Podczas ruchu układu współrzędna  $x_s$  środka masy nie zmienia się. Oznaczając przez  $x_s^I$  położenie początkowe środka masy i przez  $x_s^{II}$  położenie w dowolnej chwili, można napisać, że  $x_s^I = x_s^{II}$ . Oznaczając współrzędne środków mas brył w chwili początkowej przez  $x_1^I, x_2^I, x_3^I$ , a w chwili dowolnej przez  $x_1^{II}, x_2^{II}, x_3^{II}$  (rys. 3.3.4a), otrzymuje się zależności:

$$\frac{m_1 x_1^I + m_2 x_2^I + m_3 x_3^I}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1^{II} + m_2 x_2^{II} + m_3 x_3^{II}}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Uzależniając współrzędne  $x_1^{\text{II}}, x_2^{\text{II}}, x_3^{\text{II}}$  od  $x_1^{\text{I}}, x_2^{\text{I}}, x_3^{\text{I}}$ , otrzymuje się:

$$x_1^{\text{II}} = x_1^{\text{I}} + l + h \cos \alpha,$$

$$x_2^{\text{II}} = x_2^{\text{I}} + l,$$

$$x_3^{\text{II}} = x_3^{\text{I}} + l,$$

gdzie  $l$  oznacza przemieszczenie klina (przyjęto ruch w prawo) i po odpowiednich podstawieniach i przekształceniach otrzymuje się przemieszczenie klina:

$$l = -\frac{km_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3} t^2 = -\frac{kG_1 \cos \alpha}{G_1 + G_2 + Q} t^2.$$

Znak minus oznacza, że przemieszczenie klina nastąpi w rzeczywistości w stronę przeciwną, niż założono. Prędkość klina obliczono jako  $v_3 = \frac{dl}{dt}$ ,

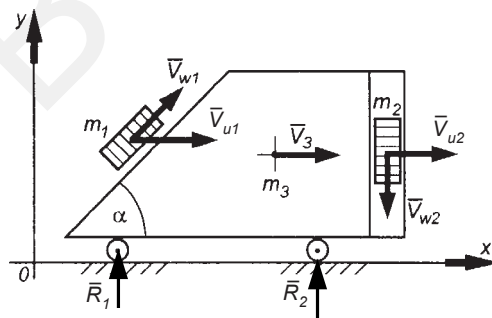
$$v_3 = -\frac{2kG_1 \cos \alpha}{G_1 + G_2 + Q} t.$$

**Ad 2)**

Oznaczając przez  $\bar{p}$  pęd układu, zasadę pędu można zapisać

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \sum_{i=1}^5 (\bar{G}_1 + \bar{G}_2 + \bar{Q} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2).$$

Rzutuując powyższe równanie na oś  $x$  (rys. 3.3.4b), otrzymuje się  $\frac{dp_x}{dt} = 0$ .



Rys. 3.3.4b

Co oznacza, że względem osi  $x$  spełniona została zasada zachowania pędu  $p_x = \text{const}$  podczas ruchu układu. Ponieważ w chwili początkowej układ był w spoczynku, więc dla  $t = 0$  jego pęd  $p_x = 0$  i w czasie ruchu nie może się zmienić.

Oznaczając przez  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  prędkości mas  $m_1, m_2, m_3$ , pęd układu zapisać można w postaci:

$$\bar{p} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3.$$

Masy  $m_1$  i  $m_2$  poruszają się ruchem złożonym (ruch unoszenia klina, ruch względny względem klina), w związku z czym ich prędkości bezwzględne wynoszą (rys. 3.3.4b):

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{u1} + \bar{v}_{w1}, \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_{u2} + \bar{v}_{w2},$$

gdzie:

$\bar{v}_{u1} = \bar{v}_3$  prędkość unoszenia masy  $m_1$ ,

$\bar{v}_{u2} = \bar{v}_3$  prędkość unoszenia masy  $m_2$ ,

$\bar{v}_{w1}, \bar{v}_{w2}$  – prędkości względne tych mas względem klina.

Po podstawieniu i zrzutowaniu na oś  $x$  otrzymuje się

$$p_x = m_1(v_3 + v_{w1} \cos \alpha) + m_2v_3 + m_3v_3.$$

Z równania ruchu względnego  $h = kt^2$  obliczyć można prędkość względną  $v_{w1} = v_{w2} = 2kt$  i po przyrównaniu do zera  $p_x$  otrzymuje się prędkość klina

$$v_3 = -\frac{2kG_1 \cos \alpha}{G_1 + G_2 + Q}t.$$

Znak minus oznacza, że zwrot prędkości klina jest przeciwny do przyjętego. Przyjmując, że w chwili początkowej  $t = 0$ , droga klina  $l = 0$ , po scałkowaniu otrzymano

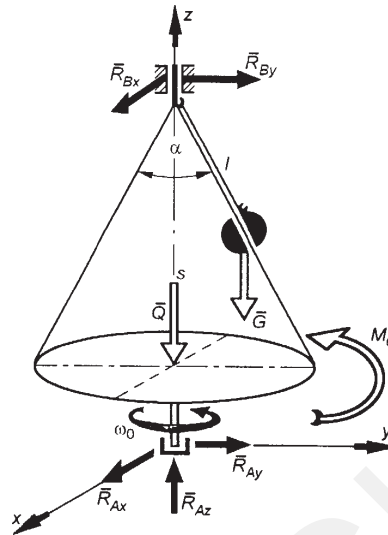
$$l = -\frac{km_1 \cos \alpha}{m_1 + m_2 + m_3}t^2 = -\frac{kG_1 \cos \alpha}{G_1 + G_2 + G_3}t^2.$$

### ZADANIE 3.3.5

Wzdłuż tworzącej stożka (rys. 3.3.5) w prowadnicy umieszczony jest ciężarek  $G$  na lince o długości  $l$ . Dany jest kąt  $\alpha$  oraz moment bezwładności stożka  $J_z = 0,3MR^2$ , gdzie  $M$  – masa stożka,  $R$  – promień jego podstawy. Stożek obraca się z prędkością kątową  $\omega_0$ . W pewnej chwili na stożek zaczyna działać para sił o momencie  $M_0 = 0,5t$  aż do chwili  $\tau$  zerwania linki z ciężarkiem  $G$ . Obliczyć prędkość kątową  $\omega$  stożka w chwili, gdy ciężarek zsunie się na poziom podstawy stożka.

#### Rozwiązanie

Ruch układu składa się z dwóch etapów. W etapie pierwszym, do chwili zerwania, linki działa para sił o momencie  $M_0$  i prędkość zmienia się od  $\omega_0$  do  $\omega_1$ . W etapie drugim, po zerwaniu linki i ustaniu działania pary sił, prędkość kątowna stożka zmienia się od  $\omega_1$  do wartości  $\omega$  odpowiadającej najniższemu położeniu ciężarka  $G$  na stożku. Zadanie rozwiązano, stosując zasadę krętu dla układu materialnego względem osi  $z$ , ze względu na ruch obrotowy stożka względem tej osi.



Rys. 3.3.5

**Etap I**

Zasada krętu ma postać

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = M_0 = 0,5t.$$

Rozdzielając zmienne i całkując obustronnie, otrzymuje się:

$$\int_{k_0}^{k_1} dK = \int_0^{\tau} 0,5t dt,$$

$$K_1 - K_0 = 0,25\tau^2,$$

$$K_1 = 0,25\tau^2 + K_0,$$

gdzie:

$K_0$  – kręt układu w chwili początkowej  $t = 0$ ,

$$K_0 = J_z \omega_0 + m v_0 l \sin \frac{\alpha}{2} = J_z \omega_0 + m \left( \omega_0 l \sin \frac{\alpha}{2} \right) l \sin \frac{\alpha}{2} = \left( 0,3MR^2 + ml^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \omega_0,$$

$K_1$  – kręt układu w chwili  $\tau$  zerwania linki i ustania działania pary sił.

**Etap II**

Obliczając sumę algebraiczną momentów wszystkich sił względem osi  $z$ , otrzymuje się  $\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$ , tzn.  $\frac{dK_z}{dt} = 0$  i w tym etapie ruchu i spełniona jest zasada zachowania krętu względem osi  $z$ .

Z zasady tej wynika, że  $K_z = \text{const}$  w każdej chwili i można w związku z tym porównać kręty w chwili początkowej i końcowej tego etapu ruchu:  $K_1 = K$ .

Kręt w chwili początkowej równy jest krętowi w chwili końcowej pierwszego etapu, a kręt w chwili końcowej wyraża się zależnością

$$K = J_z \omega + mvR = J_z \omega + m\omega R^2 = (0,3M + m)\omega R^2.$$

Porównując, otrzymuje się

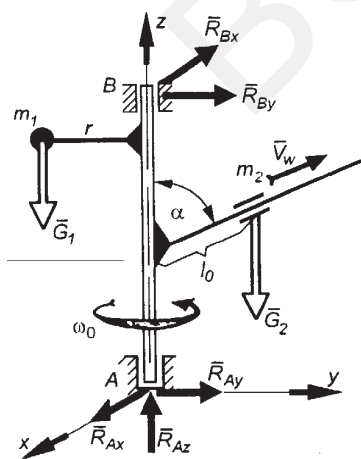
$$(0,3M + m)\omega R^2 = \left( 0,3MR^2 + ml^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \omega_0 + 0,25\tau^2,$$

skąd obliczyć można prędkość kątową stożka odpowiadającą dolnemu położeniu ciężarka  $G$ :

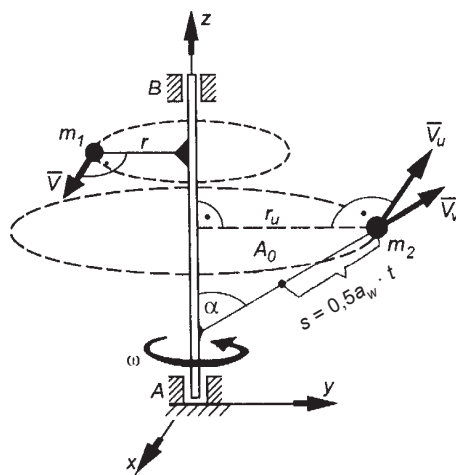
$$\omega = \frac{\left( 0,3MR^2 + ml^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \omega_0 + 0,25\tau^2}{(0,3M + m)R^2}, \quad m = \frac{G}{g}.$$

### ZADANIE 3.3.6

Na rysunku 3.3.6 pokazano element reduktora obrotów. Dane są masy  $m_1$  i  $m_2$  w położeniu początkowym  $l_0$  i  $r$ , obracające się z prędkością kątową  $\omega_0$  dokoła osi  $z$ . Po odryglowaniu masy  $m_2$  rozpoczyna ona ruch wzdłuż pręta nachylonego pod kątem  $\alpha$ . Jak powinna zmieniać się prędkość kątowa  $\omega$  układu, aby masa  $m_2$  poruszała się ze stałym przyspieszeniem  $\bar{a}_w$  względem pręta.



Rys. 3.3.6



Rys. 3.3.6a

**Rozwiązanie**

Do rozwiązania zastosowano zasadę krętu układu materialnego względem osi obrotu  $z$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz}.$$

Ponieważ  $\sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$ , więc  $\frac{dK_z}{dt} = 0$  i  $K_z = \text{const}$ . Względem osi  $z$  spełniona jest zasada zachowania krętu i w związku z tym można porównać kręt względem osi  $z$  w chwili odpowiadającej położeniu początkowemu mas i w dowolnej chwili ruchu, tzn.  $K_0 = K$ . Oznaczając przez  $v_1$  i  $v_2$  prędkości mas w położeniu początkowym, kręt  $K_0$  obliczyć można z zależności

$$K_0 = m_1 v_1 r + m_2 v_2 l_0 \sin \alpha.$$

Uwzględniając, że  $v_1 = \omega_0 r$ ,  $v_2 = \omega_0 l_0 \sin \alpha$ , otrzymuje się

$$K_0 = (m_1 r^2 + m_2 l_0^2 \sin^2 \alpha) \omega_0.$$

Kręt względem osi  $z$  w dowolnej chwili czasu obliczono jako sumę krętów obu mas, przy czym ruch masy  $m_2$  rozpatrzono jako ruch złożony z ruchu unoszenia i ruchu względnego względem pręta.

Pęd masy  $m_2$  wynosi

$$\bar{p}_2 = m_2 \bar{v}_b = m_2 (\bar{v}_u + \bar{v}_w) = m_2 \bar{v}_u + m_2 \bar{v}_w.$$

gdzie:

$\bar{v}_u$  – prędkość unoszenia wynikająca z ruchu obrotowego pręta wokół osi  $z$ ,

$\bar{v}_w$  – prędkość względna masy  $m_2$  o kierunku pręta (rys. 3.3.6a).

Kręt masy  $m_2$  względem osi  $z$  jako moment pędu względem tej osi równy jest jedynie momentowi składowej  $m_2 \bar{v}_u$ , gdyż składowa  $m_2 \bar{v}_w$  o prostej przecinającej oś  $z$  nie daje momentu względem tej osi. Kręt układu w dowolnym czasie wynosi

$$K = m_1 v r + m_2 v_u r_u$$

gdzie:

$$v = \omega \cdot r,$$

$$v_u = \omega \cdot r_u = \omega (l_0 + s) \sin \alpha,$$

przy czym  $s = \frac{1}{2} a_w t^2$ , ponieważ ruch względny odbywa się ze stałym przyspieszeniem  $a_w$ .

Po podstawieniu otrzymano

$$K = \left[ m_1 r^2 + m_2 (l_0 + 0,5 a_w t^2)^2 \sin^2 \alpha \right] \omega$$



i po porównaniu krętów  $K_0$  i  $K$  obliczono wartość prędkości kątowej  $\omega$ :

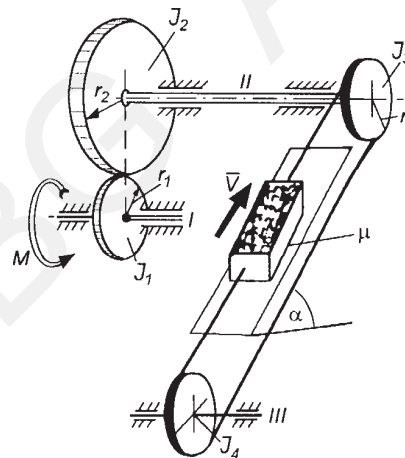
$$\omega = \frac{m_1 r^2 + m_2 l_0^2 \sin^2 \alpha}{m_1 r^2 + m_2 (l_0 + 0,5 a_w t^2)^2 \sin^2 \alpha} \omega_0.$$

### 3.4. Dynamika bryły

#### 3.4.1. Ruch postępowy, obrotowy i płaski

##### ZADANIE 3.4.1

W ślizgowej wyciągarce pokazanej na rysunku 3.4.1 znane są momenty bezwładności względem osi obrotu kół zębatach reduktora  $J_1, J_2$  i kół linowych  $J_3 = J_4 = J$ , promienie podziałowe kół zębatach  $r_1, r_2$ , promienie kół linowych  $r_3 = r_4 = r$ , kąt pochylecia podłoża  $\alpha$ , współczynnik tarcia pojemnika wciągarki po pochylni  $\mu$  oraz masa pojemnika wraz z nadawą  $m$ . Pomijając opory tarcia w łożyskach i w przekładni, obliczyć wartość momentu  $M$ , jaki należy przyłożyć na wale wejściowym przekładni, aby w czasie  $t_1$  rozruchu urządzenia pojemnik wciągarki uzyskał prędkość  $v_1$ . W chwili początkowej układ był w spoczynku.



Rys. 3.4.1

##### Rozwiązanie

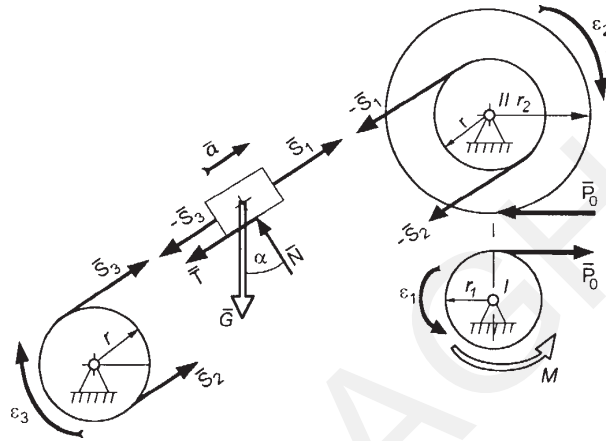
Zadanie rozwiązano trzema sposobami, wykorzystując:

- 1) dynamiczne równania ruchu postępowego i obrotowego,
- 2) zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy,
- 3) równania Lagrange'a II rodzaju.

**Ad 1)**

Koła zębate przekładni oddziałują na siebie siłami, które można rozłożyć na składowe: promieniową i obwodową  $\bar{P}_0$  wywołującą obrót kół. Na rysunku 3.4.1a zaznaczono tylko te siły, które są istotne dla ruchu układu.

Siły w linkach oznaczono przez  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ , wartości przyspieszeń kątowych wałów I, II, III oznaczono przez  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , przyspieszenie pojemnika wciągarki przez  $\bar{a}$ , i reakcje podłoża przez  $\bar{T}$  i  $\bar{N}$ .



Rys. 3.4.1a

Układ brył tworzących urządzenie wyciągowe został podzielony na poszczególne bryły, dla których dynamiczne równania ruchu mają postać (równania sił)

$$\text{dla wału I} \quad J_1 \cdot \varepsilon_1 = M - P_0 r_1 \quad (1)$$

$$\text{dla wału II} \quad (J_2 + J_3) \varepsilon_2 = P_0 r_2 + S_2 r_3 - S_1 r_3 \quad (2)$$

$$\text{dla wału III} \quad J_4 \cdot \varepsilon_3 = S_3 r_4 - S_2 r_4 \quad (3)$$

$$\text{dla pojemnika} \quad ma = S_1 - S_3 - T - G \sin \alpha \quad (4)$$

Momenty obrotowe poszczególnych sił przyjmuje się za dodatnie tych sił, które „pomagają” ruchowi danej bryły (zwroty zgodne ze zwrotami przyspieszeń), a ujemne dla przeciwdziałających ruchowi (przeciwnie zwroty do zwrotów przyspieszeń).

W powyższych równaniach występują dziesięć niewiadomych:  $M, P_0, S_1, S_2, S_3, T, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, a$ , i w związku z tym do tego układu należy dołączyć równania dodatkowe tak, aby otrzymać rozwiązywalny układ równań. Ze względu na to, że nie można ułożyć więcej równań sił, dodatkowych równań poszukuje się z zależności kinematycznych, tj. z równości wartości przyspieszeń stycznych kół przekładni

$$\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2 \quad (5)$$

z równości wartości przyspieszenia  $\bar{a}$  i przyspieszeń stycznych kół linowych

$$\varepsilon_2 r_3 = a \quad (6)$$

$$\varepsilon_3 r_4 = a \quad (7)$$

Ponadto, z zależności pomiędzy siłą tarcia i siłą normalną, otrzymuje się

$$T = \mu N, \quad \text{gdzie} \quad N = G \cos \alpha \quad (8)$$

Z układu równań (1) ... (8) otrzymano zależność pomiędzy wartością momentu  $M$  i przyspieszenia  $\bar{a}$

$$M = \frac{r_1}{rr_2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] a + \frac{rr_1}{r_2} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) G.$$

Narzucając kinematyczne warunki rozruchu, z powyższej zależności dobrać można odpowiednią wartość momentu napędowego. Przyjmując w czasie rozruchu jednostajnie przyspieszony ruch pojemnika, tzn. uwzględniając, że  $a = \text{const}$ , z czego wynika, że  $v = at$  i  $M = \text{const}$ , oraz uwzględniając dane otrzymuje się

$$M = \frac{r_1}{rr_2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \left[ \frac{v_1}{t_1} + \frac{rr_1}{r_2} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) G \right].$$

Jeżeli po zakończeniu rozruchu pojemnik porusza się ze stałą prędkością transportowania, (ruch jednostajny) to dla takiego okresu ruchu wartość momentu jest mniejsza i wynosi

$$M' = \frac{rr_1}{r_2} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) G.$$

Moment  $M'$  równoważy w tym przypadku opory siły tarcia i składowej siły ciężkości.

### Ad 2)

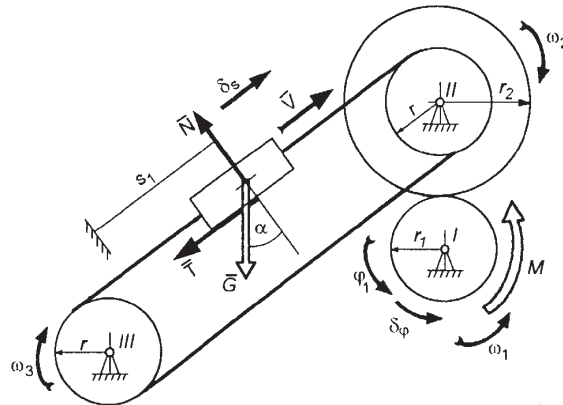
Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy ma postać

$$E_2 - E_1 = L_{1-2}.$$

Energia kinetyczna układu w położeniu początkowym (spoczynek)  $E_1 = 0$ . Energia kinetyczna układu w położeniu po czasie  $t_1$  wynosi:

$$E_2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 + J_3) \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m v_1^2,$$

gdzie:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  są wartościami prędkości kątowych wałów I, II, III (rys. 3.4.1b).



Rys. 3.4.1b

Z równości wartości prędkości liniowych na obwodzie kół zębatach oraz z równości wartości prędkości  $\bar{v}_1$  i prędkości na obwodzie kół linowych otrzymuje się zależności kinematyczne:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \omega_2 r_3 = v_1, \quad \omega_3 r_4 = v_1.$$

Uwzględniając powyższe zależności we wzorze na energię kinetyczną  $E_2$ , otrzymano:

$$E_2 = \frac{1}{2r^2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] v_1^2.$$

Oznaczając przemieszczenie liniowe pojemnika przez  $s_1$  i przemieszczenie katowe wału I przez  $\varphi_1$ , obliczono pracę sił zewnętrznych działających na układ:

$$L_{1-2} = \int_0^{\varphi_1} M d\varphi - \int_0^{s_1} (G \sin \alpha + T) ds,$$

gdzie  $T = \mu N = \mu G \cos \alpha$ .

Przyjmując identyczne warunki jak w przypadku 1) otrzymuje się:

$$L_{1-2} = M\varphi_1 - G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)s_1.$$

Korzystając z zależności kinematycznych:

$$\varphi_1 r_1 = \varphi_2 r_2, \quad \varphi_2 r_3 = s_1$$

otrzymuje się  $\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1 r_3} s_1 = \frac{r_2}{r_1 r} s_1$  i pracę  $L_{1-2}$  równą

$$L_{1-2} = \left[ M \frac{r_2}{r_1 r} - G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right] s_1.$$

Z warunków rozruchu (ruch jednostajnie przyspieszony) wynika, że

$$v_1 = at_1 \quad \text{i} \quad s_1 = \frac{at_1^2}{2} = \frac{v_1 t_1}{2}.$$

Podstawiając obliczone wartości  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $L_{1-2}$  (z uwzględnieniem  $s_1$ ) do zasady równowartości energii kinetycznej i pracy uzyskuje się szukaną wartość momentu napędowego

$$M = \frac{r_1}{rr_2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \frac{v_1}{t_1} + \frac{rr_1}{r_2} (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) G.$$

### Ad 3)

Układ posiada jeden stopień swobody i w związku z tym ruch układu opisany będzie jednym równaniem wyprowadzonym z równania Lagrange'a II rodzaju.

Równania Lagrange'a II rodzaju dla rozważanego przypadku (ruch nie zachodzi w polu potencjalnym ze względu na występującą siłę tarcia  $\bar{T}$  i niezależny od pola potencjalnego moment napędowy) mają postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s,$$

gdzie  $s$  jest współrzędną uogólnioną odpowiadającą przemieszczeniu  $s_1$  pojemnika, a  $\dot{s}$  uogólnioną prędkością równą wartości prędkości  $\bar{v}$  pojemnika, przy czym  $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ .

Obliczając energię kinetyczną jak w przypadku 2), otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2r_2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \dot{s}^2,$$

a następnie:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{s}} = \frac{1}{r^2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \dot{s},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{1}{r^2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \ddot{s}.$$

Praca przygotowana  $\delta L$  na odpowiednich przesunięciach przygotowanych (rys. 3.4.1b) wynosi:

$$\delta L = M\delta\varphi - (G \sin \alpha + T)\delta s,$$

gdzie  $T = \mu N = \mu G \cos \alpha$ .

Z analogicznych zależności kinematycznych jak w przypadku 2) otrzymuje się zależność

$$\delta\varphi = \frac{r_2}{r_1 r} \delta s.$$

Uwzględniając powyższe, wyznaczono siłę uogólnioną  $Q_s$  z zależności

$$Q_s = \frac{\delta L}{\delta s} = M \frac{r_2}{r_1 r} - G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Po podstawieniu obliczonych wielkości do równań Lagrange'a otrzymuje się

$$\frac{1}{r^2} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \ddot{s} = M \frac{r_2}{r_1 r} - G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha),$$

skąd

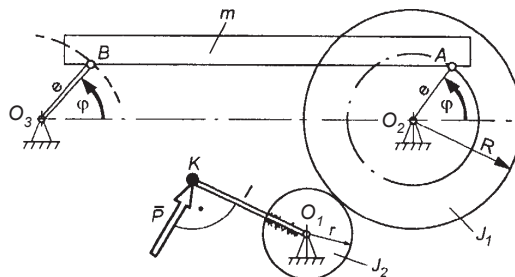
$$M = \frac{r_1}{r_2 r} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \ddot{s} + \frac{r r_1}{r_2} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) G.$$

Uwzględniając, że  $\ddot{s} = a$ , oraz przyjmując warunki rozruchu jak poprzednio, obliczono wartość momentu napędowego

$$M = \frac{r_1}{r_2 r} \left[ J_1 \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_2 + 2J + \frac{G}{g} r^2 \right] \frac{v_1}{t_1} + \frac{r r_1}{r_2} (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) G.$$

### ZADANIE 3.4.2

Na rysunku 3.4.2 pokazano schemat ręcznego przesiewacza wstrząsowego. Dane są promienie  $r$  i  $R$ , mimośród  $e = O_2A = O_3B$ , długość korby  $O_1K = l$ , momenty bezwładności względem osi obrotu  $J_1$  i  $J_2$ , masa sita  $m$ . Zakładając stałą wartość siły  $\bar{P}$ , obliczyć prędkość sita w najwyższym położeniu, jeżeli dla  $t = 0$   $\varphi = 0$ . Masę pręta  $O_3B$  pominąć.



Rys. 3.4.2

**Rozwiązanie**

Zadanie rozwiązano trzema sposobami, wykorzystując:

- 1) równania dynamiczne ruchu postępowego i obrotowego,
- 2) zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy,
- 3) równania Lagrange'a II rodzaju.

**Ad 1)**

Po oswoobodzeniu od więzów i przyłożeniu sił reakcji otrzymuje się układ jak na rysunku 3.4.2a.

Ze względu na to, że pręt  $O_3B$  jest bezmasowy i nieobciążony siłami czynnymi oraz jest zamocowany przegubowo, traktuje się go jak cięgno i dla tego siła  $\bar{R}_B$  działa wzdłuż osi pręta. Siła oddziaływania zębów przekładni rozłożona jest na dwie składowe: obwodową  $\bar{F}_0$  i promieniową  $\bar{F}_r$ . Siłę  $\bar{R}_A$  o nieznaną prostą działania zastąpiono dwiema składowymi  $\bar{R}_{Ax}$  i  $\bar{R}_{Ay}$ .

Równania dynamiczne ruchu brył mają postać:

- dla koła napędowego

$$J_1 \varepsilon_1 = Pl - F_0 r \quad (1)$$

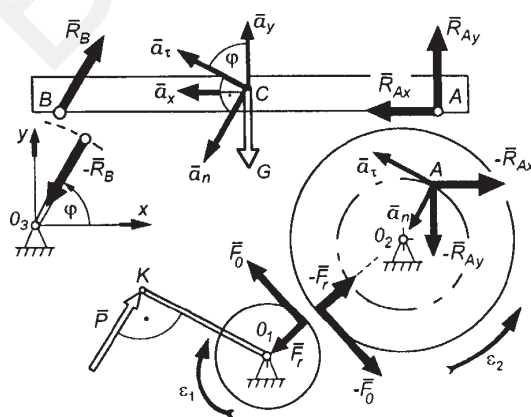
- dla koła napędzanego rynną

$$J_2 \varepsilon_2 = F_0 R - e (R_{Ay} \cos \varphi + R_{Ax} \sin \varphi) \quad (2)$$

- dla sity:

$$m a_x = R_B \cos \varphi - R_{Ax} \quad (3)$$

$$m a_y = R_B \sin \varphi + R_{Ay} - G$$



Rys. 3.4.2a

Ruch sita jest ruchem postępowym krzywoliniowym (punkty sita poruszają się po okręgach niewspółśrodkowych) i dlatego

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_C = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Rzuty przyspieszenia środka masy sita wynoszą:

$$\begin{aligned} a_x &= -a_\tau \sin \varphi - a_n \cos \varphi, \\ a_y &= a_\tau \cos \varphi - a_n \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Uwzględniając, że  $G = mg$  oraz zależności kinematyczne:

$$\frac{r}{R} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{i} \quad a_\tau = \varepsilon_2 e$$

z równań (1), (2), (3), (4) otrzymuje się:

$$\left[ J_2 + J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + me^2 \right] \varepsilon_2 = P \frac{IR}{r} - mge \cos \varphi.$$

Podstawiając  $J_2 + J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + me^2 = J_0$  i  $\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_2}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega_2}{d\varphi} \cdot \omega_2$ , otrzymuje się po rozdzieleniu zmiennych równanie różniczkowe

$$\omega_2 d\omega_2 = \frac{1}{J_0} \left( P \frac{IR}{r} - mge \cos \varphi \right) d\varphi.$$

Uwzględniając warunki początkowe ruchu:  $t = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = \omega_2 = 0$ , z powyższego równania obliczono wartość prędkości kątowej  $\omega'_2$  w najwyższym położeniu sita, tj. dla  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\omega'_2 = \sqrt{\frac{P \frac{IR}{r} \pi - 2mge}{J_0}}.$$

Prędkość sita w tym położeniu wynosi

$$v = \omega'_2 \cdot e = e \sqrt{\frac{P \frac{IR}{r} \pi - 2mge}{J_0}}.$$

**Uwaga.** Prostsza postać dynamicznych równań ruchu uzyskać można, rozkładając siłę  $\bar{R}_A$  na składową styczną i normalną.



**Ad 2)**

Korzystając z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy

$$E_2 - E_1 = L_{1-2}$$

i przyjmując spoczynkowe położenie początkowe układu, tj.  $E_1 = 0$ , otrzymuje się  $E_2 = L_{1-2}$ .

Pracę wykonuje tylko siła ciężkości  $\bar{G}$  sita oraz siła  $\bar{P}$  (rys. 3.4.2b), czyli

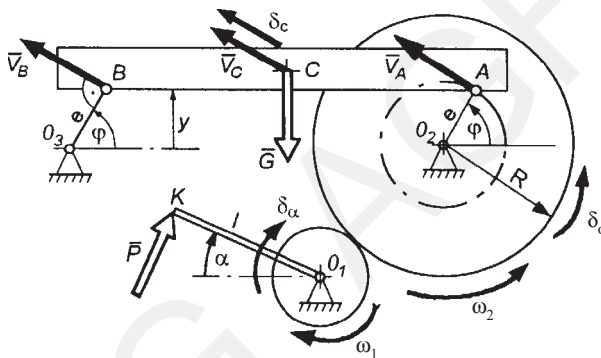
$$L_{1-2} = \int_0^{\alpha_1} Pl d\alpha - \int_0^{y_1} G dy,$$

gdzie:

$\alpha$  – współrzędna kątowa korby  $O_1K$ ,

$y$  – współrzędna pionowa punktu  $A$  (lub  $B$ ),

$G = mg$ .



Rys. 3.4.2b

Uwzględniając, że  $\alpha r = \varphi R$ , skąd  $\alpha = \frac{R}{r} \varphi$ , otrzymuje się

$$L_{1-2} = \int_0^{\varphi_1} Pl \frac{R}{r} d\varphi - \int_0^{y_1} mg dy,$$

gdzie:  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $y_1 = e$  odpowiada najwyższemu położeniu sita

i po scałkowaniu

$$L_{1-2} = P \frac{lR}{r} \frac{\pi}{2} - mge.$$

Energia kinetyczna układu w najwyższym położeniu sita wynosi

$$E_2 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

gdzie  $v = v_A = v_B = v_C = \omega_2 e$ .

Uwzględniając powyższe, oraz że  $\omega_1 r = \omega_2 R$ , otrzymano

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[ J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2 + me^2 \right] \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2,$$

a następnie podstawiając  $L_{1-2}$  i  $E_2$  do zasady równowartości energii kinetycznej i pracy, obliczono prędkość w najwyższym położeniu sita

$$v = e \sqrt{\frac{P \frac{IR}{r} \pi - 2mge}{J_0}}.$$

### Ad 3)

W rozpatrywanym przypadku równanie Lagrange'a II rodzaju (ruch nie jest w polu potencjalnym) ma postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_\varphi,$$

gdzie  $\varphi$  przyjęto jako współrzędną uogólnioną, jak na rysunku 3.4.2b, na którym zaznaczono także przesunięcia przygotowane. Pracę przygotowaną zapisano:

$$\delta L = Pl\delta\alpha + G\delta c \cos(180 - \alpha) = Pl\delta\alpha - G\delta c \cos \varphi.$$

Przesunięcia przygotowane spełniają (analogicznie do prędkości) zależności:

$$\delta\alpha = \frac{R}{r} \delta\varphi, \quad \delta c = e\delta\varphi$$

i wówczas praca przygotowana jest równa

$$\delta L = \left( P \frac{IR}{r} - Ge \cos \varphi \right) \delta\varphi, \quad G = mg,$$

a stąd siła uogólniona

$$Q = \frac{\delta L}{\delta\varphi} = P \frac{IR}{r} - mge \cos \varphi.$$

Energia kinetyczna

$$E = \frac{1}{2} \left[ J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2 + me^2 \right] \omega_2^2 = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 \quad \text{i} \quad \frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = J_0 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_0 \ddot{\varphi}.$$

Równanie różniczkowe ruchu wynikające z równania Lagrange'a II rodzaju ma zatem postać

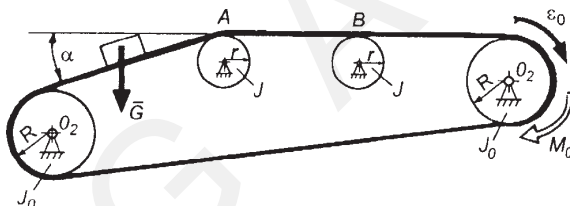
$$J_0 \ddot{\varphi} = P \frac{IR}{r} - mge \cos \varphi.$$

Rozwiązując powyższe równanie identycznie jak w przypadku (1), otrzymuje się prędkość  $\omega_2$ , a następnie prędkość  $v$  sita w górnym położeniu

$$v = e \sqrt{\frac{P \frac{IR}{r} \pi - 2mge}{J_0}}.$$

### ZADANIE 3.4.3

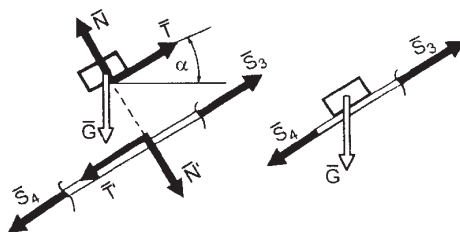
Wyznaczyć przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_0$  bębna napędowego podajnika taśmowego napędzanego stałym momentem  $M_0$ , jeżeli rozruch urządzenia trwa do chwili, w której przemieszczany przedmiot o ciężarze  $G$  znajduje się poza pierwszą rolką  $A$  (rys. 3.4.3). Dane są momenty bezwładności względem osi obrotu  $J_0$  bębna napędowego i zwrotnego,  $J$  – rolek podtrzymujących taśmę, promienie  $R$  bębnow i  $r$  rolek oraz kąt  $\alpha$ . Pomijając elastyczność taśmy i jej masę.



Rys. 3.4.3

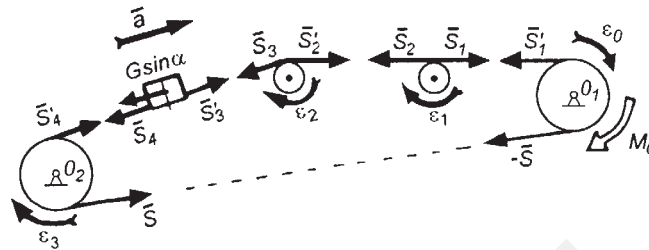
### Rozwiązanie

Transportowanie przedmiotu odbywa się na skutek braku poślizgu pomiędzy taśmą podajnika i przemieszczanym przedmiotem, tak że porusza się on razem z taśmą. Brak poślizgu oznacza, że siła tarcia  $\bar{T}$  pomiędzy taśmą i przedmiotem jest siłą tarcia nierozwiniętego. Wzajemne oddziaływanie pomiędzy tymi elementami układu pokazano na rysunku 3.4.3a.



Rys. 3.4.3a

W dalszej analizie pominięto odkształcenie taśmy spowodowane siłą  $\bar{N}'$ . Układ podajnika po podzieleniu na poszczególne bryły i po przyłożeniu sił wzajemnego oddziaływania pokazano na rysunku 3.4.3b.



Rys. 3.4.3b

Równania dynamiczne ruchu dla poszczególnych brył mają postać:

$$J_0 \varepsilon_0 = M_0 + SR - S_1 R = M_0 + (S - S_1) R,$$

$$J_0 \varepsilon_3 = S'_4 R - SR = (S'_4 - S) R,$$

$$J_0 \varepsilon_1 = S_1 r - S_2 r = (S_1 - S_2) r,$$

$$J_0 \varepsilon_2 = S'_2 - S_3 r = (S'_2 - S_3) r,$$

$$ma = S'_3 - S_4 - G \sin \alpha,$$

przy czym  $S = S'$ ,  $S_1 = S'_1$ ,  $S_2 = S'_2$ ,  $S_3 = S'_3$ ,  $S_4 = S'_4$ ,  $G = mg$ .

Ze względu na równość promieni  $R$  bębnow oraz  $r$  rolek zachodzi

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_3 \text{ i } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon,$$

a ponadto  $a = \varepsilon r = \varepsilon_0 R$ .

Uwzględniając powyższe, z równań dynamicznych otrzymuje się przyspieszenie kątowe bębna napędowego

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0 - GR \sin \alpha}{2J_0 + 2J \left( \frac{R}{r} \right)^2 + mR^2}.$$

Dla drugiego etapu ruchu, gdy transportowana masa znajduje się poza rolką  $A$  (rys. 3.4.3c), równania ruchu mają postać:

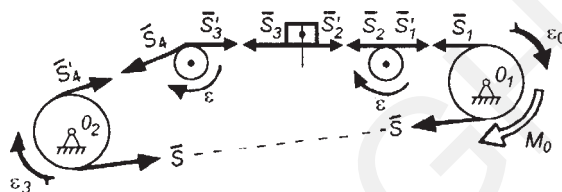
$$J_0 \varepsilon_0 = M_0 + (S - S_1)R,$$

$$J_0 \varepsilon_3 = (S'_4 - S)R,$$

$$J \varepsilon = (S_1 - S_2)r,$$

$$J \varepsilon = (S_3 - S_4)r,$$

$$ma_1 = S_2 - S_3.$$



Rys. 3.4.3c

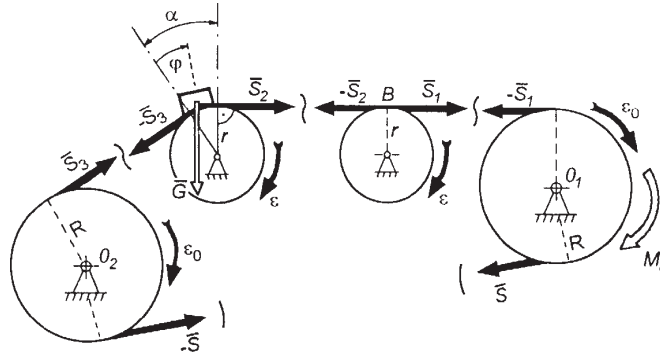
Uwzględniając, że  $a_1 = \varepsilon r = \varepsilon_0 R$ , z równań ruchu otrzymuje się

$$\varepsilon_0 = \frac{M_0}{2J_0 + 2J \left( \frac{R}{r} \right)^2 + mR^2}.$$

W tym przypadku przyspieszenie kątowe jest większe niż w pierwszym etapie ruchu, gdyż przy tym samym momencie  $M_0$  obciążenie siłami jest mniejsze o składową  $G \sin \alpha$ . W następnym etapie ruchu, tj. gdy masa znajduje się pomiędzy bębnum napędowym i rolką  $B$ , przyspieszenie  $\varepsilon_0$  będzie identyczne jak w drugim etapie, natomiast zmianę ulegną siły napięcia w taśmie, na odcinku do rolki  $B$ . Jako szczególny, rozpatrzono przypadek, gdy masa przechodzi przez rolkę  $A$ , zakładając, że docisk masy do taśmy jest wystarczająco duży, aby masa nie została odrzucona i aby nie nastąpił poślizg po taśmie. W tej fazie wykonuje ona ruch po okręgu dookoła osi rolki (masę traktujemy jak punkt materialny ze względu na jej małe wymiary). Stosując np. zasadę d'Alamberta uzyskuje się warunek, który gwarantuje nieodrywanie się masy od taśmy na rolce,

tzn. prędkość kątowna na tej rolce  $\omega < \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{r_1}}$ , gdzie  $r_1$  jest odległością punktu o ma-

sie  $m$  od osi rolki. Dla tego etapu ruchu pokazano schemat obliczeniowy na rysunku 3.4.3d, gdzie przez  $\varphi$  oznaczono kąt obrotu rolki  $A$ . Przyjęto odległość masy  $m$  od osi rolki równą jej promieniowi  $r$ . Zmianę położenia masy na rolce określa kąt  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ .



Rys. 3.4.3d

Równania dynamiczne ruchu w przedziale  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  mają postać:

$$\begin{aligned} J_0 \varepsilon_0 &= M_0 + (S - S_1)R, \\ J_0 \varepsilon_0 &= (S_3 - S)R, \\ J \varepsilon &= (S_1 - S_2)r, \\ J_1 \varepsilon &= (S_2 - S_3)r - Gr \sin(\alpha - \varphi), \end{aligned}$$

przy czym  $J_1 = J + mr^2$ .

Uwzględniając, że  $\varepsilon_0 R = \varepsilon r$ ,  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ , oraz przyjmując  $\varphi$  jako małe w przedziale  $[0, \alpha]$ , z czego wynika, że  $\sin \varphi \cong \varphi$ ,  $\cos \varphi \cong 1$ , otrzymuje się równanie różniczkowe ruchu w postaci

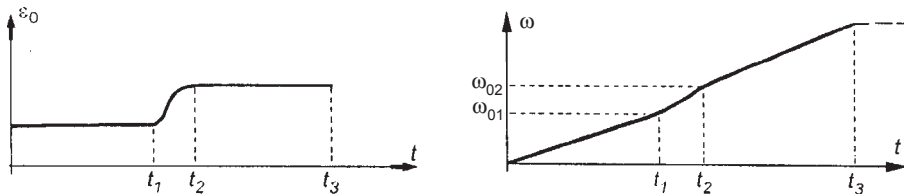
$$\ddot{\varphi} - p\varphi = k,$$

gdzie:

$$p = \frac{GR^2 r \cos \varphi}{2J_0 r^2 + (2J + mr^2)R^2}, \quad k = \frac{rR(M_0 - GR \sin \alpha)}{2J_0 r^2 + (2J + mr^2)R^2}.$$

Rozwiązując powyższe równanie różniczkowe przy warunkach początkowych  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \omega_1$ , otrzymuje się

$$\varphi = \frac{1}{2}k \left( e^{\sqrt{p}t} + e^{-\sqrt{p}t} \right) + \frac{1}{2}\omega_1 \sqrt{p} \left( e^{\sqrt{p}t} - e^{-\sqrt{p}t} \right).$$



Rys. 3.4.3e

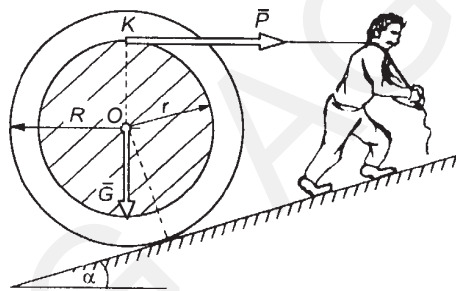
Prędkość kątowna  $\omega_1$  jest prędkością końcową pierwszego etapu ruchu (do rolki  $A$ ) i początkową prędkością ruchu na rolce  $A$ . Wykres zmian przyspieszenia kąowego  $\epsilon_0$  i prędkości kąowej  $\omega_0$  bębna napędowego pokazano na rysunku 3.4.3e. Obliczono odpowiednie wielkości zgodnie ze wzorami:

$$\epsilon_0 = \ddot{\varphi} \frac{r}{R} \quad \text{dla przedziału } [0, \tau], \quad \omega_{01} = \omega_1 \frac{r}{R}, \quad \omega_{02} = \dot{\varphi}(\tau) \frac{r}{R}.$$

Czas  $t_1$  odpowiada chwili wejścia masy  $m$  na rolkę  $A$ ,  $t_2$  odpowiada chwili zejścia z rolki  $A$ , a czas  $t_3$  chwili przejścia do ruchu ustalonego.

#### ZADANIE 3.4.4

Celem rozwinięcia kabla ze szpuli przyłożono do szpuli siłę  $\vec{P}$  (rys. 3.4.4). Zakładając, że szpula toczy się bez poślizgu oraz, że siła  $\vec{P}$  jest stale pozioma, wyznaczyć wartość prędkości  $\vec{v}_0$  środka  $O$  szpuli po czasie  $t = \tau$



Rys. 3.4.4

Dane:

- $R, r$  – promienie tarczy i bębna szpuli,
- $\alpha$  – kąt pochylenia zbocza,
- $G$  – ciężar szpuli,
- $J_0$  – moment bezwładności szpuli względem osi  $O$ .

Masę kabla pominać. W położeniu początkowym szpula była w spoczynku. Opór toczenia pominać.

#### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano czterema sposobami korzystając z:

- 1) zasady krętu,
- 2) dynamicznych równań ruchu płaskiego,
- 3) zasady równowartości energii kinetycznej i pracy,
- 4) równań Lagrange'a II rodzaju.

**Ad 1)**

Prędkość  $\bar{v}_0$  środka można wyznaczyć, rozpatrując ruch płaski, jakim porusza się szpula, jako ruch względem chwilowego środka obrotu. Ze względu na toczenie bez poślizgu chwilowy środek obrotu znajduje się w punkcie  $C$ . Zasada krętu w tym przypadku ma postać

$$\frac{dK_C}{dt} = M_C \quad (1)$$

gdzie:

$K_C$  – wartość krętu w chwili  $t$  szpuli względem punktu  $C$ ,

$M_C = \sum_{i=1}^n M_{iC}$  – algebraiczna suma momentów wszystkich sił względem punktu  $C$ .

Kręt  $\bar{K}_C$  obliczyć można, korzystając z zależności między krętem  $\bar{K}_C$  względem punktu  $C$  a krętem  $\bar{K}_0$  względem środka masy  $O$

$$\bar{K}_C = \bar{K}_0 + \bar{r}_0 \times M\bar{v}_0,$$

gdzie:

$\bar{r}_0$  – promień wodzący środka  $O$  względem punktu  $C$ ,

$M\bar{v}_0$  – pęd szpuli (pęd środka masy).

Wektory  $\bar{K}_0$  i  $\bar{r}_0 \times M\bar{v}_0$  są równoległe i o tych samych zwrotach, więc wartość krętu  $\bar{K}_C$  wynosi

$$K_C = K_0 + r_0 M v_0 \sin(\bar{r}_0, \bar{v}_0),$$

przy czym  $K_0 = J_0 \omega$ ,  $v_0 = \omega r_0 = \omega R$ ,  $(\bar{r}_0, \bar{v}_0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $M = \frac{G}{g}$ , gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową szpuli.

Podstawiając powyższe otrzymuje się

$$K_C = \left( \frac{J_0}{R} + \frac{G}{g} R \right) v_0.$$

Suma algebraiczna momentów sił względem punktu  $C$  wynosi (rys. 3.4.4a):

$$M_C = P d_1 - GR \sin \alpha = P (R \cos \alpha + r) - GR \sin \alpha,$$

Całkując równanie (1) w przedziale czasu  $[0, \tau]$ , otrzymuje się

$$K_C(\tau) - K_C(0) = \int_0^\tau M_C dt.$$



Ponieważ  $K_C(0) = 0$  (w chwili początkowej szpula była w spoczynku) i  $M_C = \text{const}$ , więc

$$K_{C(\tau)} = M_C \cdot \tau$$

i

$$\left( \frac{J_0}{R} + \frac{G}{g} R \right) v_0 = [P(R \cos \alpha + r) - GR \sin \alpha] \tau,$$

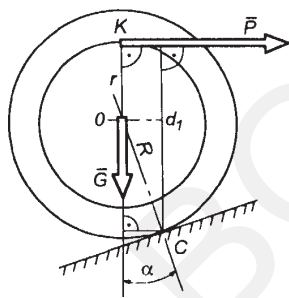
stąd szukana wartość prędkości wynosi

$$v_0 = \frac{P(R \cos \alpha + r) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} R g \tau.$$

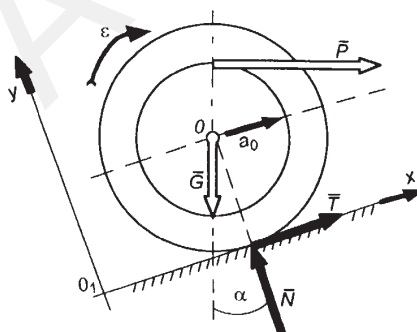
**Uwaga.** Kręt względem punktu  $C$  można policzyć z zależności  $K_C = J_C \omega$ . Moment bezwładności szpuli względem punktu  $C$  wyznacza się na podstawie twierdzenia Steinera  $J_C = J_0 + MR^2$  i wówczas

$$K_C = (J_0 + MR^2) \omega = \left( \frac{J_0}{R} + \frac{G}{g} R \right) v_0.$$

Wynik ten jest identyczny jak uzyskany poprzednio.



Rys. 3.4.4a



Rys. 3.4.4b

### Ad 2)

Przyjmując układ odniesienia jak na rysunku 3.4.4b oraz uwalniając szpulę od więzów, otrzymuje się następujące równania ruchu płaskiego szpuli:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = P \cos \alpha + T - G \sin \alpha,$$

$$\frac{G}{g} \ddot{y} = N - G \cos \alpha - P \sin \alpha,$$

$$J_0 \epsilon = Pr - TR,$$

gdzie:  $\ddot{x} = a_0$ ,  $\ddot{y} = 0$ .

Siła  $\bar{T}$  jest siłą tarcia nierozwiniętego i w związku z tym nie można skorzystać z zależności Coulomba  $T = \mu N$ , czyli należy ją traktować jako siłę nieznaną.

Uwzględniając, że  $a_0 = \varepsilon R$  i rugując siłę tarcia z pierwszego i trzeciego równania, otrzymuje się:

$$a_0 = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR.$$

Po scałkowaniu otrzymuje się wartość prędkości w zależności od czasu. Przyjmując  $v(0) = 0$  wartość prędkości środka szpuli w chwili  $\tau$  wynosi

$$v_0 = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR\tau.$$

### Ad 3)

Praca sił przyłożonych do szpuli w ruchu płaskim jest równa  $L_{1-2} = L_p + L_\varphi$ , gdzie  $L_p$  jest pracą w postępowym ruchu unoszenia,  $L_\varphi$  pracą w obrotowym ruchu względnym:

$$L_p = (P \cos \alpha + T - G \sin \alpha)s,$$

$$L_\varphi = (Pr - TR)\varphi, \quad s = s(t).$$

Energia kinetyczna w chwili początkowej  $E_1 = 0$ , a w chwili  $t$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_0^2(t) + \frac{1}{2} J_0 \omega^2(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) v_0^2(t).$$

Z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy  $E_2 - E_1 = L_{1-2}$  otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) v_0^2(t) = [P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha] \frac{s(t)}{R} \quad (2)$$

a po zróżniczkowaniu

$$\left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) v_0(t) \frac{dv_0(t)}{dt} = [P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha] \frac{1}{R} \frac{ds(t)}{dt},$$

gdzie:  $\frac{dv_0(t)}{dt} = a_0$ ,  $\frac{ds(t)}{dt} = v_0(t)$ ,

czyli

$$\left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) a_0 = [P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha] \frac{1}{R}$$

lub

$$a_0 = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR.$$

Otrzymuje się więc identyczne równanie różniczkowe jak w przypadku 2).

Po scałkowaniu otrzymano wartość prędkości  $\bar{v}_0$

$$v_0 = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR\tau.$$

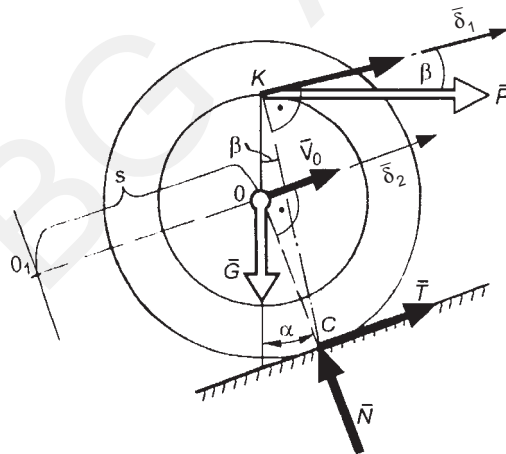
**Uwaga.** Ruch środka szpuli jest w tym przypadku jednostajnie przyspieszony i można, nie różniczkując równania (2) wykorzystać zależność pomiędzy prędkością a przemieszczeniem  $v_0 = \sqrt{2a_0 s}$ . Z równania (2) otrzyma się wówczas zależność na przyspieszenie  $a_0$ .

#### Ad 4)

Ruch szpuli zachodzi w polu niepotencjalnym. W rozpatrywanym przypadku równanie Lagrange'a II rodzaju ma postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s.$$

Jako współzrzedną uogólnioną przyjęto współzrzedną naturalną  $s$  (rys. 3.4.4c)



Rys. 3.4.4c

Siłę uogólnioną wyznaczono z pracy przygotowanej  $dL = Q_s \delta s$ , gdzie  $\delta s$  jest przesunięciem przygotowanym odpowiadającym współzrzednej  $s$ . Przesunięcie przygotowane punktu przyłożenia siły  $\bar{P}$  oznaczono przez  $\delta_1$ , zaś siły  $G$  przez  $\delta_2 = \delta_s$ . Przesunięcie przygotowane jest proporcjonalne do prędkości możliwej danego punktu i posiada jej kierunek i zwrot. Prędkości  $\bar{v}_k$  i  $\bar{v}_0$  określono względem chwilowego środka obrotu  $C$ .

Praca przygotowana jest równa

$$\delta L = P\delta_1 \cos \beta - G\delta_2 \sin \alpha.$$

Siła tarcia  $\bar{T}$  nie wykonuje pracy, ponieważ toczenie szpuli zachodzi bez poślizgu. Obliczając

$$\cos \beta = \frac{KO + OC \cos \alpha}{KC} = \frac{r + R \cos \alpha}{KC}$$

oraz uwzględniając, że  $\frac{v_0}{OC} = \frac{v_k}{KC}$ , z czego wynika zależność

$$\frac{\delta_2}{OC} = \frac{\delta_1}{KC} \quad (\delta_1 = \lambda \cdot v_k, \quad \delta_2 = \lambda \cdot v_0, \quad \lambda = \text{const}),$$

otrzymuje się:

$$\delta L = P \left( \frac{r}{R} + \cos \alpha \right) \delta_2 - G\delta_2 \sin \alpha, \quad \delta_2 = \delta s$$

i siła uogólniona wynosi

$$Q_s = P \left( \frac{r}{R} + \cos \alpha \right) - G \sin \alpha.$$

Energia kinetyczna jest równa sumie energii kinetycznej w ruchu postępowym i obrotowym:

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) \dot{s}^2, \quad \dot{s} = v_0.$$

Obliczając

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{s}} = \left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) = \left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) \ddot{s}, \quad \frac{\partial E}{\partial s} = 0,$$

z równań Lagrange'a II rodzaju otrzymuje się

$$\left( \frac{G}{g} + \frac{J_0}{R^2} \right) \ddot{s} = P \left( \frac{r}{R} + \cos \alpha \right) - G \sin \alpha,$$

i przyspieszenie środka szpuli wynosi

$$a_0 = \ddot{s} = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR.$$

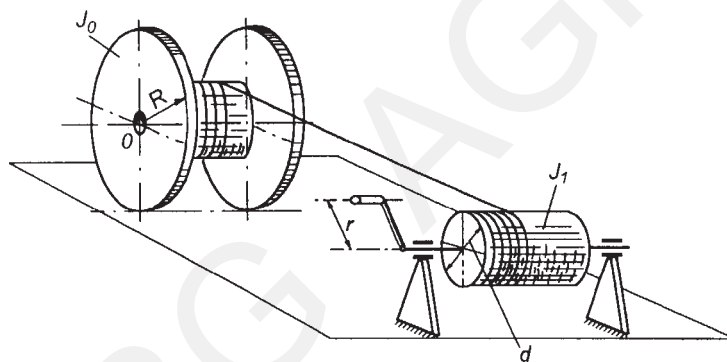
Postępując identycznie jak w poprzednich przypadkach, obliczono prędkość środka  $O$

$$v_0 = \frac{P(r + R \cos \alpha) - GR \sin \alpha}{J_0 g + GR^2} gR\tau.$$

We wszystkich zastosowanych w zadaniu metodach rozwiązania stopień trudności jest porównywalny, przy czym w przypadku 4), ze względu na pracochłonność, pewną trudność sprawia wyznaczenie siły uogólnionej.

### ZADANIE 3.4.5

Za pomocą ręcznego kołowrotu po powierzchni poziomej przetaczana jest bez poślizgu szpula (rys. 3.4.5). Wyznaczyć przyspieszenie kątowe kołowrotu, jeżeli prostopadle do korby przyłożono siłę  $\vec{P}$  o stałej wartości.



Rys. 3.4.5

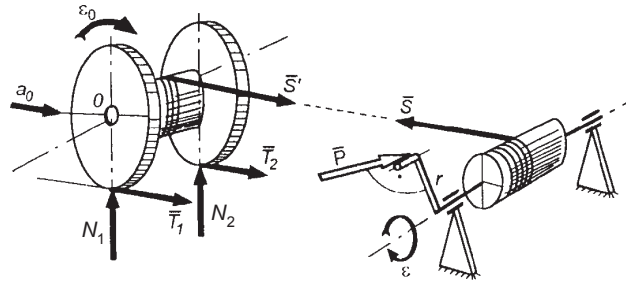
Dane:

- $J_1$  – moment bezwładności szpuli względem osi kołowrotu,
- $J_0$  – moment bezwładności szpuli względem osi  $O$ ,
- $m_0$  – masa szpuli,
- $d$  – średnica bębna kołowrotu,
- $r$  – ramię bezmasowej korby kołowrotu,
- $r_0, R$  – promienie szpuli.

### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano dwiema metodami, wykorzystując:

- 1) równania dynamiczne ruchu obrotowego i płaskiego,
- 2) równania Lagrange'a II rodzaju.



Rys. 3.4.5a

**Ad 1)**

Metodę tę zastosowano dla dwóch przypadków toczenia szpuli: z pominięciem oporu toczenia i z uwzględnieniem oporu toczenia. W przypadku pierwszym, po oswo-bodzeniu od więzów otrzymano dwa podukłady jak na rysunku 3.4.5a (reakcje na osi kołowrotu nie są tu istotne).

Równania dynamiczne ruchu mają postać:

– dla kołowrotu

$$J_1 \varepsilon = Pr - S \frac{d}{2},$$

– dla szpuli

$$J_0 \varepsilon_0 = S' r_0 - T_1 R - T_2 R,$$

$$m_0 a_0 = S' + T_1 + T_2,$$

gdzie:

$a_0$  – przyspieszenie kątowe kołowrotu,

$\varepsilon_0$  – przyspieszenie kątowe szpuli,

$\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe kołowrotu,

$S' = S$ .

Podstawiając  $T_1 + T_2 = T$  jako sumaryczną siłę tarcia nierozwiniętego, otrzymuje się:

$$J_1 \varepsilon = Pr - S \frac{d}{2} \tag{1}$$

$$J_0 \varepsilon_0 = S r_0 - TR \tag{2}$$

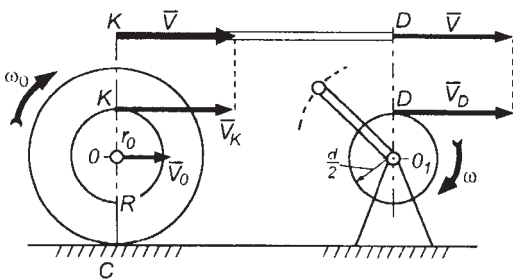
$$m_0 a_0 = S + T \tag{3}$$

Równania dodatkowe otrzymuje się, uwzględniając zależności kinematyczne:

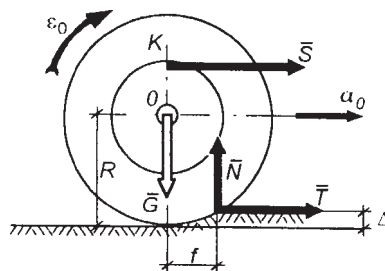
$$\varepsilon \frac{d}{2} = \varepsilon_0 (R + r_0) \tag{4}$$

$$a_0 = \varepsilon_0 R. \tag{5}$$

Zależność (4) uzyskać można, różniczkując wartość prędkości  $v = \omega \frac{d}{2} = \omega_0 (R + r_0)$  (rys. 3.4.5b).



Rys. 3.4.5b



Rys. 3.4.5c

Rozwiązując układ równań (1), (2), (3), (4), (5), otrzymuje się przyspieszenie kątowne kołowrotu

$$\varepsilon = \frac{4Pr(R + r_0)^2}{4J_1(R + r_0)^2 + (J_0 + m_0R^2)d^2}.$$

Dla przypadku z uwzględnieniem oporu toczenia rozkład sił przyłożonych do szpuli pokazano na rysunku 3.4.5c, gdzie  $f$  jest ramieniem oporu toczenia. Równanie dynamiczne ruchu szpuli ma postać

$$J_0\varepsilon_0 = Sr_0 - TR_1 - Nf \quad (2')$$

$$m_0a_0 = S + T \quad (3')$$

przy czym  $N = G = mg$ ,  $R_1 = R - \Delta \cong R$  (można przyjąć  $\Delta \cong 0$  ze względu na bardzo małe odkształcenie podłoża w stosunku do wymiarów szpuli).

Równanie dynamiczne ruchu kołowrotu ma identyczną postać jak w poprzednim przypadku (równanie (1)).

Rozwiązując układ (1), (2'), (3') z uwzględnieniem zależności kinematycznych, otrzymuje się

$$\varepsilon = \frac{4PR(R + r_0)^2 - 2m_0gfd(r_0 + R)}{4J_1(R + r_0)^2 + (J_0 + m_0R^2)d^2}.$$

Dla przypadku pominięcia oporu toczenia, tzn. podstawiając  $f = 0$ , otrzymuje się identyczny wzór jak poprzednio. Opór toczenia przedstawić można siłą charakteryzującą go o wartości  $Q = N \frac{f}{R} = G \frac{f}{R} = m_0g \frac{f}{R}$ , przyłożoną do szpuli w punkcie  $O$  ze zwrotem przeciwnym do prędkości  $\bar{v}_0$ . Taki sposób uwzględnienia siły oporu toczenia pokazany będzie w przypadku zastosowania równań Lagrange'a II rodzaju.

**Ad 2)**

Równanie Lagrange'a II rodzaju ma postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

gdzie  $\varphi$  jest współrzędną kątową obrotu bębna kołowrotu.

Energia kinetyczna jest sumą energii w ruchu obrotowym kołowrotu i w ruchu płaskim szpuli

$$E = \frac{1}{2} J_1 \omega^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2,$$

gdzie:

$\omega = \dot{\varphi}$  – wartość prędkości kątowej kołowrotu,

$\omega_0$  – wartość prędkości kątowej szpuli,

$v_0$  – wartość prędkości osi  $O$  szpuli.

Za współrzędną uogólnioną przyjęto współrzędną kątową  $\varphi$ . Ponieważ:

$$\omega_0 = \omega \frac{d}{2(r_0 + R)} = \dot{\varphi} \frac{d}{2(r_0 + R)},$$

$$v_0 = \omega_0 R = \dot{\varphi} \frac{dR}{2(r_0 + R)},$$

więc

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_0 \frac{d^2 R^2}{4(r_0 + R)^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_0 \frac{d^2}{4(r_0 + R)^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2,$$

gdzie

$$J_z = J_1 + \frac{d^2}{4(r_0 + R)^2} (m_0 R^2 + J_0).$$

Odpowiednie pochodne są równe:

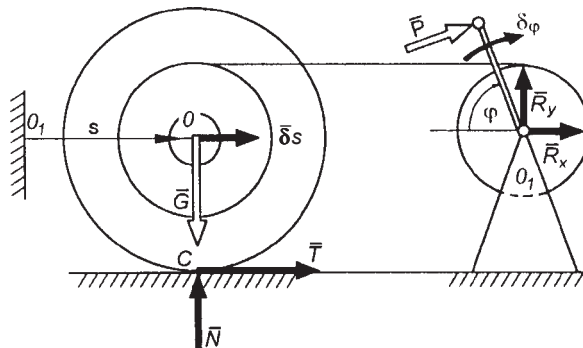
$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = J_z \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_z \ddot{\varphi}.$$

Na rysunku 3.4.5d pokazano siły zewnętrzne układu (bez uwzględnienia oporu toczenia) oraz przesunięcia przygotowane  $\bar{\delta}s$  i  $\delta\varphi$ .

Praca przygotowana jest równa  $\delta L = Pr\delta\varphi$  i siła uogólniona  $Q_{\varphi} = \frac{\delta L}{\delta\varphi} = Pr$  (w tym przypadku siła uogólniona ma wymiar momentu siły). Po podstawieniu obliczonych wielkości do równań Lagrange'a otrzymuje się przyspieszenie kątowe kołowrotu

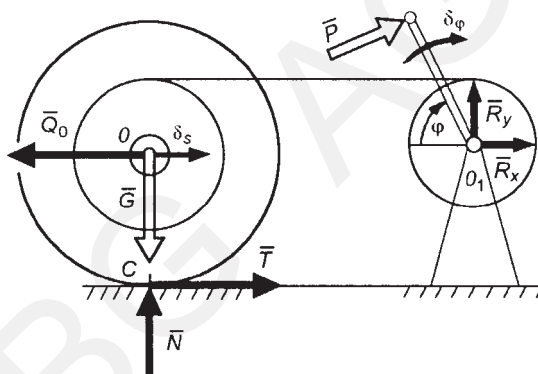
$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{4Pr(R + r_0^2)}{4J_1(R + r_0)^2 + (J_0 + m_0 R^2)d^2}.$$





Rys. 3.4.5d

W przypadku uwzględnienia oporu toczenia siłę oporu toczenia  $Q_0 = N \frac{f}{R} = G \frac{f}{R} = m_0 g \frac{f}{R}$  przyłożono do osi  $O$  szpuli ze zwrotem przeciwnym do zwrotu prędkości osi (rys. 3.4.5e).



Rys. 3.4.5e

Praca przygotowana w takim przypadku wynosi

$$\delta L = Pr\delta\varphi - Q_0\delta s = \left( Pr - Q_0 \frac{Rd}{2(r_0 + R)} \right) \delta\varphi = Q'_\varphi \delta\varphi,$$

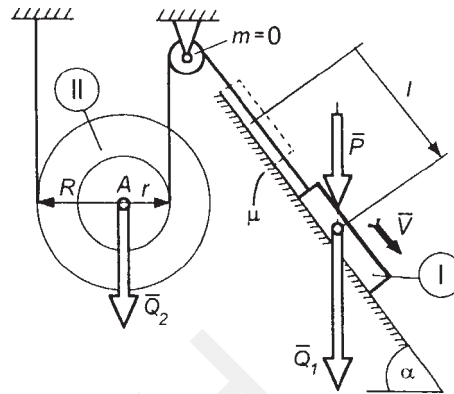
gdzie  $Q_0 = m_0 g \frac{f}{R}$ .

Podstawiając obliczoną siłę uogólnioną  $Q'_\varphi$  do równań Lagrange'a II rodzaju, otrzymuje się przyspieszenie kątowe kołowrotu

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{4Pr(R + r_0)^2 - 2m_0 gfd(r_0 + R)}{4J_1(R + r_0)^2 + (J_0 + m_0 R^2)d^2}.$$

### ZADANIE 3.4.6

Bryła I o ciężarze  $Q_1 = 200$  N, poruszając się wzdłuż równi o kącie  $\alpha = 60^\circ$ , wprawia w ruch bryłę II stanowiącą podwójny bęben o ciężarze  $Q_2 = 300$  N. Na bryłę I działa pionowa siła o wartości  $P = 600$  N (rys. 3.4.6). Obliczyć prędkość  $v_1$  bryły I po przebyciu drogi  $l = 1$  m, mając dane: promień bezwładności bryły II  $\rho = 10$  cm,  $r = 20$  cm,  $R = 30$  cm, współczynnik tarcia ślizgowego po równi  $\mu = 0,1$ . Masę krążka kierującego pominąć, bryły połączone są bezmasowymi i nierozciągliwymi linkami. Przyspieszenie ziemskie  $g \cong 10$  m/s<sup>2</sup>.



Rys. 3.4.6

### Rozwiązanie

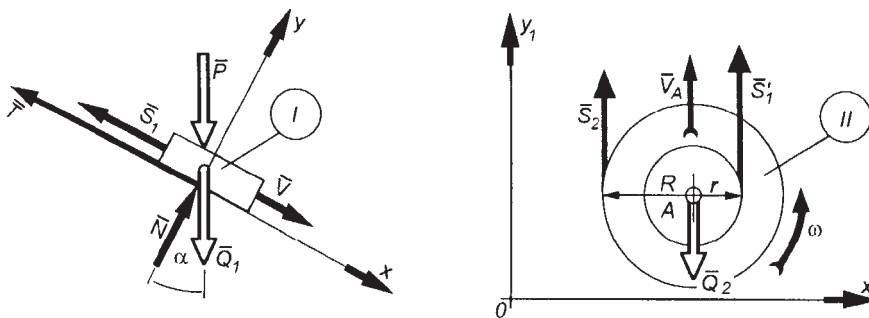
Zadanie rozwiązano czterema metodami, stosując:

- 1) zasadę pędu i zasadę krętu,
- 2) zasadę równowagi energii kinetycznej i pracy,
- 3) równania Lagrange'a II rodzaju,
- 4) dynamiczne równania ruchu postępowego i płaskiego.

#### Ad 1)

Po oswobodzeniu brył od więzów i przyłożeniu sił reakcji otrzymano dwa układy, jak na rysunku 3.4.6a. Pominięto reakcję na krążku, gdyż nie wpływa ona na obliczenia.

Bryła I porusza się ruchem postępowym, bryła II ruchem płaskim. Oznaczając masy brył odpowiednio przez  $m_1$  i  $m_2$  oraz prędkość dowolnego punktu bryły I (ruch postępowy)



Rys. 3.4.6a

przez  $\bar{v}$  i prędkość środka masy bryły II przez  $\bar{v}_A$ , z zasady pędu otrzymuje się, po rzutowaniu na osi przyjętego układu odniesienia dla bryły I, równania:

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_x) = (P + Q) \sin \alpha - S_1 - T,$$

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_y) = N - (P + Q) \cos \alpha,$$

dla bryły II zaś stosując zasadę pędu i zasadę krętu (ruch płaski bryły II jest ruchem złożonym z postępowego ruchu unoszenia i obrotowego ruchu względnego), otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}(m_2 v_A) = S'_1 + S_2 - Q_2, \quad S'_1 = S_1,$$

$$\frac{dK_A}{dt} = S'_1 r - S_2 R.$$

Uwzględniając, że bryła I nie odrywa się od podłoża podczas ruchu, tzn.  $v_y = 0$ ,  $v_x = v$ , oraz że siła tarcia  $T = \mu N$ , po prostych przekształceniach uzyskuje się następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v) &= (P + Q)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - S_1 \\ \frac{d}{dt}(m_2 v_A) &= S_1 - S_2 - Q_2 \\ \frac{dK_A}{dt} &= S_1 r - S_2 R. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Kręt bryły II względem prostej przechodzącej przez środek masy  $A$  wynosi  $K_A = J_A \cdot \omega$ , a moment bezwładności względem tej prostej  $J_A = m_2 \rho^2 = \frac{Q_2}{g} \rho^2$ . Prędkość  $\bar{v}_A$  uzależnić można od prędkości  $\bar{v}_K$ , wykorzystując chwilowy środek obrotu  $E$  (rys. 3.4.6b), tzn.:

$$v_A = \omega R, \quad \omega = \frac{v_K}{R+r} = \frac{v}{R+r}$$

i

$$v_A = v \frac{R}{R+r} \quad (2)$$

Uwzględniając powyższe w równaniach (1), po wyrugowaniu sił  $S_1$  i  $S_2$ , otrzymuje się równanie różniczkowe

$$\left[ m_1 + m_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2} \right] \frac{dv}{dt} = (P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - Q_2 \frac{R}{R+r}.$$

Podstawiając:  $m_1 = \frac{Q_1}{g}$ ,  $m_2 = \frac{Q_2}{g}$ ,

$$\frac{(P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(R + r)^2 - Q_2 R(R + r)}{Q_1(R + r)^2 + Q_2(R + r)} = A = \text{const},$$

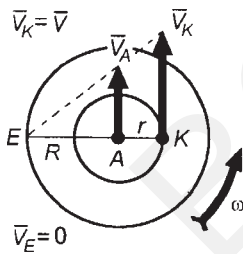
otrzymuje się po scałkowaniu:

$$v = At + C_1,$$

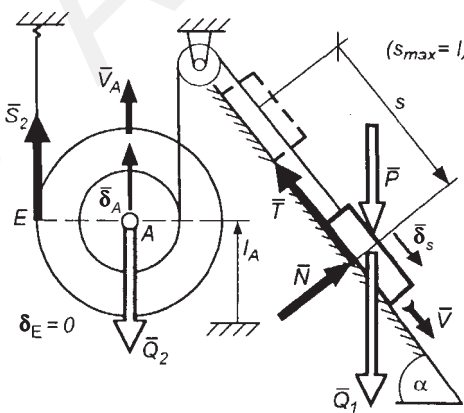
$$x = \frac{1}{2}At^2 + C_1t + C_2.$$

Stałe całkowania obliczono, korzystając z warunków początkowych ruchu, tj.  $t = 0$ ,  $v = 0$ ,  $x = 0$ , a więc  $C_1 = C_2 = 0$ .

Oznaczając przez  $t_1$  czas przebycia drogi  $l$ , otrzymuje się  $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{A}}$  i  $v_1 = v(t_1) = At_1 = \sqrt{2lA}$ , a po podstawieniu danych liczbowych  $v_1 = 6,2$  m/s.



Rys. 3.4.6b



Rys. 3.4.6c

### Ad 2)

Początkowa energia kinetyczna układu  $E_1 = 0$ , energia zaś końcowa (po przebyciu przez bryłę I drogi  $l$ )

$$E_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega^2.$$

Obliczając podobnie jak w przypadku (1)

$$v_A = v_1 \frac{R}{R+r}, \quad \omega = \frac{v_1}{R+r}$$

oraz podstawiając

$$J_A = m_2 \rho^2 = \frac{Q_2}{g} \rho^2, \quad m_1 = \frac{Q}{g}$$

otrzymano

$$E_2 = \frac{1}{2g} \left[ Q_1 + Q_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R-r)^2} \right] v_1^2.$$

Po oswoobodzeniu od więzów i przyłożeniu sił reakcji otrzymano układ jak na rysunku 3.4.6c, gdzie przez  $l_A$  oznaczono przemieszczenie punktu  $A$  odpowiadające przemieszczeniu  $l$  bryły I.

Pracę wykonują tylko siły:  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{T}$  i  $\bar{Q}_2$ . Wynosi ona:

$$L_{1-2} = (P \sin \alpha + Q_1 \sin \alpha - T)l - Q_2 l_A.$$

Związek pomiędzy  $l$  i  $l_A$  uzyskuje się po scałkowaniu spełnionej w każdej chwili czasu zależności (2) (przypadek (1)), otrzymując

$$l_A = \frac{R}{R+r} l.$$

Obliczając  $T = \mu N = \mu(P + Q_1) \cos \alpha$  oraz korzystając z zasady równowartości energii i pracy  $E_2 - E_1 = L_{1-2}$ , otrzymano:

$$v_1 = \sqrt{2lg \frac{(P+Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(R+r)^2 - Q_2 R(R+r)}{Q_1(R+r)^2 + Q_2(R+r)}},$$

a po podstawieniu danych liczbowych  $v_1 = 6,2$  m/s.

### Ad 3)

Układ ma jeden stopień swobody. Obierając współrzędną  $s$  określającą przemieszczenie bryły I (rys. 3.4.6c) jako współrzędną uogólnioną, równanie Lagrange'a II rodzaju można zapisać:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial E}{\partial s} = Q_s.$$

Energia kinetyczna i jej odpowiednie pochodne mają postać:

$$E = \frac{1}{2g} \left[ Q_1 + Q_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2} \dot{s}^2 \right], \quad \dot{s} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{s}} = \frac{1}{g} \left[ Q_1 + Q_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2} \right] \dot{s}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{1}{g} \left[ Q_1 + Q_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2} \right] \ddot{s}$$

$$\frac{\partial E}{\partial s} = 0.$$

Praca przygotowana na odpowiednich przesunięciach przygotowanych (rys. 3.4.6c) wynosi:

$$\delta L = (P \sin \alpha + Q_1 \sin \alpha - T) \delta s - Q_2 \delta_A,$$

gdzie  $T = \mu N = \mu(P + Q_1) \cos \alpha$ .

Ponieważ przesunięcia przygotowane są proporcjonalne do odpowiednich prędkości możliwych, więc  $\delta s = kv$ ,  $\delta_A = kv_A$  i stąd  $\delta_A = \delta s \frac{v_A}{v}$ . Obliczając prędkość  $v_A$  jak w przypadku (1) (zależność (2)), otrzymuje się

$$\delta_A = \delta s \frac{R}{R+r}.$$

Praca przygotowana na przesunięciu przygotowanym  $\delta s$  ma postać

$$L = \left[ (P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - Q_2 \frac{R}{R+r} \right] \delta s = Q_s \delta s,$$

skąd siła uogólniona  $Q_s = (P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - Q_2 \frac{R}{R+r}$ .

Dokonując odpowiednich podstawień do równania Lagrange'a, otrzymuje się

$$\frac{1}{g} \left[ Q_1 + Q_2 \frac{R^2 + \rho^2}{(R+r)^2} \right] \ddot{s} = (P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - Q_2 \frac{R}{R+r},$$

a następnie

$$\ddot{s} = \frac{(P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(R+r)^2 - Q_2 R(R+r)}{Q_1(R+r)^2 + Q_2(R+r)} g = A = \text{const},$$

gdzie  $\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$ .

Otrzymana zależność jest identyczna z zależnością uzyskaną z zasady pędu i zasady krętu i dalsze obliczenia wykonuje się tak samo jak w przypadku 1).

**Ad 4)**

Wprowadzając na rysunku 3.4.6a w miejsce prędkości  $\bar{v}$ ,  $\bar{v}_A$  i  $\omega$  przyspieszenia  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_A$  i  $\bar{\varepsilon}$ , napisać można dynamiczne równania ruchu brył. Dla bryły I dynamiczne równanie ruchu postępowego w przyjętym układzie odniesienia ma postać:

$$\frac{Q_1}{g} a = (P + Q_1) \sin \alpha - S_1 - T,$$

$$0 = N - (P + Q_1) \cos \alpha,$$

gdzie  $T = \mu N = \mu(P + Q_1) \cos \alpha$ .

Równania dynamiczne ruchu płaskiego bryły II mają postać:

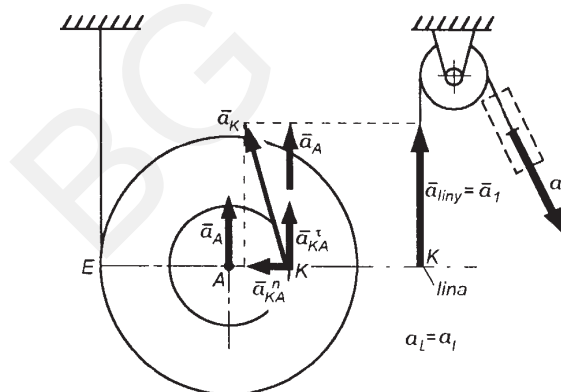
$$\frac{Q_2}{g} a_A = S'_1 + S_2 - Q_2,$$

$$J_A \varepsilon = S'_1 r - S_2 R, \quad J_A = m_2 \rho^2 = \frac{Q_2}{g} \rho^2, \quad S'_1 = S_1.$$

Różniczkując zależność (2) (przypadek (1)), względem czasu, uzyskuje się

$$a_A = a \frac{R}{R+r}, \quad \text{przy czym} \quad \varepsilon = \frac{a_A}{R}.$$

Powyższe związki otrzymać można, korzystając z rozkładu przyspieszeń w punkcie  $K$  w ruchu płaskim bryły II (rys. 3.4.6d). Dla punktów nierozciągliwej liny  $a_l = a_1$ .



Rys. 3.4.6d

W punkcie  $K$  bryły II  $\bar{a}_1$  jest równy

$$a_1 = a_A + a_{KA}^t = \varepsilon R + \varepsilon r = \varepsilon(R+r) = a,$$

skąd  $\varepsilon = \frac{a}{R+r}$  i  $a_A = a \frac{R}{R+r}$ .

Po odpowiednich podstawieniach otrzymuje się układ równań:

$$\frac{Q_1}{g} a = (P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - S_1,$$

$$\frac{Q_2}{g} \frac{R}{R+r} a = S_1 + S_2 - Q_2,$$

$$\frac{Q_2}{g} \frac{\rho^2}{R+r} a = S_1 r - S_2 R.$$

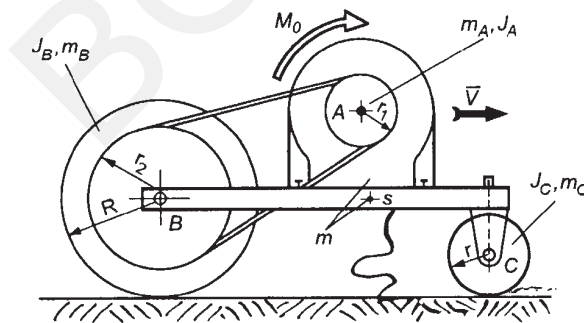
Rozwiązując powyższy układ ze względu na  $a$ , otrzymuje się

$$a = \frac{(P + Q_1)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(R + r)^2 - Q_2 R(R + r)}{Q_1(R + r)^2 + Q_2(R + r)} g,$$

gdzie  $a = \frac{dv}{dt}$ , a więc identyczną zależność jak w przypadku 3) i dalszy tok postępowania jest analogiczny jak w przypadku 3) lub 1).

#### ZADANIE 3.4.7

Lekki walec drogowy napędzany jest silnikiem poprzez przekładnię pasową o promieniach kół  $r_1$  i  $r_2$  (rys. 3.4.7). Masa platformy walca wynosi  $m$ , moment bezwładności wirnika silnika względem osi obrotu wraz z kołem pasowym –  $J_A$ , ich sumaryczna masa –  $m_A$ , moment bezwładności względem osi obrotu dużego walca z kołem pasowym –  $J_B$ , ich sumaryczna masa  $m_B$ , moment bezwładności względem osi obrotu małego walca o promieniu  $r$  i masie  $m_C$  wynosi  $J_C$ . Napędowy moment silnika równy jest  $M_0 = \text{const}$ . Obliczyć przyspieszenie platformy walca drogowego, jeżeli w chwili początkowej był on w spoczynku.



Rys. 3.4.7

#### Rozwiązanie

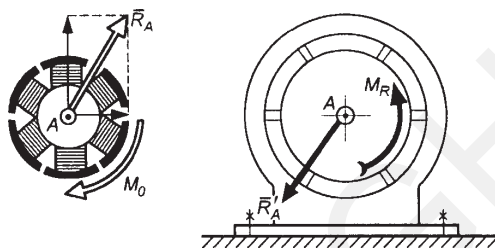
Zadanie rozwiązano dwoma sposobami, wykorzystując:

- 1) dynamiczne równanie ruchu postępowego i płaskiego,
- 2) zasadę równowagi energii kinetycznej i pracy.



**Ad 1)**

Platforma porusza się ruchem postępowym, natomiast pozostałe bryły wchodzące w skład walca drogowego ruchem płaskim. Dynamiczne równania ruchu poszczególnych brył napisać można, oswobodzając poszczególne bryły od więzów i przykładając odpowiednie siły reakcji. Wirnik i stojan silnika oddziałują na siebie poprzez łożyska  $A$  osi wirnika i pole elektromagnetyczne. Pole to, wytwarzane przez stojan, wirując, działa na wirnik parą sił o momencie  $M_0$ . Oznaczając siły oddziaływania łożysk przez  $\bar{R}_A$  (na wirnik) i  $\bar{R}'_A$  (na stojan) oraz odpowiednio momenty pola elektromagnetycznego przez  $\bar{M}_0$  i  $\bar{M}_R$  (rys. 3.4.7a), zgodnie z III prawem Newtona zachodzi:  $\bar{R}_A = -\bar{R}'_A$ ,  $\bar{M}_0 = -\bar{M}_R$ , przy czym  $R_A = R'_A$ ,  $M_0 = M_R$ .



Rys. 3.4.7a

Siły  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}'_A$  rozłożono na składowe w przyjętym układzie odniesienia jak na rysunkach 3.4.7b i 3.4.7c. Siły działające na platformę, wał wirnika silnika, walec duży i na walec mały pokazano odpowiednio na rysunkach 3.4.7b, 3.4.7c, 3.4.7d i 3.4.7e.

Dynamiczne równania ruchu mają postać:

- dla ruchu postępowego platformy:

$$ma = R_{Bx} - R'_{Ax} - R_{Cx},$$

- dla ruchu płaskiego wirnika:

$$m_A a = R_{Ax} - S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \beta,$$

$$J_A \varepsilon_A = M_0 + (S_1 - S_2)r_1,$$

- dla ruchu płaskiego dużego walca:

$$m_B a = S'_2 \cos \beta + S'_1 \cos \alpha - R'_{Bx} + T_1,$$

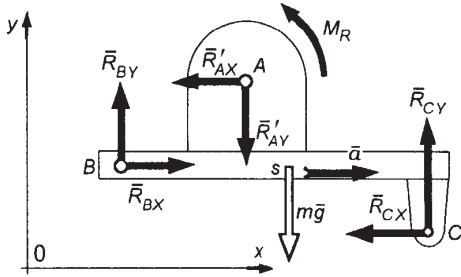
$$J_B \varepsilon_B = S'_2 r_2 - S'_1 r_2 - T_1 R,$$

- dla ruchu płaskiego małego walca:

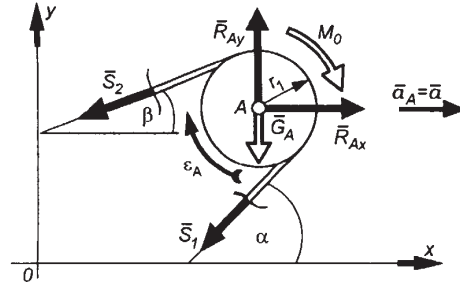
$$m_C a = R'_{Cx} - T_2,$$

$$J_C \varepsilon_C = T_2 r,$$

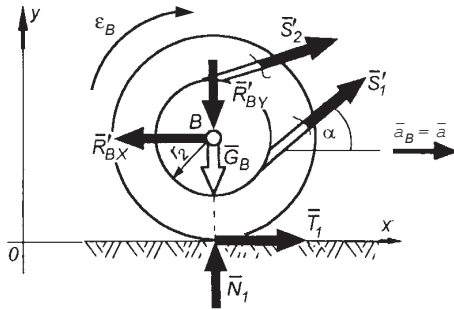
gdzie:  $R_{Ax} = R'_{Ax}$ ,  $R_{Bx} = R'_{Bx}$ ,  $R_{Cx} = R'_{Cx}$ ,  $S_1 = S'_1$ ,  $S_2 = S'_2$ ,  $T_1$  i  $T_2$  są siłami tarcia nierozwiniętego.



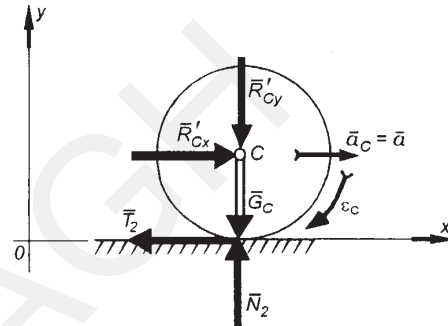
Rys. 3.4.7b



Rys. 3.4.7c



Rys. 3.4.7d



Rys. 3.4.7e

Uwzględniając związki kinematyczne:

$$\varepsilon_A r_1 = \varepsilon_B r_2, \quad \varepsilon_B = \frac{a_B}{R} = \frac{a}{R}, \quad \varepsilon_C = \frac{a_C}{r} = \frac{a}{r},$$

w równaniach dynamicznych oraz rozwiązując otrzymany układ równań, obliczyć można przyspieszenie platformy

$$a = \frac{M_0 \cdot R}{J_A \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_B + J_C \left( \frac{R}{r} \right)^2 + (m_A + m_B + m_C + m) R^2} \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

### Ad 2)

Energia kinetyczna układu w chwili początkowej  $E_1 = 0$ . W chwili  $t$  energia kinetyczna jest równa

$$E_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2.$$

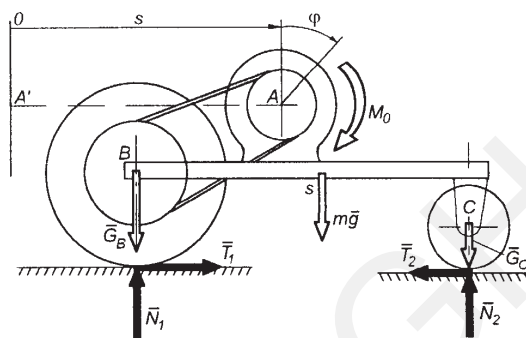
Ponieważ prędkości punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$  są takie same jak prędkości platformy  $\bar{v}$ , więc  $v_A = v_B = v_C = v$ .

Ponadto  $v_B = \omega_B R$ ,  $v_C = \omega_C r$ ,  $\omega_A r_1 = \omega_B r_2$ .

Uwzględniając powyższe zależności, otrzymuje się

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[ m + m_A + m_B + m_C + J_A \frac{r_2^2}{R^2 r_1^2} + J_B \frac{1}{R^2} + J_C \frac{1}{r^2} \right] v^2.$$

W celu obliczenia pracy układ oswoobodzono od więzów i przyłożono siły czynne i siły reakcji zewnętrzne jak na rysunku 3.4.7f. Siły ciężkości jako prostopadłe do odpowiednich przemieszczeń pracy nie wykonują.



Rys. 3.4.7f

Siły tarcia  $\bar{T}_1$  i  $\bar{T}_2$  oraz siły  $\bar{N}_1$  i  $\bar{N}_2$  przyłożone w punktach, które są chwilowymi środkami obrotu, również nie wykonują pracy. Pracę wykonuje jedynie moment  $M_0$  i jest ona równa

$$L_{1-2} = \int_0^\varphi M_0 d\varphi = M_0 \varphi.$$

Uwzględniając zależności  $r_1 \varphi = r_2 \varphi_2$ ,  $s = R \varphi_2$ , z czego wynika, że  $\varphi = \frac{r_2}{r_1 R} s$ , otrzymuje się

$$L_{1-2} = M_0 \frac{r_2}{r_1 R} s.$$

Podstawiając obliczone wielkości  $E_1$ ,  $E_2$  i  $L_{1-2}$  do zasady równowartości energii kinetycznej i pracy  $E_2 - E_1 = L_{1-2}$ , otrzymano

$$\frac{1}{2} \left[ m + m_A + m_B + m_C + J_A \frac{r_2^2}{R^2 r_1^2} + J_B \frac{1}{R^2} + J_C \frac{1}{r^2} \right] v^2 = M_0 \frac{r_2}{r_1 R} s.$$

Różniczkując obustronnie powyższą zależność według czasu, otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \left[ m + m_A + m_B + m_C + J_A \frac{r_2^2}{R^2 r_1^2} + J_B \frac{1}{R^2} + J_C \frac{1}{r^2} \right] 2v \frac{dv}{dt} = M_0 \frac{r_2}{r_1 R} \frac{ds}{dt},$$

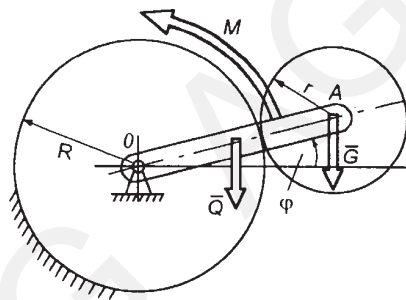
gdzie:  $\frac{dv}{dt} = a$ ,  $\frac{ds}{dt} = v$ ,

i ostatecznie przyspieszenie platformy w postaci

$$a = \frac{M_0 \cdot R}{J_A \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 + J_B + J_C \left( \frac{R}{r} \right)^2 + (m_A + m_B + m_C + m) R^2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

### ZADANIE 3.4.8

W mechanizmie planetarnym jak na rysunku 3.4.8 dane są: promień koła nieruchomego  $R = 0,5$  m, promień koła satelitarne  $r = 0,3$  m, długość ramki  $OA = l = 0,8$  m, ciężar koła satelitarne  $G = 60$  N, ciężar ramki  $Q = 40$  N. Zakładając, że na ramkę działa stały moment, obliczyć jego wartość  $M$ , tak aby ramka  $OA$  po obrocie o kąt  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  rad uzyskała prędkość kątową  $\omega_1 = 1$  s<sup>-1</sup>. Moment bezwładności ramki względem jej osi obrotu przechodzącej przez punkt  $O$  obliczyć ze wzoru  $J_0 = \frac{1}{3}ml^2$  ( $m$  – masa ramki), przyspieszenie ziemskie przyjąć równe  $10$  m/s<sup>2</sup>.



Rys. 3.4.8

### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano trzema sposobami, wykorzystując:

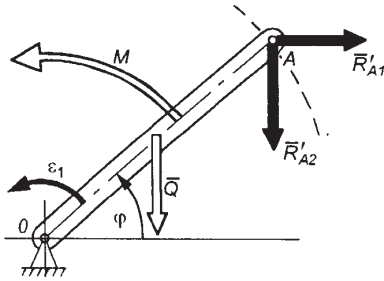
- 1) równania dynamiczne ruchu obrotowego i płaskiego,
- 2) zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy,
- 3) równania Lagrange'a II rodzaju.

#### Ad 1)

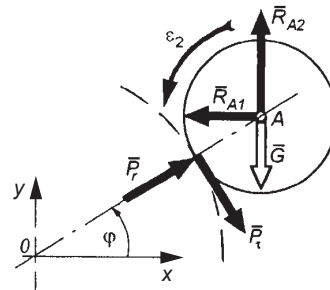
Rozdzielając układ na części i przykładając siły wzajemnego oddziaływania, otrzymano układ jak na rysunkach 3.4.8a i 3.4.8b, przy czym zgodnie z III prawem Newtona  $\bar{R}_{A1} = -\bar{R}'_{A1}$ ,  $\bar{R}_{A2} = -\bar{R}'_{A2}$ , a siły  $\bar{P}_r$  i  $\bar{P}_\tau$  są siłami składowymi reakcji koła nieruchomego;  $\bar{P}_r$  – siła promieniowa,  $\bar{P}_\tau$  – siła styczna (obwodowa).

Równanie dynamiczne ruchu obrotowego ramki ma postać

$$J_0 \varepsilon_1 = -R'_{A2} l \cos \varphi - R'_{A1} l \sin \varphi + M - Q \frac{1}{2} l \cos \varphi \quad (1)$$



Rys. 3.4.8a



Rys. 3.4.8b

Równania dynamiczne ruchu płaskiego koła satelitarnego mają postać

$$\left. \begin{aligned} m_A a_{Ax} &= -R_{A1} + P_r \cos \varphi + P_\tau \sin \varphi \\ m_A a_{Ay} &= R_{A2} + P_r \sin \varphi - P_\tau \cos \varphi - G \\ J_A \varepsilon_2 &= P_\tau r \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdzie  $m_A$  i  $J_A$  – masa i moment bezwładności koła satelitarnego względem osi w jego środku masy  $A$ .

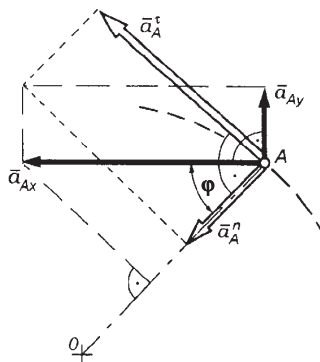
Rozkład przyspieszenia w punkcie  $A$  pokazano na rysunku 3.4.8c. Rugując z układu równań (2) siły  $P_r$  i  $P_\tau$ , otrzymuje się

$$m_A (a_{Ax} \sin \varphi + a_{Ay} \cos \varphi) = R_{A1} \sin \varphi + R_{A2} \cos \varphi - J_A \frac{\varepsilon_2}{r} - G \cos \varphi \quad (3)$$

Wyrażenie w nawiasie jest rzutem przyspieszenia punktu  $A$  na styczną do toru tego punktu i jest przyspieszeniem stycznym punktu  $A$ . Równanie (3) zapisać więc można następująco

$$m_A a_{A\tau} = R_{A1} \sin \varphi + R_{A2} \cos \varphi - J_A \frac{\varepsilon_2}{r} - G \cos \varphi \quad (4)$$

Równanie (4) można było otrzymać wprost, pisząc dynamiczne równania ruchu satelity względem osi stycznej do toru punktu  $A$  i względem osi obrotu w punkcie  $A$ .



Rys. 3.4.8c

Rugując z równań (1) i (4) siły  $R_{A1}$  i  $R_{A2}$  oraz uwzględniając zależności kinematyczne  $\varepsilon_1 l = \varepsilon_2 r = a_{A\tau}$ , otrzymuje się

$$\left[ J_0 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 + \frac{G}{g} l^2 \right] \varepsilon_1 + \left[ \left( G + \frac{1}{2} Q \right) l \cos \varphi \right] = M \quad (5)$$

Podstawiając  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \omega$  do równania (5) oraz rozdzielając zmienne, otrzymuje się równanie

$$\left[ J_0 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 + \frac{G}{g} l^2 \right] \omega d\omega = \left[ M - \left( G + \frac{1}{2} Q \right) l \cos \varphi \right] d\varphi,$$

a następnie, po scałkowaniu w granicach  $[0, \omega_1]$ ,  $[0, \varphi_1]$ , obliczono szukaną wartość momentu

$$M = \frac{1}{\varphi_1} \left[ \frac{l\omega_1^2}{2g} \left( \frac{1}{3} Q + \frac{3}{2} G \right) + \left( G + \frac{1}{2} Q \right) l \sin \varphi_1 \right].$$

Po podstawieniu danych liczbowych  $M = 56,1 \text{ Nm}$ .

#### Ad 2)

Energia kinetyczna układu w położeniu spoczynkowym początkowym, tj. dla  $\varphi = 0$ ,  $E_1 = 0$ . W położeniu odpowiadającym kątowi  $\varphi = \varphi_1$  energia kinetyczna wynosi

$$E_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2.$$

Chwilowy środek obrotu koła satelitarnego leży w punkcie styku obu kół, a zatem

$$v_A = \omega_A r = \omega_1 l$$

i wzór na energię kinetyczną ma postać

$$E_2 = \frac{1}{2} \left[ J_0 + \frac{G}{g} l^2 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{l^2 \omega_1^2}{g} \left( \frac{1}{3} Q + \frac{3}{2} G \right).$$

Pracę sił działających na układ zapisać można następująco:

$$L_{1-2} = \int_0^{\varphi_1} M d\varphi - \int_0^{y_1} Q dy - \int_0^{y_2} G dy,$$

gdzie  $y_1, y_2$  odpowiadają położeniu dla kąta  $\varphi = \varphi_1$  i są współrzędnymi punktów przyłożenia sił ciężkości  $\underline{Q}$  i  $\underline{G}$  (rys. 3.4.8d).

Podstawiając  $y_1 = \frac{1}{2} l \sin \varphi_1, y_2 = l \sin \varphi_1$ , otrzymuje się po scałkowaniu

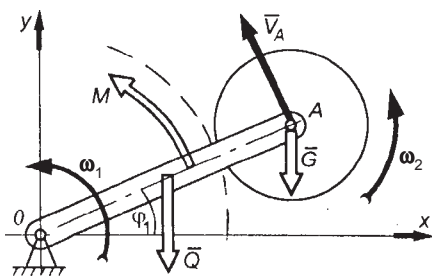
$$L_{1-2} = M\varphi_1 - l \left( G + \frac{1}{2} Q \right) \sin \varphi_1,$$

a następnie, z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy  $E_1 - E_2 = L_{1-2}$ , zależność w postaci

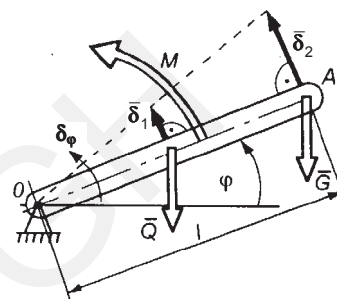
$$\frac{1}{2} \frac{l^2 \omega_1^2}{g} \left( \frac{1}{3} Q + \frac{3}{2} G \right) = M \varphi_1 - l \left( G + \frac{1}{2} Q \right) \sin \varphi_1,$$

oraz identyczną jak w przypadku (1) wartość momentu

$$M = \frac{l}{\varphi_1} \left[ \frac{l \omega_1^2}{2g} \left( \frac{1}{3} Q + \frac{3}{2} G \right) + \left( G + \frac{1}{2} Q \right) \sin \varphi_1 \right].$$



Rys. 3.4.8d



Rys. 3.4.8e

### Ad 3)

Układ ma jeden stopień swobody. Jako współrzędną uogólnioną przyjęto kąt  $\varphi$  obrotu ramki. Równania Lagrange'a II rodzaju mają więc postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Energia kinetyczna obliczona jak w przypadku 1) ma postać

$$E = \frac{1}{2} \left[ J_0 + \frac{G}{g} l^2 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] \dot{\varphi}^2.$$

gdzie  $\dot{\varphi}$  jest prędkością kątową ramki.

Przyjmując przesunięcie przygotowane jak na rysunku 3.4.8e, obliczyć można pracę przygotowaną

$$\delta L = M \delta \varphi - Q \delta_1 \cos \varphi - G \delta_2 \cos \varphi.$$

Przesunięcia przygotowane jako proporcjonalne do prędkości możliwych spełniają zależności:

$$\delta_1 = k v_Q, \quad \delta_2 = k v_A, \quad \delta \varphi = k \dot{\varphi},$$

przy czym

$$v_Q = \frac{1}{2}v_A = \frac{1}{2}l\dot{\varphi}$$

i

$$\delta_1 = \frac{1}{2}l\delta\varphi, \quad \delta_2 = l\delta\varphi.$$

Podstawiając wyznaczone przesunięcia przygotowane, obliczono pracę przygotowaną

$$\delta L = \left[ M - \left( G + \frac{1}{2}Q \right) l \cos \varphi \right] \delta\varphi,$$

a zatem uogólniona siła jest równa

$$Q_\varphi = \frac{\delta L}{\delta\varphi} = M - \left( G + \frac{1}{2}Q \right) l \cos \varphi.$$

Obliczając odpowiednie pochodne:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} = \left[ J_0 + \frac{G}{g}l^2 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left[ J_0 + \frac{G}{g}l^2 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0,$$

i wykorzystując równanie Lagrange'a II rodzaju, otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu

$$\left[ J_0 + \frac{G}{g}l^2 + J_A \left( \frac{l}{r} \right)^2 \right] \ddot{\varphi} + \left[ \left( G + \frac{1}{2}Q \right) l \cos \varphi \right] = M,$$

identyczne jak w przypadku 1) równanie (5). Tok dalszych obliczeń jest więc taki, jak w przypadku 1).

### ZADANIE 3.4.9

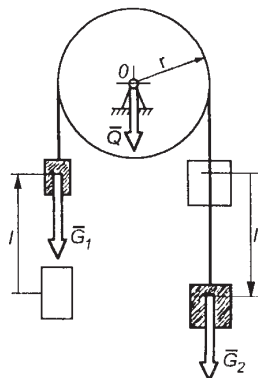
Dany jest układ jak na rysunku 3.4.9. Mając dane  $G_2 = 2G_1$ ,  $Q$ ,  $r$ , wyznaczyć prędkość  $v$  każdego z ciężarów po przebyciu drogi  $l$ . W chwili początkowej prędkości są równe zero. Opory ruchu (tarcie w łożysku i opory ośrodka) pominać.

### Rozwiązanie

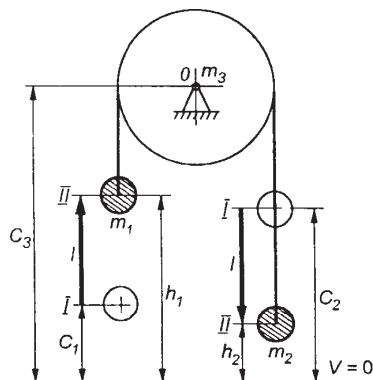
Zadanie rozwiązano dwoma sposobami, wykorzystując:

- 1) zasadę zachowania energii mechanicznej,
- 2) równania Lagrange'a II rodzaju dla pola potencjalnego.





Rys. 3.4.9



Rys. 3.4.9a

Ruch układu zachodzi pod wpływem potencjalnych sił ciężkości, a więc odbywa się w polu potencjalnym. Zasada zachowania energii i równania Lagrange'a II dla pola potencjalnego mają prostszą formę niż zasada równowartości energii kinetycznej i pracy i równania Lagrange'a II rodzaju w ogólnej postaci i dlatego wygodniej jest skorzystać w tym przypadku z tych dwóch metod.

**Ad 1)**

Oznaczając położenie początkowe układu przez I i położenie po przebyciu drogi  $l$  przez II (rys. 3.4.9a), korzystając z zasady zachowania energii mechanicznej  $E + V = \text{const}$  zapiszemy  $E_I + V_I = E_{II} + V_{II}$ , gdzie  $E_I, E_{II}$  jest energią kinetyczną w położeniu początkowym i końcowym,  $V_I, V_{II}$  jest energią potencjalną w tych położeniach. Energia kinetyczna

$$E_I = 0 \text{ zaś } E_{II} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J \omega^2,$$

gdzie:

$m_1, m_2$  – masy ciężarów,

$J = \frac{1}{2} m_3 r^2$  – moment bezwładności koła o masie  $m_3$  względem jego osi obrotu,

$v_1, v_2, \omega$  – odpowiednio wartości prędkości ciężarów i prędkość kątowa koła.

Ponieważ  $v_1 = v_2 = \omega r = v$  i  $m_1 = \frac{G_1}{g}, m_2 = \frac{G_2}{g}, m_3 = \frac{G_3}{g}$ , więc

$$E_{II} = \frac{1}{2g} \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{2} Q \right) v^2.$$

Energia potencjalna względem przyjętego poziomu odniesienia ( $V = 0$ ) wynosi:

$$V_I = m_1 g C_1 + m_2 g C_2 + m_3 g C_3,$$

$$V_{II} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + m_3 g C_3 = m_1 g (C_1 + l) + m_2 g (C_2 - l) + m_3 g C_3.$$

Podstawiając obliczoną energię do zasady zachowania energii, otrzymuje się

$$(m_1 - m_2) g l + \frac{1}{2g} \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{2} Q \right) v^2 = 0.$$

Podstawiając  $m_1 = \frac{G_1}{g}$ ,  $m_2 = \frac{G_2}{g}$ ,  $G_2 = 2G_1$ , obliczyć można szukaną prędkość  $v$

$$v = \sqrt{\frac{4G_1lg}{6G_1 + Q}}.$$

### Ad 2)

Przyjmując współrzędną  $s$  położenia ciężarów określającą dowolne położenie układu jako współrzędną uogólnioną, równanie Lagrange'a II rodzaju w polu potencjalnym zapisać można następująco

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial W}{\partial s} = 0,$$

gdzie potencjał Lagrange'a równy jest  $W = E - V$ . Obliczając energię kinetyczną i potencjalną w dowolnym położeniu układu, podobnie jak w przypadku 1) otrzymuje się

$$W = \frac{1}{2g} \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \dot{s}^2 - (m_1 - m_2)gs.$$

Obliczając pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \dot{s}} &= \frac{1}{g} \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \dot{s}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{s}} \right) &= \frac{1}{g} \left( G_1 + G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \ddot{s} = \frac{1}{2g} (6G_1 + Q) \ddot{s}, \\ \frac{\partial W}{\partial s} &= -(m_1 - m_2)g = G_2 - G_1, \end{aligned}$$

i wstawiając je do równania Lagrange'a, uzyskuje się równanie różniczkowe

$$\ddot{s} = \frac{2G_1g}{6G_1 + Q},$$

z którego po scałkowaniu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{2G_1g}{6G_1 + Q} t + c, \\ s &= \frac{G_1g}{6G_1 + Q} t^2 + ct + d. \end{aligned}$$

Z warunków początkowych  $t = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\dot{s} = 0$  wyznaczyć można stałe całkowania  $c = d = 0$ .

Rugując z dwóch ostatnich równań czas  $t$ , otrzymuje się zależność pomiędzy prędkością ciężarów i ich przemieszczeniem

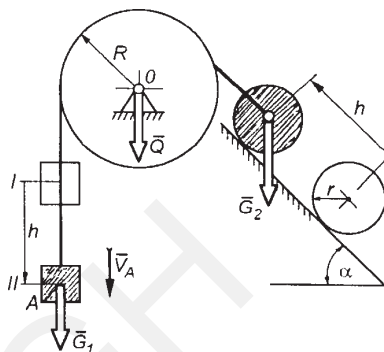
$$\dot{s} = \sqrt{\frac{4G_1g}{6G_1 + Q}} s.$$

Po przebyciu drogi  $l$ , tzn. dla  $s = l$ , otrzymuje się wynik identyczny jak w przypadku 1)

$$\dot{s}(s=l) = v = \sqrt{\frac{4G_1gl}{6G_1 + Q}}$$

### ZADANIE 3.4.10

Układ materialny (rys. 3.4.10) porusza się pod wpływem oddziaływania sił ciężkości. W chwili początkowej układ był nieruchomy. Po pewnym czasie ciężar  $A$  przemieścił się, osiągając prędkość  $\bar{v}_A$ . Mając dane  $G_1, G_2, Q, R, r, \alpha$ , wyznaczyć drogę  $h$  ciężaru  $A$  odpowiadającą prędkości  $\bar{v}_A$ . Walec  $C$  toczy się po równi bez poślizgu.



Rys. 3.4.10

#### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano dwiema metodami, wykorzystując:

- 1) zasadę zachowania energii mechanicznej,
- 2) równania Lagrange'a II rodzaju dla pola potencjalnego.

W tym przypadku można zastosować obie metody, pomimo że w układzie występuje siła tarcia pomiędzy równią a kołem. Toczenie koła zachodzi bez poślizgu, siła tarcia jest siłą tarcia nierozwiniętego, nie wykonuje ona pracy, a więc nie występuje rozproszenie energii.

#### Ad 1)

Z zasady zachowania energii otrzymuje się

$$E_I + V_I = E_{II} + V_{II},$$

gdzie przez I oznaczono położenie początkowe w spoczynku, a przez II położenie po przebyciu drogi  $h$  (rys. 3.4.10).

Przyjmując poziomy zerowy energii potencjalnej każdej masy w jej położeniu początkowym, otrzymano:

$$V_I = 0, \quad V_{II} = m_2gh \sin \alpha - m_1gh = (G_2 \sin \alpha - G_1)h.$$

Energję kinetyczną układu napisano w postaci:

$$E_I = 0, \\ E_{II} = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2,$$

$$\text{gdzie: } m_1 = \frac{G_1}{g}, \quad m_2 = \frac{G_2}{g}, \quad J_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} R^2, \quad J_2 = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2, \quad \omega_1 = \frac{v_A}{R}, \quad \omega_2 = \frac{v_A}{r}.$$

Po podstawieniu powyższych zależności otrzymuje się

$$E_{II} = \frac{1}{2g} \left( G_1 + \frac{3}{2}G_2 + \frac{1}{2}Q \right) v_A^2,$$

zatem

$$\frac{1}{2g} \left( G_1 + \frac{3}{2}G_2 + \frac{1}{2}Q \right) v_A^2 = (G_2 \sin \alpha - G_1)h = 0$$

i szukana droga  $h$  jest równa

$$h = \frac{2G_1 + 3G_2 + Q}{4g(G_1 - G_2 \sin \alpha)} v_A^2.$$

### Ad 2)

Określając położenie układu w dowolnej chwili czasu przez współrzędną  $s$  odpowiadającą dowolnemu położeniu ciała  $A$  i obliczając podobnie jak w poprzednim przypadku energię kinetyczną i potencjalną układu, otrzymuje się wyrażenie na potencjał kinetyczny Lagrange'a w postaci

$$W = E - V = \frac{1}{2g} \left( G_1 + \frac{3}{2}G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \dot{s}^2 - (G_2 \sin \alpha - G_1)s,$$

gdzie  $\dot{s}$  jest prędkością odpowiadającą położeniu określone przez współrzędną  $s$ ,

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}.$$

Obliczając pochodne:

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{s}} = \frac{1}{g} \left( G_1 + \frac{3}{2}G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \dot{s},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{1}{g} \left( G_1 + \frac{3}{2}G_2 + \frac{1}{2}Q \right) \ddot{s},$$

$$\frac{\partial W}{\partial s} = (G_2 \sin \alpha - G_1),$$

z równań Lagrange'a  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial W}{\partial s} = 0$  otrzymuje się

$$\ddot{s} = \frac{2(G_1 - G_2 \sin \alpha)}{2G_1 + 3G_2 + Q} g \tag{1}$$

i po scałkowaniu:

$$\dot{s} = \frac{2(G_1 - G_2 \sin \alpha)}{2G_1 + 3G_2 + Q} gt + c,$$

$$s = \frac{G_1 - G_2 \sin \alpha}{2G_1 + 3G_2 + Q} gt^2 + ct + d.$$

Z warunków początkowych ruchu  $t = 0$ ,  $s = 0$ ,  $\dot{s} = 0$  wynika, że  $c = d = 0$ ; rugując z powyższych równań parametr  $t$ , otrzymuje się

$$s = \frac{2G_1 + 3G_2 + Q}{4(G_1 - G_2 \sin \alpha)} \dot{s}^2.$$

Dla  $\dot{s} = v_A$  droga przebyta przez ciężar  $A$  wynosi

$$h = \frac{2G_1 + 3G_2 + Q}{4(G_1 - G_2 \sin \alpha)} v_A^2.$$

Wynik ten otrzymać można również, dokonując w równaniu (1) podstawienia

$$\ddot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{ds} \dot{s}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymuje się równanie

$$s d\dot{s} = \frac{2(G_1 - G_2 \sin \alpha)}{2G_1 + 3G_2 + Q} g ds.$$

Całkując powyższe równanie w granicach  $[0, v_0]$ ,  $[0, h]$ , otrzymuje się

$$h = \frac{2G_1 + 3G_2 + Q}{4(G_1 - G_2 \sin \alpha)} v_A^2.$$

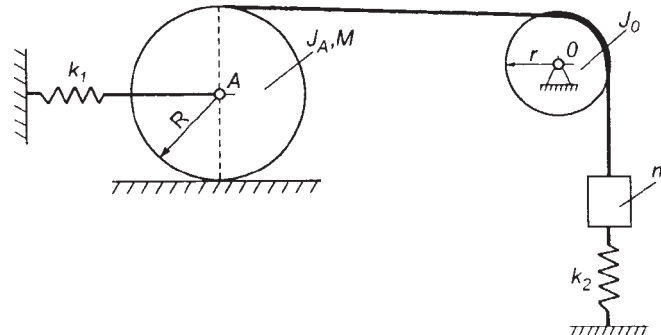
Można również zauważyć, że równanie (1) przedstawia przyspieszenie ciężarów, a ponieważ jest, jak z tego równania widać, stałe, więc ruch jest jednostajnie przyspieszony. Mając wyznaczone przyspieszenie na podstawie zasad dynamiki, korzystając można ze wzorów na prędkość i przemieszczenie w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości i drogi początkowej:

$$v = at, \quad s = \frac{1}{2} at^2, \quad a = \ddot{s}.$$

Rugując czas  $t$ , z tych równań obliczyć można szukaną drogę  $h$  po osiągnięciu prędkości  $v_A$ , podstawiając  $s = h$ ,  $v = v_A$ .

### ZADANIE 3.4.11

Układ materialny (rys. 3.4.11) składa się z walca o masie  $M$ , momencie bezwładności  $J_A$  i promieniu  $R$ , koła o momencie bezwładności  $J_0$  i promieniu  $r$  oraz ciężaru o masie  $m$ . Walec o masie  $M$  może toczyć się bez poślizgu po poziomej powierzchni, a ruch układu ograniczają dwie sprężyny liniowe o współczynnikach sprężystości  $k_1$  i  $k_2$ .



Rys. 3.4.11

Wyznaczyć amplitudę prędkości ciężaru o masie  $m$ , jeżeli w chwili początkowej ciężar ten został wychylony na odległość  $x_0$  względem położenia równowagi i puszczony bez prędkości początkowej. Opory ruchu ośrodka i tarcie w łożyskach pominać.

### Rozwiązanie

Zadanie rozwiązano dwoma sposobami, wykorzystując:

- 1) równania Lagrange'a II rodzaju dla pola potencjalnego,
- 2) zasadę zachowania energii mechanicznej.

#### Ad 1)

Siła oddziaływania podłoża na walec, ze względu na toczenie walca bez poślizgu, nie wykonuje pracy i w związku z tym nie powoduje rozproszenia energii. Poza tą siłą na układ działają siły ciężkości i siły sprężystości oraz zależna od nich siła reakcji łożyska koła o masie  $m_0$ , czyli siły potencjalne. Ruch układu odbywa się więc w polu sił potencjalnych i do rozwiązania zadania zastosowano równania Lagrange'a II rodzaju dla pola potencjalnego. Za współrzędną uogólnioną przyjęto współrzędną  $x$  ciężaru o masie  $m$  oraz oznaczenia jak na rysunku 3.4.11a

Energia kinetyczna układu równa jest

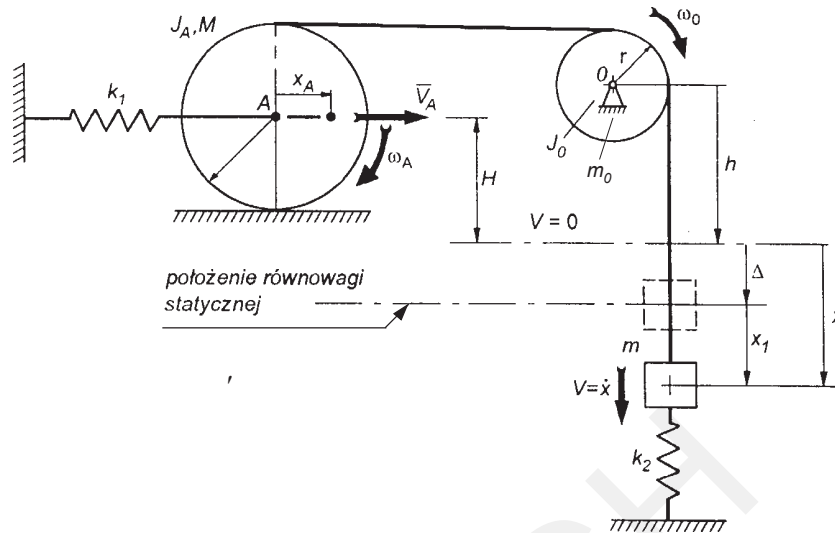
$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_A^2.$$

Uwzględniając zależności kinematyczne:

$$\omega_0 = \frac{\dot{x}}{r}, \quad v_A = \frac{1}{2} \dot{x}, \quad \omega_A = \frac{\dot{x}}{2R},$$

otrzymuje się

$$E = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4} M + \frac{J_A}{4R^2} \right) \dot{x}^2.$$



Rys. 3.4.11a

Energia potencjalna równa jest sumie energii potencjalnej sił ciężkości i sił sprężystości

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_A^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 - mgx + MgH + m_0 gh,$$

gdzie:  $x_A = \frac{1}{2} x$ ,  $H$  i  $h$  – stałe odległości od przyjętego poziomu  $V = 0$  koła o masie  $M$  i koła o masie  $m_0$  (poziom  $V = 0$  dla sprężyn nieobciążonych).

Potencjał kinetyczny Lagrange'a ma więc postać

$$W = E - V = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4} M + \frac{J_A}{4R^2} \right) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} k_1 + k_2 \right) x^2 + mgx - MgH - m_0 gh,$$

a odpowiednie pochodne wynoszą:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right) = \left( m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4} M + \frac{J_A}{4R^2} \right) \ddot{x},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \left( \frac{1}{4} k_1 + k_2 \right) x + mg.$$

Z równania Lagrange'a  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W}{\partial x} = 0$  otrzymuje się

$$\ddot{x} + \frac{\frac{1}{4} k_1 + k_2}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4} M + \frac{J_A}{4R^2}} x - \frac{mg}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4} M + \frac{J_A}{4R^2}} = 0.$$

Podstawiając:

$$\omega_0^2 = \frac{\frac{1}{4}k_1 + k_2}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4}M + \frac{J_A}{4R^2}}, \quad a = \frac{mg}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4}M + \frac{J_A}{4R^2}}$$

oraz  $x = x_1 + \frac{a}{\omega_0^2}$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_1$ ,  $\ddot{x} = \ddot{x}_1$ , gdzie współrzędna  $x_1$  opisuje ruch względem statycznego położenia równowagi (statyczne położenie równowagi oznacza spoczynek układu z uwzględnieniem napięcia statycznego sprężyn na skutek działania siły ciężkości ciężaru o masie  $m$ ), otrzymuje się jednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$x_1 = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t \quad (1)$$

Stałe  $A_1$  i  $A_2$  wyznaczyć można z warunków początkowych, równania (1) oraz obliczając prędkość

$$\dot{x}_1 = A_1 \omega_0 \cos \omega_0 t - A_2 \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (2)$$

Podstawiając do równań (1) i (2) warunki początkowe:

$$t = 0, \quad x_1 = x_0, \quad \dot{x}_1 = 0,$$

obliczono stałe  $A_1$  i  $A_2$ ;  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = x_0$ .

Uwzględniając obliczone stałe, otrzymuje się równanie ruchu

$$x_1 = x_0 \cos \omega_0 t \quad (3)$$

oraz równanie prędkości

$$\dot{x}_1 = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (4)$$

Z równania (4) obliczyć można amplitudę prędkości równą

$$v_0 = |-x_0 \omega_0| = \left| -x_0 \sqrt{\frac{\frac{1}{4}k_1 + k_2}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{1}{4}M + \frac{J_A}{4R^2}}} \right|.$$



**Ad 2)**

Zasada zachowania energii ma postać  $E + V = \text{const}$ . Energię potencjalną  $V$  układu zapisano tak, aby uwzględniała wstępne ugięcie statyczne sprężyn ( $\Delta_1$  i  $\Delta$ ) pochodzące od działania siły ciężkości  $G = mg$  (rys. 3.4.11b). Siła ta wywołuje siły w sprężynach:  $F_1 = k_1\Delta_1$  i  $F_2 = k_2\Delta$ , a układ przyjmuje położenie równowagi statycznej.

Z równań równowagi sił:

$$\sum_{i=1}^3 P_i = S - G + F_2 = 0,$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{i(D)} = F_1 \cdot R - S'' \cdot 2R = 0, \quad S'' = S' = S,$$

oraz zależności  $\Delta = 2\Delta_1$  (uzyskanej z analizy kinematycznej układu) otrzymano:

$$\Delta = \frac{mg}{\frac{1}{4}k_1 + k_2}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{2} \frac{mg}{\frac{1}{4}k_1 + k_2}.$$

Energia potencjalna układu po przemieszczeniu o  $x_1$  masy  $m$  (mierzonym od położenia równowagi statycznej (rys. 3.4.11a) wynosi

$$V = \frac{1}{2}k_1 \left( \Delta_1 + \frac{1}{2}x_1 \right)^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta + x_1)^2 - mgx_1 + MgH + m_0gh.$$

Energia kinetyczna analogicznie jak w przypadku 1) ma postać

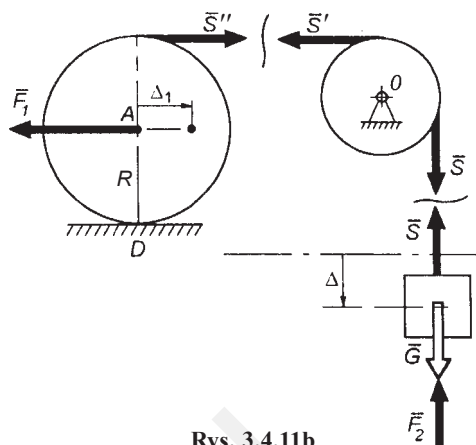
$$E = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2 \left( m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{J_A}{4R^2} \frac{M}{4} \right).$$

Ze względu na to, że  $E + V = C$ ,  $C$  – stała, po zróżniczkowaniu po czasie  $t$  otrzymano

$$\frac{d(E+V)}{dt} = \dot{x}_1 \cdot \ddot{x}_1 \left[ m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{J_A}{4R^2} \frac{M}{4} \right] + \frac{1}{2}k_1 \left( \Delta_1 + \frac{1}{2}x_1 \right) \dot{x}_1 + k_2(\Delta + x_1)\dot{x}_1 - mg\dot{x}_1 = 0.$$

Po podzieleniu przez  $\dot{x}_1$  i odpowiednim zgrupowaniu wyrażenia równanie powyższe ma postać

$$\ddot{x}_1 \left[ m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{J_A}{4R^2} \frac{M}{4} \right] + \left( \frac{1}{2}k_1\Delta_1 + k_2\Delta - mg \right) + \left( \frac{1}{4}k_1 + k_2 \right) x_1 = 0.$$



Rys. 3.4.11b

Drugi składnik tego równania wynosi zero po wstawieniu wcześniej obliczonych  $\Delta_1$  oraz  $\Delta$  i wobec tego po przekształceniach uzyskano

$$\ddot{x}_1 + \frac{\frac{1}{4}k_1 + k_2}{m + \frac{J_0}{r^2} + \frac{J_A}{4R^2} + \frac{M}{4}} x_1 = 0.$$

Jest to równanie identyczne jak to, które otrzymano w przypadku 1), i dalszy tok obliczeń odbywa się zgodnie z tym przypadkiem.

### 3.4.2. Reakcje dynamiczne w ruchu obrotowym

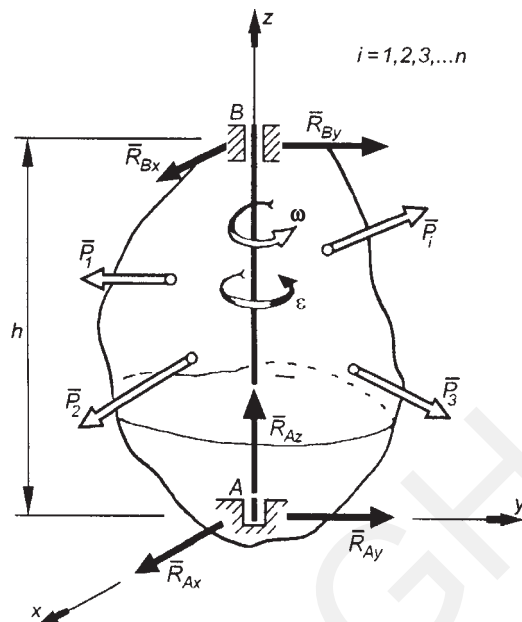
Analizując na przykład metodą kinetostatyki niejednostajny ruch obrotowy bryły (rys. 3.4.12), otrzymuje się, przy pominięciu oporów ośrodka i oporów w łożyskach, następujący układ równań

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} + R_{Ax} + R_{Bx} + \varepsilon M y_s + \omega^2 M x_s &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} + R_{Ay} + R_{By} - \varepsilon M x_s + \omega^2 M y_s &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iz} + R_{Az} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{ix}(\bar{P}_i) - R_{By} h + \varepsilon D_{xz} - \omega^2 D_{yz} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iy}(\bar{P}_i) + R_{Bx} h + \varepsilon D_{yz} + \omega^2 D_{xz} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{iz}(\bar{P}_i) - J_z \varepsilon &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

gdzie:

- $M$  – masa bryły,
- $J_z$  – masowy moment bezwładności bryły względem osi  $z$  (osi obrotu),
- $x_s, y_s$  – współrzędne środka masy bryły,
- $\omega, \varepsilon$  – prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe względem osi obrotu,
- $D_{xz}, D_{yz}$  – odpowiednie momenty dewiacji.

Reakcje obliczone z powyższego układu równań równe są reakcjom statycznym wyznaczonym w położeniu równowagi bryły jedynie dla  $x_s = y_s = 0$  i  $D_{xz} = D_{yz} = 0$ , tzn. w przypadku, gdy oś obrotu jest główną centralną osią bezwładności. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to całkowite reakcje różnią się od reakcji statycznych na skutek wystąpienia składowych dynamicznych i są sumą reakcji statycznych i dynamicznych ( $\bar{R}_A = \bar{R}_{Ast} + \bar{R}_{Ad}$ ,  $\bar{R}_B = \bar{R}_{Bst} + \bar{R}_{Bd}$ ).



Rys. 3.4.12

Reakcje dynamiczne (składowe dynamiczne reakcji całkowitych) wyznaczyć można z układu równań

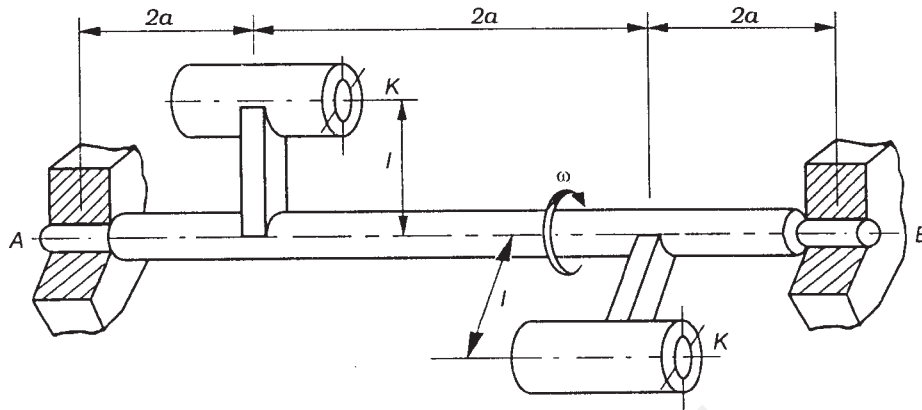
$$\left. \begin{aligned} R_{Axd} + R_{Bxd} + \epsilon M y_s + \omega^2 M x_s &= 0 \\ R_{Ayd} + R_{Byd} - \epsilon M x_s + \omega^2 M y_s &= 0 \\ -R_{Byd} h + \epsilon D_{xz} - \omega^2 D_{yz} &= 0 \\ R_{Bxd} h + \epsilon D_{yz} + \omega^2 D_{xz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

### ZADANIE 3.4.12

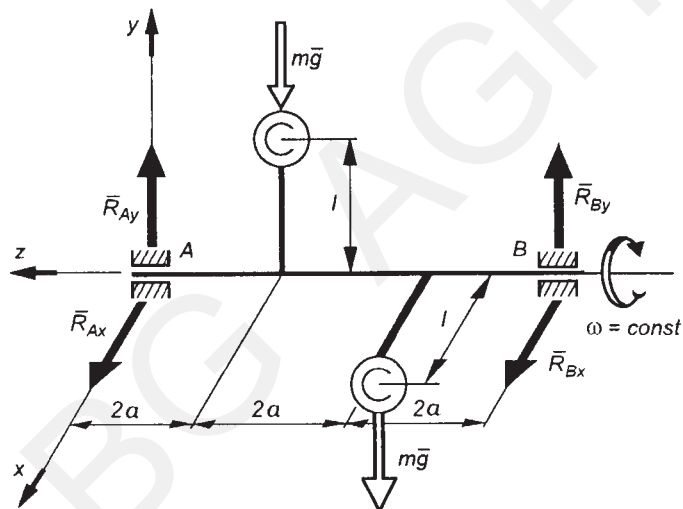
Obliczyć reakcje dynamiczne łożysk \$A\$ i \$B\$ wału pokazanego na rysunku 3.4.12a. Masę elementów o długościach \$l\$ i \$2a\$ pominąć, tuleje \$K\$ o jednakowych masach \$m\$ traktować jak punkty materialne. Wał obraca się ze stałą prędkością kątową \$\omega\$.

### Rozwiązanie

Na rysunku 3.4.12b przedstawiono model obliczeniowy wału z przyłożonymi siłami czynnymi i reakcjami całkowitymi podópór \$A\$ i \$B\$.



Rys. 3.4.12a



Rys. 3.4.12b

Ze względu na to, że poszukuje się w tym przypadku jedynie reakcji dynamicznych, a nie całkowitych, wykorzystuje się równania (2) – str. 275, w których nie występują siły statyczne, tzn. siły ciężkości i składowe statyczne reakcji całkowitych. Nie występują ponadto człony zawierające przyspieszenie kątowe  $\epsilon$ , ponieważ prędkość kątowa  $\omega$  jest stała. Otrzymuje się:

$$R_{Axd} + R_{Bxd} + \omega^2 Mx_s = 0,$$

$$R_{Ayd} + R_{Byd} + \omega^2 My_s = 0,$$

$$R_{Byd} 6a - \omega^2 D_{yz} = 0,$$

$$-R_{Bxd} 6a + \omega^2 D_{xz} = 0.$$

Obliczając z odpowiednich wzorów współrzędne środka masy:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \cdot x_i}{M} = \frac{m \cdot l}{2m} = \frac{1}{2}l, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \cdot y_i}{M} = \frac{m \cdot l}{2m} = \frac{1}{2}l, \quad M = 2m,$$

oraz momenty dewiacji:

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^2 m_i y_i z_i = m \cdot l \cdot (-2a) + m \cdot 0 \cdot (-4a) = -2mla,$$

$$D_{xz} = \sum_{i=1}^2 m_i x_i z_i = m \cdot 0 \cdot (-2a) + m \cdot l \cdot (-4a) = -4mla,$$

otrzymano współrzędne reakcji dynamicznych:

$$R_{Axd} = -\frac{1}{2}m\omega^2 l, \quad R_{Ayd} = -\frac{2}{3}m\omega^2 l, \quad R_{Bxd} = -\frac{2}{3}m\omega^2 l, \quad R_{Byd} = -\frac{1}{3}m\omega^2 l.$$

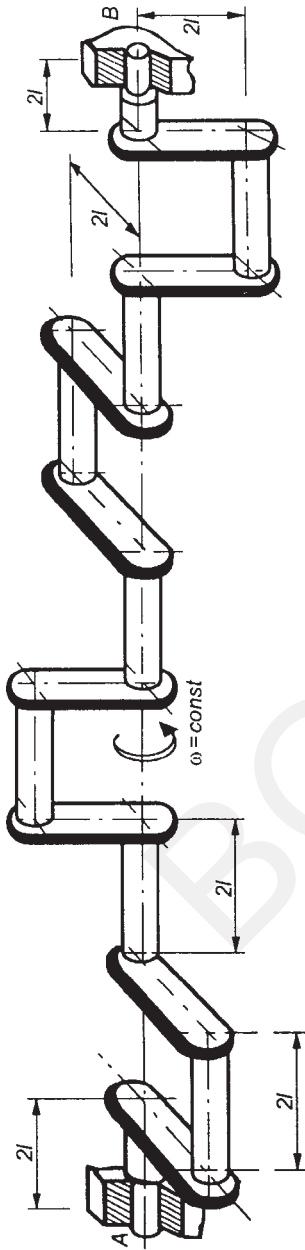
Całkowite reakcje dynamiczne wynoszą:

$$R_{Ad} = \sqrt{R_{Axd}^2 + R_{Ayd}^2} = \frac{1}{3}m\omega^2 l\sqrt{5}, \quad R_{Bd} = \sqrt{R_{Bxd}^2 + R_{Byd}^2} = \frac{1}{3}m\omega^2 l\sqrt{5}.$$

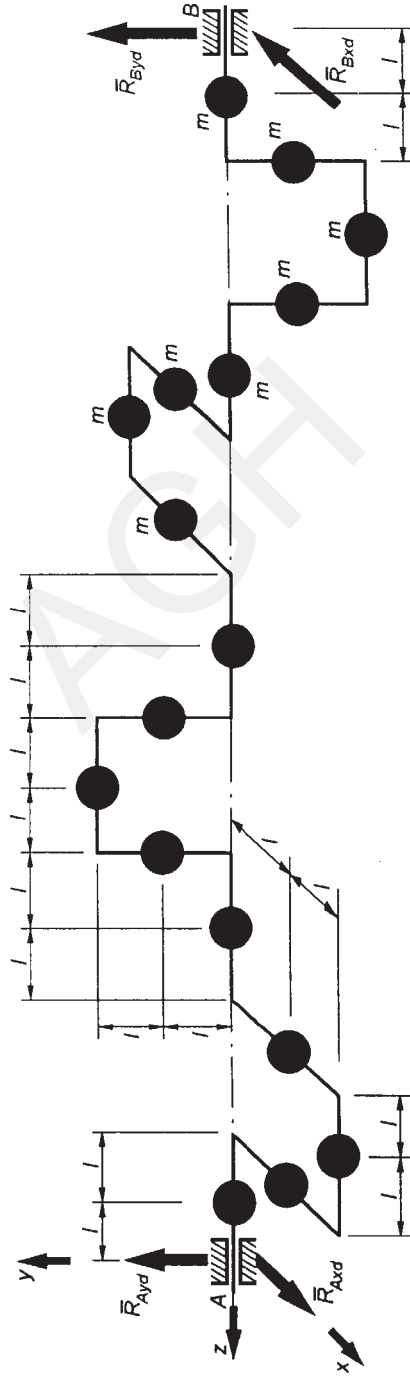
Znaki „-” współrzędnych reakcji świadczą o tym, że w rzeczywistości zwroty tych sił są przeciwne do przyjętych na rysunku.

### ZADANIE 3.4.13

Obliczyć reakcje dynamiczne łożysk  $A$  i  $B$  wału obracającego się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  (rys. 3.4.13). Poszczególne odcinki wału o długości  $2l$  mają masy równe  $m$ . Dla obliczeń przyjąć, że masy odcinków wału skupione są w środkach ciężkości tych odcinków.



Rys. 3.4.13



Rys. 3.4.13a

**Rozwiązanie**

Dla obliczeń przyjęto uproszczony schemat wału jak na rysunku 3.4.13a. Reakcje dynamiczne obliczono w układzie odniesienia przyjętym tak, że oś  $z$  pokrywa się z osią obrotu wału. Z równań (2) – str. 275 – otrzymuje się:

$$R_{Axd} - R_{Bxd} + \varepsilon M y_s + \omega^2 M x_s = 0,$$

$$R_{Ayd} - R_{Byd} - \varepsilon M x_s + \omega^2 M y_s = 0,$$

$$R_{Byd} \cdot 18l + \varepsilon D_{xz} - \omega^2 D_{yz}^2 = 0,$$

$$R_{Bxd} \cdot 18l + \varepsilon D_{yz} + \omega^2 D_{xz} = 0,$$

przy czym  $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$  i  $M = \sum_{i=1}^{17} m_i = 17m$ .

Współrzędne środka ciężkości wynoszą:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{17} m_i x_i}{M} = \frac{2m \cdot l + m \cdot 2l + 2m(-l) + m(-2l)}{M} = 0,$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^{17} m_i y_i}{M} = \frac{2m \cdot l + m \cdot (2l) + 2m(-l) + m(-2l)}{M} = 0.$$

Momenty dewiacji wynoszą:

$$D_{xz} = \sum_{i=1}^{17} m_i x_i z_i = ml(-2l) + m2l(-3l) + ml(-4l) + m(-l)(-10l) + \\ + m(-2l)(-11l) + (-l)(-12l) = 32 ml^2,$$

$$D_{yz} = \sum_{i=1}^{17} m_i y_i z_i = ml(-6l) + m2l(-7l) + ml(-8l) + m(-l)(-14l) + \\ + m(-2l)(-15l) + (-l)(-16l) = 32 ml^2.$$

Po podstawieniu obliczonych współrzędnych środka masy i momentów dewiacji otrzymano:

$$R_{Axd} - R_{Bxd} = 0,$$

$$\begin{aligned} R_{Ayd} + R_{Byd} &= 0, \\ R_{Byd} \cdot 18l - \omega^2(32ml^2) &= 0, \\ R_{Bxd} \cdot 18l + \omega^2(32ml^2) &= 0, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} R_{Byd} &= -R_{Ayd} = \frac{16}{9}ml\omega^2, \\ R_{Bxd} &= -R_{Axd} = -\frac{16}{9}ml\omega^2, \\ \text{i } R_{Ad} &= R_{Bd} = \frac{16}{9}\sqrt{2}ml\omega^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że spełnienie warunku  $x_s = 0, y_s = 0$  nie powoduje zerowania się reakcji dynamicznych, ponieważ momenty dewiacji  $D_{xz}$  i  $D_{yz}$  nie są równe zero. W tym przypadku wał jest wyważony jedynie statycznie. Pełne wyważenie wału, a więc również dynamiczne, tak aby  $R_{Ad} = R_{Bd} = 0$ , może być zrealizowane przy zachowaniu osi obrotu  $AB$  przez dołączenie do wału dodatkowych mas w taki sposób, aby  $x_s = y_s = 0$  i  $D_{xz} = D_{yz} = 0$ .

#### ZADANIE 3.4.14

Obliczyć całkowite reakcje łożysk  $A$  i  $B$ , jeżeli bryła w kształcie trójkąta równoramiennego obraca się dookoła osi  $AB$  ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Masa bryły równa się  $m$ . Opory tarcia w łożyskach pominać.

#### Rozwiązanie

Reakcje całkowite obliczono z równań (1) – str. 274, w których w  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}, R_{Bx}, R_{By}$  uwzględniono zarówno składowe statyczne jak i dynamiczne. Do bryły przyłożono wszystkie siły czynne i reakcje w układzie przyjętym jak na rysunku 3.4.14.

Ze względu na to, że  $\omega = \text{const}$ , przyspieszenie kątowe  $\varepsilon = 0$ , a ponadto w przyjętym układzie odniesienia  $x_s = 0$  i  $y_s = \frac{1}{3}l$ .

Obliczając:  $D_{xz} = 0$  (oś  $x$  jest prostopadła do płaszczyzny symetrii bryły),

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_m yz dm = \iint_A yz \rho dz dy = \rho \int_0^l y dy \int_0^{l-y} z dz = \rho \int_0^l y \frac{(l-y)^2}{2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l (l^2 y - 2ly^2 + y^3) dy = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{2} \rho l^2 \right) l^2 = \frac{ml^2}{12}, \end{aligned}$$

z układu równań (1) – str. 274 – otrzymuje się następujące równanie:

$$\begin{aligned} R_{Ax} + R_{Bx} &= 0, \\ R_{Ay} + R_{By} + \frac{1}{3}ml\omega^2 &= 0, \end{aligned}$$



$$-G + R_{Az} = 0,$$

$$-R_{By} \cdot l - G \cdot \frac{1}{3}l - \frac{1}{12}ml^2\omega^2 = 0$$

$$R_{Bx} \cdot l = 0.$$

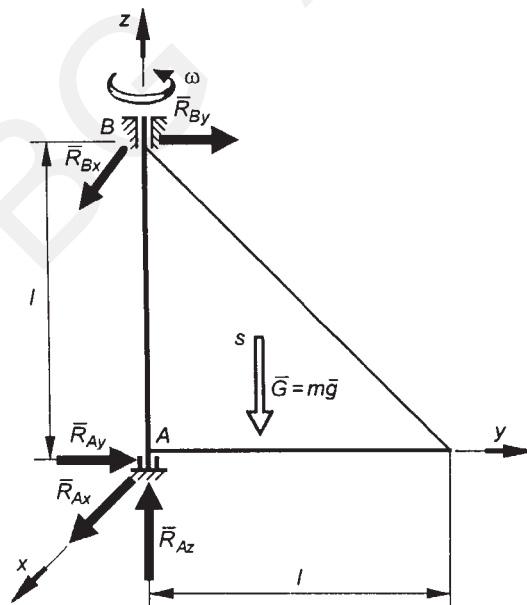
Wyznaczone z powyższych równań wartości składowych reakcji całkowitych wynoszą:

$$R_{Ax} = R_{Bx} = 0, \quad R_{Az} = mg,$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{3}mg - \frac{1}{4}ml\omega^2, \quad R_{By} = -\frac{1}{3}mg - \frac{1}{12}ml\omega^2,$$

$$i \quad R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = m\sqrt{\frac{10}{9}g^2 - \frac{1}{6}gl\omega^2 + \frac{1}{16}l^2\omega^4},$$

$$R_B = \frac{1}{3}\left(g + \frac{1}{4}l\omega^2\right).$$



Rys. 3.4.14

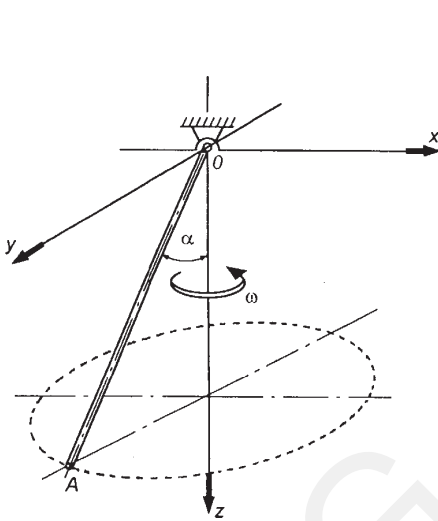
**ZADANIE 3.4.15**

Obliczyć reakcje przegubu  $O$  zawieszenia jednorodnego pręta  $OA = l$  o masie  $m$ , jeżeli porusza się on wokół osi  $z$  z prędkością  $\omega = \text{const}$  stale pod kątem  $\alpha$  (rys. 3.4.15).

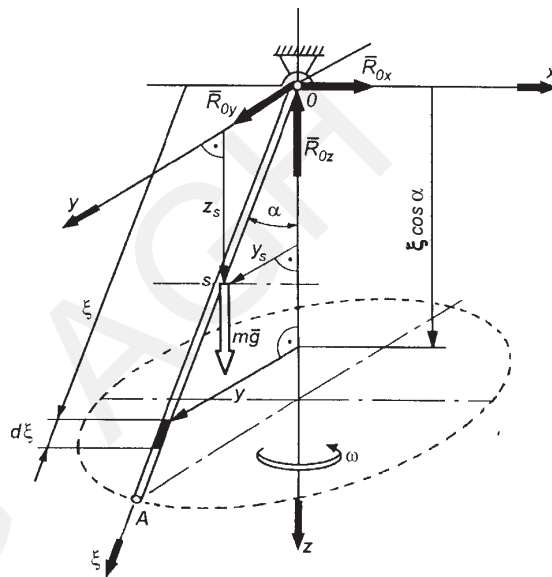
**Rozwiązanie**

W przyjętym układzie odniesienia przyłożono siły czynne i reakcje (rys. 3.4.15a).

Podobnie jak w przykładzie poprzednim, całkowite reakcje obliczono z układu równań (1) – str. 274.



Rys. 3.4.15



Rys. 3.4.15a

Wyznaczając współrzędne środka ciężkości  $x_s = 0$ ,

$$y_s = \frac{1}{2}l \sin \alpha, \quad z_s = \frac{1}{2}l \cos \alpha,$$

momenty dewiacji:  $D_{xy} = 0$  (oś  $x$  jest prostopadła do płaszczyzny symetrii pręta),

$$\begin{aligned} D_{yz} &= \int_m yz dm = \rho \int_0^l \xi (\sin \alpha) \xi (\cos \alpha) \xi d\xi = \rho \sin \alpha (\cos \alpha) \int_0^l \xi^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{3} \rho l^3 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3} m l^2 \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

oraz podstawiając do równań (1) – str. 274 – powyżej obliczone wielkości, a także  $\varepsilon = 0$  ( $\omega = \text{const}$ ) otrzymano:

$$R_{0x} = 0,$$

$$R_{0y} + \frac{1}{2}ml\omega^2 \sin \alpha = 0,$$

$$R_{0z} - mg = 0,$$

$$\frac{1}{2}mgl \sin \alpha - \frac{1}{3}ml^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Z trzech pierwszych równań wyznacza się wartości składowych reakcji  $\bar{R}_0$ , a następnie jej wartość

$$R_0 = m\sqrt{g^2 + \frac{1}{4}\omega^4 l^2 \sin^2 \alpha}.$$

Z równania czwartego wyznaczyć można wartość prędkości kątowej, przy której pręt o długości  $l$  w czasie ruchu nachylony będzie stale pod kątem  $\alpha$ .

Dla obliczonej wartości prędkości kątowej

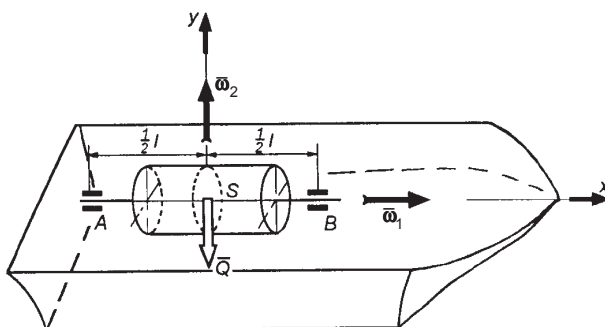
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos \alpha}},$$

wartość całkowitej reakcji w punkcie  $O$  wynosi  $R_0 = mg\sqrt{1 + \frac{9}{16}\text{tg}^2 \alpha}$ .

### 3.4.3. Ruch kulisty – przybliżona teoria żyroskopów

#### ZADANIE 3.4.16

Obliczyć wartość żyroskopowych reakcji łożysk wału turbiny okrętowej obracającej się z prędkością kątową  $\omega_1 = 26,2$  rad/s podczas zmiany kursu okrętu z prędkością kątową  $\omega_2 = 0,209$  rad/s (rys. 3.4.16). Ciężar wirnika turbiny  $Q = 176,6$  kN, moment bezwładności wirnika względem jego osi obrotu  $J = 40515$  kgm<sup>2</sup>. Wirnik umieszczony jest w środku wału podpartego na dwóch łożyskach o rozstawie  $l = 2$  m.



Rys. 3.4.16

### Rozwiązanie

Reakcje żyroskopowe wyznacza się obliczając wartość momentu żyroskopowego  $\bar{M}_G$  równą wartości momentu  $\bar{M}$  wynikającego ze zmiany krętu  $\bar{K}$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$  w wyniku zmiany kursu z prędkością  $\bar{\omega}_2$ .

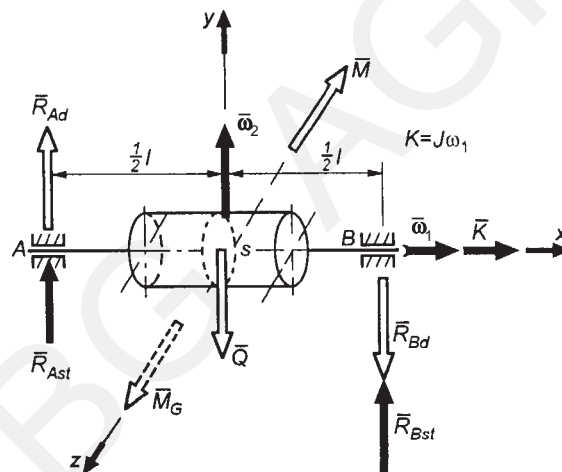
Wartość momentu  $\bar{M}$  wynosi  $M = R_{Ad} \cdot l$ , a ponieważ  $M = M_G$ , więc  $R_{Ad} = \frac{M_G}{l}$  (rys. 3.4.16a).

Dla przypadku, gdy kąt pomiędzy prędkością obrotu szybkiego  $\bar{\omega}_1$  a prędkością obrotu wolnego  $\bar{\omega}_2$  wynosi  $\frac{\pi}{2}$ , wartość momentu żyroskopowego wyznaczona w wyniku zastosowania twierdzenia Resala wynosi:  $M_G = J\omega_1 \omega_2 = 40\,515 \cdot 26,2 \cdot 0,209 \cong 221\,710$  Nm.

Wartość reakcji żyroskopowych wynosi

$$R_{Ad} = R_{Bd} = \frac{M_G}{l} = \frac{221\,710}{2} = 110\,855 \text{ N.}$$

Dodatkowo obliczono wartość reakcji statycznych  $\bar{R}_{Ast}$  i  $\bar{R}_{Bst}$ .



Rys. 3.4.16a

Ze względu na symetrię wartość reakcji statycznych

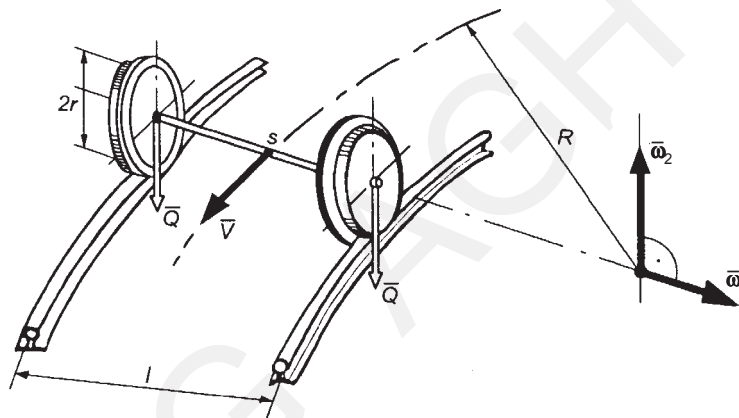
$$R_{Ast} = R_{Bst} = \frac{Q}{2} = 88\,300 \text{ N.}$$

Takie reakcje występują podczas utrzymywania kursu prostoliniowego. W momencie zmiany kursu z prędkością kątową o wartości  $\omega_2 = 0,209$  rad/s  $\ll \omega_1 = 26,2$  rad/s, względnie kołysania okrętu z tą prędkością, powstają w łożyskach dodatkowe siły dynamiczne  $R_{Ad}$  i  $R_{Bd}$ , tak że łożysko A jest obciążone siłą  $R_A = R_{Ad} + R_{Ast} = 199\,155$  N, a łożysko B siłą o wartości  $R_B = R_{Bd} - R_{Bst} = 22\,555$  N.

Przedstawiony przykład pokazuje, jak ważne jest uwzględnienie w konstrukcyjnych obliczeniach obciążeń dynamicznych, które mogą znacznie przekraczać obciążenia statyczne, a nieuwzględnienie nadwyżek dynamicznych prowadzić może do zniszczenia konstrukcji.

### ZADANIE 3.4.17

Obliczyć całkowite reakcje szyn na koła parowozu jadącego z prędkością  $v = 20$  m/s po poziomym torze położonym na zakręcie kołowym o średnim promieniu  $R = 200$  m. Rozstaw szyn wynosi  $l = 1,2$  m, ciężar każdego z kół  $Q = 4905$  N, ciężar osi pominać, koła należy traktować jako jednorodne walce o promieniu  $r = 0,7$  m.



Rys. 3.4.17

### Rozwiązanie

Oddziaływanie kół na szyny wynika z obciążenia statycznego siłami ciężkości  $Q$  (rys. 3.4.17), obciążenia dynamicznego na skutek ruchu zestawu kołowego po okręgu o promieniu  $R$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$  oraz z obciążenia dynamicznego siłami żyroskopowymi na skutek ruchu z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$  i prędkością kątową  $\bar{\omega}_1$  wokół własnej osi kół. Całkowite reakcje szyn, równe oddziaływaniom kół na szyny, wyznacza się jako sumę składowych statycznych i dynamicznych. Zadanie rozwiązano przy założeniu, że nie następuje odrywanie koła wewnętrznego od szyny, oraz że boczne działania kół na szyny wywiera jedynie koło zewnętrzne. Rozkład sił czynnych i reakcji przyłożonych do zestawu kołowego pokazano na rysunku 3.4.17a, przy czym siła  $\bar{B}_s$  jest siłą bezwładności przyłożoną w środku ciężkości  $S$  i wynikającą z ruchu z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$ , a moment żyroskopowy  $\bar{M}_G$  równy momentowi wynikającemu ze zmiany krętu  $\bar{K}$  z prędkością  $\bar{\omega}_2$  obliczono z twierdzenia Resala.

Siły  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{By} = \bar{R}_B$  są siłami reakcji całkowitych uwzględniających składowe statyczne i dynamiczne. Stosując metodę kinetostatyki, tzn. analizując układ dynamiczny jak układ statyczny, ale z przyłożonymi siłami dynamicznymi, można napisać równania równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \rightarrow R_{Ax} - B_s = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \rightarrow R_{Ay} - 2Q + R_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow B_s r + M_G - 2Q \cdot \frac{1}{2} l + R_B l = 0.$$

Siłę bezwładności  $B_s$  wyznacza się, obliczając przyspieszenie normalne środka masy  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , gdzie  $v$  jest prędkością liniową jazdy parowozu równą prędkości środka masy  $S$ , czyli

$$B_s = m a_n = \frac{2Q}{g} \frac{v^2}{R} = \frac{2 \cdot 4905 \cdot 400}{9,81 \cdot 200} = 2000 \text{ N}.$$

Moment żyroskopowy obliczono z twierdzenia Resala dla przypadku, gdy pomiędzy prędkościami  $\bar{\omega}_1$  i  $\bar{\omega}_2$  zawarty jest kąt prosty, tzn.  $M_G = J\omega_1\omega_2$ .

Moment bezwładności  $J$  względem osi własnej zestawu (oś obrotu szybkiego) wynosi

$$J = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Q}{g} r^2 = \frac{4905 \cdot (0,7)^2}{9,81} = 245 \text{ kgm}^2.$$

Prędkość kątową  $\omega_1$  obliczono, zakładając, że koła toczą się po szynach bez poślizgu.

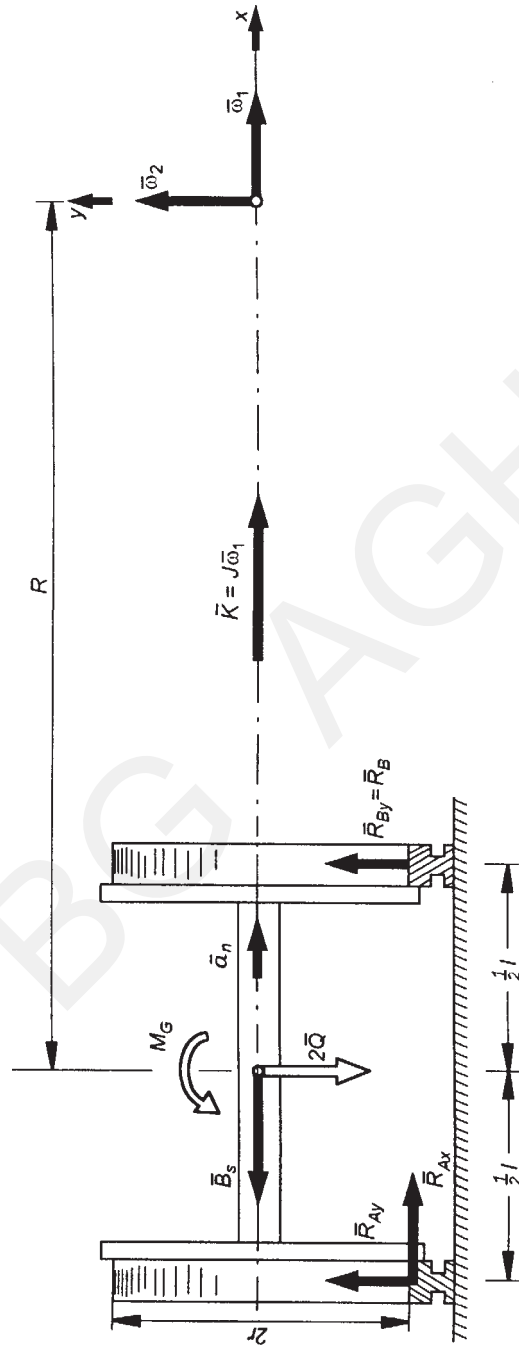
$$v = \omega_1 r$$

i stąd

$$\omega_1 = \frac{v}{r} = \frac{20}{0,7} = 28,57 \text{ rad/s}.$$

Prędkość kątową  $\bar{\omega}_2$  wynika z prędkości jazdy parowozu równej prędkości liniowej środka masy i

$$\omega_2 = \frac{v}{R} = \frac{20}{200} = 0,1 \text{ rad/s}.$$



Rys. 3.4.17a

Moment żyroskopowy wynosi więc:

$$M_G = 245 \cdot 28,75 \cdot 0,1 = 704,37 \text{ Nm.}$$

Obliczając z równań równowagi  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  i  $R_B$ , otrzymuje się:

$$R_{Ax} = B_s = 2000 \text{ N,}$$

$$R_{Ay} = Q + \frac{B_s r + M_G}{l} = 4905 + \frac{2000 \cdot 0,7 + 704,37}{1,2} \cong 6658 \text{ N,}$$

$$R_B = Q - \frac{B_s r + M_G}{l} = 4905 - \frac{2000 \cdot 0,7 + 704,37}{1,2} \cong 3151 \text{ N.}$$

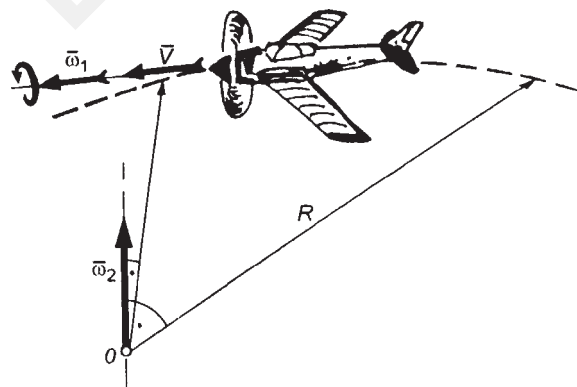
Wartości reakcji całkowitych wynoszą odpowiednio:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(2000)^2 + (6658)^2} = 6952 \text{ N,} \quad R_B = 3151 \text{ N.}$$

W tym przypadku zasadnicze obciążenie szyny zewnętrznej powoduje siła  $\bar{B}_s$ , jednakże moment żyroskopowy powoduje dodatkowe obciążenie dynamiczne, które również wpływa na żywotność szyny i kół jezdnych. Do samodzielnego rozwiązania proponuje się wyznaczenie granicznej prędkości jazdy, przy której zakręt o promieniu  $R$  pokonuje się bezpiecznie, tzn. bez wywrócenia parowozu.

### ZADANIE 3.4.18

Obliczyć wartość momentu żyroskopowego działającego na samolot lecący z prędkością  $v = 40 \text{ m/s}$  po łuku o promieniu  $R = 25 \text{ m}$ , jeżeli obroty silnika wynoszą  $n = 1200 \text{ obr/min}$ , a moment bezwładności wszystkich części obracających się względem osi podłużnej samolotu wynosi  $J = 7,85 \text{ Nms}^2$  (rys. 3.4.18).



Rys. 3.4.18



**Rozwiązanie**

Wartość momentu żyroskopowego obliczono bezpośrednio z twierdzenia Resala  $M_G = J\omega_1\omega_2$ .

Prędkość kątową  $\bar{\omega}_1$ , obrotu dookoła osi własnej samolotu obliczono, znając obroty silnika, tj.  $\omega_1 = \frac{\pi n}{30}$ . Prędkość kątową  $\bar{\omega}_2$  wyznaczono, znając prędkość liniową  $\bar{v}$  w ruchu po okręgu o promieniu  $R$ , tj.  $\omega_2 = \frac{v}{R}$ .

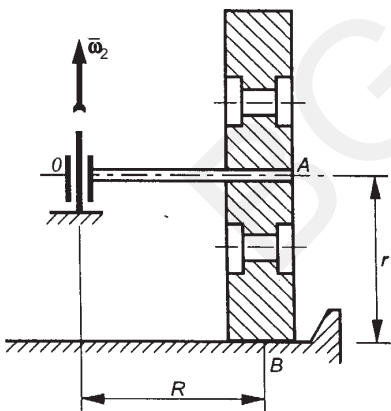
Moment żyroskopowy wynosi więc

$$M_G = J \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{v}{r} = 7,85 \cdot \frac{\pi \cdot 1200}{30} \cdot \frac{40}{25} \cong 1577 \text{ Nm.}$$

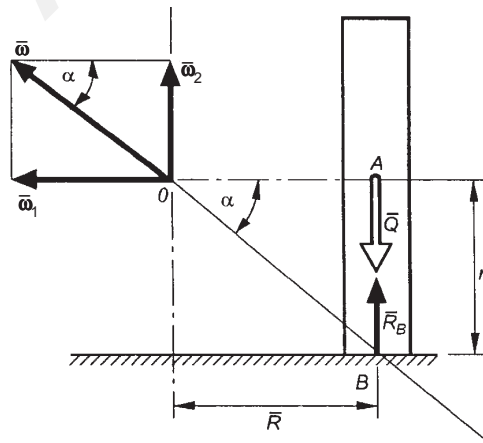
W wyniku takiego momentu żyroskopowego powstają siły dynamiczne działające w układzie napędowym samolotu, np. na łożyskach wału korbowego. Wartość tych sił zależy również od rozstawu łożysk.

**ZADANIE 3.4.19**

W młynie chilijskim walec roboczy o masie  $m$  i promieniu bezwładności  $\rho$  toczy się bez poślizgu po bieżni o promieniu  $R$  z prędkością kątową  $\bar{\omega}_2$  wokół pionowej osi (rys. 3.4.19). Obliczyć nacisk walca na bieżnię, jeżeli jego promień wynosi  $r$ .



Rys. 3.4.19



Rys. 3.4.19a

**Rozwiązanie**

Ze względu na to, że toczenie odbywa się bez poślizgu, prędkość liniowa punktu  $B$  (punktu styku walca z bieżnią) w dowolnej chwili czasu jest równa zero, chwilowa oś obrotu oraz prędkość kątową chwilowa  $\bar{\omega}$  leżą na kierunku  $OB$  (rys. 3.4.19a).

Prędkość kątową względem osi własnej walca roboczego  $\bar{\omega}_1$  obliczono z zależności  $\omega_1 = \omega_2 \text{ctg } \alpha$ , gdzie  $\text{ctg } \alpha = \frac{R}{r}$  i  $\omega_1 = \omega_2 \frac{R}{r}$ .

Nacisk walca na bieżnię równy jest co do wartości reakcji  $\bar{R}_B$  bieżni wynikającej z działania statycznego siły ciężkości  $\bar{Q}$  walca oraz z działania dynamicznego wynikającego z momentu żyroskopowego

$$M_G = J\omega_1\omega_2.$$

Przyrównując moment sił  $\bar{Q}$  i  $\bar{R}_B$  względem punktu  $O$  do momentu żyroskopowego, otrzymano:

$$R_B \cdot R - QR = J\omega_1\omega_2,$$

skąd reakcja  $R_B = \frac{J\omega_1\omega_2}{R} + Q$ .

Podstawiając za moment bezwładności  $J = m\rho^2$  oraz za  $\omega_1$  obliczoną poprzednio wartość, wyznaczono

$$R_B = \frac{m\rho^2\omega_2^2}{r} + mg.$$

W praktyce siły dynamiczne mogą osiągnąć znaczne wartości w stosunku do sił statycznych i np. dla  $n = 150$  obr/min walca roboczego o promieniu  $r = 0,5$  m i promieniu bezwładności  $\rho = 0,3$  m siła nacisku wynikająca z działania momentu żyroskopowego jest pięciokrotnie większa od ciężaru walca.

### 3.5. Dobór mocy napędu w wybranych układach mechanicznych

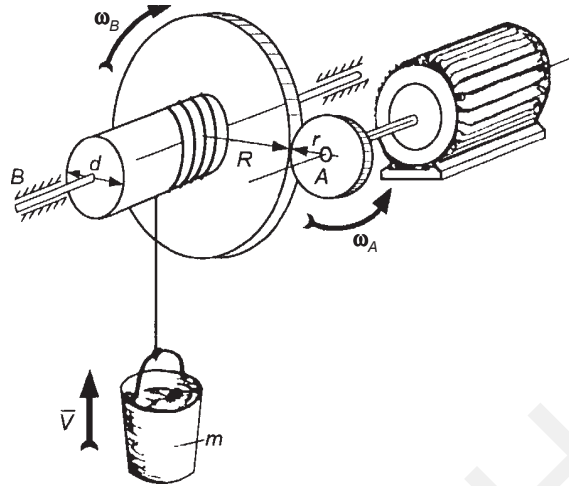
#### ZADANIE 3.5.1

Na rysunku 3.5.1 pokazano schemat wyciągarki z napędem elektrycznym.

Obliczyć moc silnika na końcu rozruchu, mając dane:

- $J_A$  – moment bezwładności elementów masowych na wale  $A$ ,
- $J_B$  – moment bezwładności elementów masowych na wale  $B$ ,
- $m$  – masa podnoszonego ciężaru,
- $r, R$  – promienie podziałowe kół przekładni zębatej,
- $d$  – średnica bębna linowego,
- $\varepsilon_s$  – przyspieszenie katowe wału silnika,
- $t_r$  – czas rozruchu.

Sprawność układu wyciągarki przyjąć  $\eta = 1$ .



Rys. 3.5.1

**Rozwiązanie**

Moc użyteczną silnika oblicza się z zależności

$$N_u = M_s \cdot \omega_s \text{ [W]}.$$

Wzór powyższy nie uwzględnia strat mocy potrzebnej na pokonanie oporów własnych ruchu maszyny. Uwzględniając współczynnik sprawności ujmujący takie straty, moc silnika oblicza się ze wzoru

$$N_s = \frac{N_u}{\eta}, \text{ czyli } N_s = \frac{1}{\eta} M_s \cdot \omega_s \text{ [W]},$$

gdzie:

$M_s$  – moment na wale silnika, w Nm,

$\omega_s$  – prędkość kątowa wału silnika w końcu rozruchu, w rad/s.

Zakładając, że rozruch odbywa się ruchem jednostajnie przyspieszonym, tj.  $\varepsilon_s = \text{const}$ , i bez prędkości początkowej, prędkość kątowa  $\omega_s = \varepsilon_s \cdot t_r$ , gdzie  $t_r$  jest czasem rozruchu.

Moment  $M_s$  na wale silnika obliczono dwiema metodami:

- 1) metodą energetyczną
- 2) metodą redukcji sił i momentów sił.

**Ad 1)**

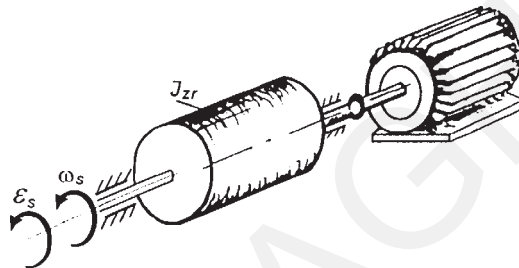
Moment  $M_s$  jest równy sumie momentów oporów dynamicznych i statycznych na wale A,  $M_s = M_{dA} + M_{stA}$ . Opory statyczne wynikają z działania sił statycznych i w tym przypadku zależne są jedynie od siły ciężkości  $m\bar{g}$  podnoszonego ciężaru. Moment statyczny  $M_B$  na wale B jest równy  $M_B = mg \frac{d}{2}$ .

Uwzględniając równość sił stycznych wzajemnego oddziaływania kół zębatych przekładni, otrzymuje się moment statyczny na wale  $A$  równy

$$M_{stA} = M_B \cdot i = M_B \frac{r}{R} = mg \frac{rd}{2R},$$

gdzie  $i = \frac{r}{R}$  jest przełożeniem przekładni (oznaczając siły styczne przez  $P_\tau$ , moment  $M_B = P_\tau R$ , a moment  $M_{stA} = P_\tau r$ , czyli  $M_{stA} = M_B \frac{r}{R}$ ).

W celu obliczenia momentu dynamicznego  $M_{dA}$  na wale silnika, rzeczywisty układ wyciągarki zastępujemy modelem obliczeniowym jak na rysunku 3.5.1a.



Rys. 3.5.1a

$J_{zr}$  jest zredukowanym na wał silnika momentem bezwładności uwzględniającym masy wszystkich elementów biorących udział w ruchu wyciągarki. Znając moment  $J_{zr}$ , obliczyć można moment dynamiczny na wale silnika z zależności

$$M_{dA} = J_{zr} \cdot \varepsilon_s,$$

gdzie  $\varepsilon_s$  jest przyspieszeniem kątowym wału silnika.

Moment bezwładności oblicza się porównując energię kinetyczną  $E_u$  układu rzeczywistego z energią kinetyczną  $E_m$  modelu

$$E_u = E_m.$$

Energia układu jest równa

$$E_u = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_A^2,$$

gdzie:

- $v$  – prędkość podnoszonego ciężaru o masie  $m$ ,
- $\omega_B$  – prędkość kątowa wału  $B$ ,
- $\omega_A = \omega_s$  – prędkość kątowa wału  $A$  równa prędkości kątowej silnika.

Ponieważ:  $\omega_B = \omega_A \frac{r}{R} = \omega_s \frac{r}{R}$ ,  $v = \omega_B \frac{d}{2} = \omega_s \frac{rd}{2R}$ ,  
więc

$$E_u = \frac{1}{2} \left[ m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A \right] \omega_s^2.$$

Energia kinetyczna modelu jest równa:  $E_m = \frac{1}{2} J_{zr} \omega_s^2$ .

Porównując obie energie, otrzymuje się

$$J_{zr} = m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A$$

i szukany moment dynamiczny na wale silnika

$$M_{dA} = \left[ m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A \right] \varepsilon_s.$$

Obliczając moment  $M_s$  silnika

$$M_s = \left[ m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A \right] \varepsilon_s + mg \frac{rd}{2R}$$

oraz uwzględniając współczynnik sprawności  $\eta = 1$ , otrzymuje się moc silnika:

$$N_s = \left\{ \left[ m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A \right] \varepsilon_s + mg \frac{rd}{2R} \right\} \varepsilon_s t_r.$$

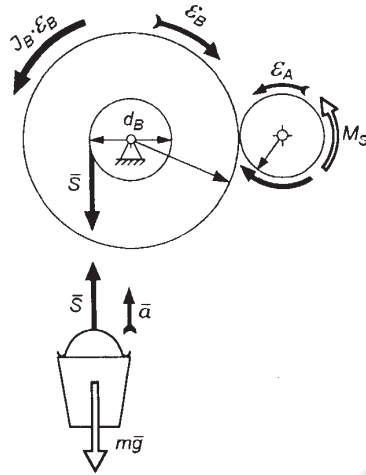
### Ad 2)

Metoda ta polega na redukowaniu momentów sił statycznych i dynamicznych łącznie, według formuły pokazanej w przypadku 1) przy wyznaczeniu  $M_{sTA}$ .

Moment oporów  $M$  na wale silnika, równy momentowi silnika  $M_s$ , składa się z dwóch członów (rys. 3.5.1b)

$$M = M_s = J_A \varepsilon_A + M_{zr},$$

gdzie:  $\varepsilon_A = \varepsilon_s$  jest przyspieszeniem kątowym wału silnika, iloczyn  $J_A \varepsilon_A$  przedstawia opory dynamiczne na wale  $A$ ,  $M_{zr}$  jest momentem zredukowanym uwzględniającym opory dynamiczne i statyczne w układzie wyciągarki.



Rys. 3.5.1b

Moment zredukowany  $M_{zr}$  jest równy

$$M_{zr} = M_B i = M_B \frac{r}{R},$$

gdzie moment oporów na wale  $B$  wynosi

$$M_B = J_B \varepsilon_B + S \frac{d}{2}.$$

Siłę w linie (rys. 3.5.1b) wyznaczyć można z równania dynamicznego ciężaru  $G$  (lub z zasady d'Alemberta), tj.

$$S = G + ma = m(g + a).$$

Moment oporów na wale silnika wynosi więc

$$M = J_A \varepsilon_s + \left[ J_B \varepsilon_B + m(g + a) \frac{d}{2} \right] \frac{r}{R}.$$

Podstawiając związki kinematyczne:

$$\varepsilon_B = \varepsilon_s \frac{r}{R}, \quad a = \varepsilon_B \frac{d}{2},$$

otrzymuje się moment silnika

$$M = M_s = \left[ m \left( \frac{rd}{2R} \right)^2 + J_B \left( \frac{r}{R} \right)^2 + J_A \right] \varepsilon_s + mg \frac{rd}{2R},$$

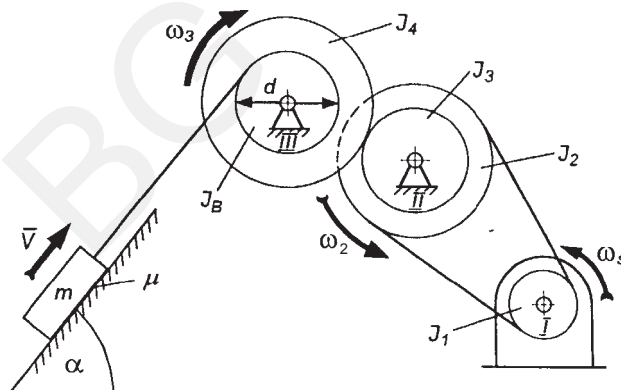
a więc identyczny jak w przypadku 1) i obliczenie mocy  $N_s$  odbywa się dalej jak w przypadku 1).

**Uwaga.** Moment silnika  $M_s$  obliczyć można również, pisząc odpowiednie dynamiczne równania ruchu poszczególnych brył wchodzących w skład wyciągarki i rugując z otrzymanego układu równań siły wzajemnego oddziaływania (siły wewnętrzne układu).

### ZADANIE 3.5.2

Wyznaczyć moc wyciągarki (rys. 3.5.2) w końcowej chwili rozruchu dla następujących danych:

- $J_1, J_2$  – momenty bezwładności kół pasowych silnika i przekładni,
- $J_3, J_4$  – momenty bezwładności kół zębatych przekładni,
- $J_B$  – moment bezwładności bębna linowego,
- $GD^2$  – moment zamachowy wirnika silnika,
- $i_1, i_2$  – przełożenia przekładni pasowej i zębatej,
- $d$  – średnica bębna linowego,
- $m$  – masa ciągniętego ciężaru,
- $v$  – prędkość ciągniętego ciężaru w końcowej chwili rozruchu,
- $t_r$  – czas rozruchu,
- $\alpha$  – kąt równi,
- $\mu$  – współczynnik tarcia po równi,
- $\eta$  – sprawność układu napędowego wyciągarki.



Rys. 3.5.2

### Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu zastosowano dwie metody:

- 1) energetyczną,
- 2) redukcję sił i momentów sił.

**Ad 1)**

Energia kinetyczna układu wyraża się zależnością

$$E_u = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_I\omega_s^2 + \frac{1}{2}J_{II}\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_{III}\omega_3^2,$$

gdzie:

$$J_I = J_1 + J_w = J_1 + \frac{GD^2}{4g}, \quad J_{II} = J_2 + J_3, \quad J_{III} = J_4 + J_B.$$

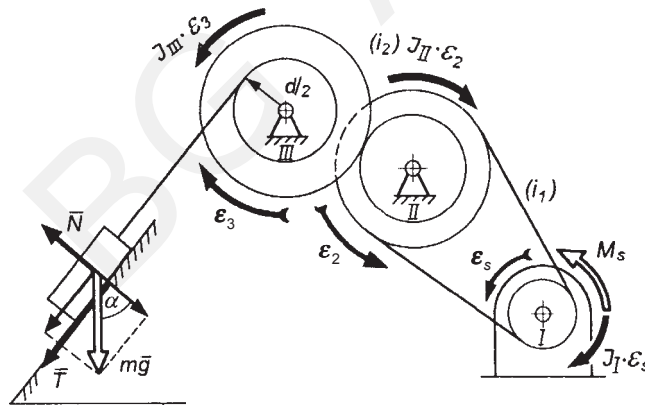
Kinematyczne związki pomiędzy odpowiednimi prędkościami mają postać (rys. 3.5.2)

$$\frac{\omega_2}{\omega_s} = i_1, \quad \frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2, \quad v = \omega_3 \frac{d}{2}$$

i energia kinetyczna układu jest równa

$$E_u = \frac{1}{2} \left[ \left( J_1 + \frac{GD^2}{4g} \right) + (J_2 + J_3)i_1^2 + (J_4 + J_B)(i_1i_2)^2 + m \frac{d^2}{4} (i_1i_2)^2 \right] \omega_s^2.$$

Redukując masy układu rzeczywistego na wał silnika, przyjmuje się model układu jak na rysunku 3.5.1a.



Rys. 3.5.2a

Energia kinetyczna modelu  $E_m = \frac{1}{2}J_{zr}\omega_s^2$ . Porównując energie kinetyczne układu rzeczywistego i modelu, otrzymuje się zredukowany moment bezwładności

$$J_{zr} = J_1 + \frac{GD^2}{4g} + (J_2 + J_3)i_1^2 + (J_4 + J_B)(i_1i_2)^2 + \frac{md^2}{4} (i_1i_2)^2.$$



Moment oporów dynamicznych wyraża się więc wzorem

$$M_d = J_{zr} \cdot \varepsilon_s,$$

gdzie przyspieszenie kątowe  $\varepsilon_s$  na wale silnika wyznacza się z zależności kinematycznych (podobnie jak dla prędkości  $\omega_s$ ).

Uwzględniając, że rozruch jest jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej, tzn.  $v = at_r$ , i korzystając ze wzorów na przełożenie przekładni, otrzymuje się

$$\varepsilon_s = \frac{2a}{i_1 i_2 d} = \frac{2v}{i_1 i_2 t_r d}.$$

Moment oporów statycznych pochodzi w tym przypadku od siły ciężkości  $m\bar{g}$  i siły tarcia  $\bar{T}$  (rys. 3.5.2a).

Na wale III moment ten wynosi

$$M_3 = (T + mg \sin \alpha) \frac{d}{2} = mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) \frac{d}{2},$$

a zredukowany na wał I jest równy momentowi oporów statycznych na wale silnika

$$M_{st} = M_3 i_1 i_2 = \frac{1}{2} mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) d i_1 i_2.$$

Prędkość kątową silnika oblicza się ze związków kinematycznych w zależności od prędkości  $v$  na końcu rozruchu

$$\omega_s = \frac{2v}{i_1 i_2 d}.$$

Moc silnika po uwzględnieniu oporów dynamicznych i statycznych oraz sprawności układu wciągarki jest równa:

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{N_u}{\eta} = \frac{M_s \omega_s}{\eta} = \frac{(M_d + M_{st}) \omega_s}{\eta} = \frac{(J_{zr} \varepsilon_s + M_{st}) \omega_s}{\eta} = \\ &= \frac{1}{\eta} \left\{ \left[ J_1 + \frac{GD^2}{4g} + (J_2 + J_3) i_1^2 + (J_4 + J_B) (i_1 i_2)^2 + \frac{md^2}{4} (i_1 i_2)^2 \right] \frac{2v}{i_1 i_2 t_r d} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha) i_1 i_2 d \right\} \frac{2v}{i_1 i_2 d}. \end{aligned}$$

W okresie ruchu ustalonego do podtrzymania tego ruchu potrzebna jest moc mniejsza, tzn. dla  $\varepsilon_s = 0$

$$N_s = \frac{M_{st}\omega_s}{\eta} = \frac{mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)v}{\eta}.$$

Moc ta wynika jedynie z obciążenia statycznego z uwzględnieniem strat w układzie.

### Ad 2)

Moment oporów na wale silnika równy momentowi silnika wynosi

$$M = M_s = J_1\varepsilon_s + M_{zr},$$

gdzie  $M_{zr} = M_{zrII/I} + M_{zrIII/I}$  jest sumą momentów oporów zredukowanych z wału II na I i z wału III na I:

$$M_{zrII/I} = M_{II}i_1 = J_{II}\varepsilon_2i_1,$$

$$M_{zrIII/I} = M_{III}i_1i_2 = \left[ J_{III}\varepsilon_3 + (ma + mg\mu \cos \alpha + mg \sin \alpha)\frac{d}{2} \right] i_1i_2.$$

Przyspieszenia kątowne  $\varepsilon_2$  i  $\varepsilon_3$  w zależności od  $\varepsilon_s$  oraz prędkości kątowej  $\omega_s$  oblicza się identycznie jak w przypadku 1).

Podstawiając  $J_I = J_1 + \frac{GD^2}{4g}$ ,  $J_{II} = J_2 + J_3$ ,  $J_{III} = J_4 + J_B$  i obliczony moment silnika do wzoru na moc, otrzymuje się:

$$N_s = \frac{1}{\eta} \left\{ \left[ J_1 + \frac{GD^2}{4g} + (J_2 + J_3)i_1^2 + (J_4 + J_B)(i_1i_2)^2 + \frac{md^2}{4}(i_1i_2)^2 \right] \frac{2v}{i_1i_2t_r d} + \frac{1}{2} mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)i_1i_2d \right\} \frac{2v}{i_1i_2d}.$$

### ZADANIE 3.5.3

Wyznaczyć moment oporów na wale silnika podnośnika suwnicy (rys. 3.5.3) dla danych:

- $J_1$  – moment bezwładności na wale silnika,
- $J_0$  – moment bezwładności krążka linowego,
- $G, Q$  – ciężar podnoszony i ciężar krążka linowego,
- $r, R$  – promienie bębna linowego i krążka,
- $\omega_s$  – prędkość kątowa silnika po czasie  $t_r$  rozruchu.

Przyjąć, że w czasie rozruchu wirnik silnika obraca się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

**Rozwiązanie**

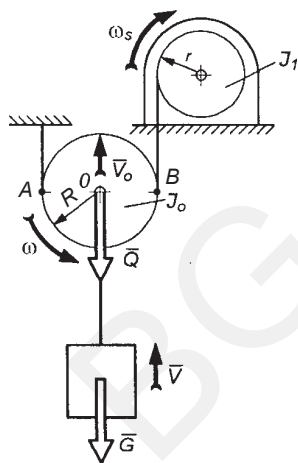
Moment oporów na wale silnika wyznaczono dwiema metodami:

- 1) energetyczną,
- 2) redukcji sił i momentów.

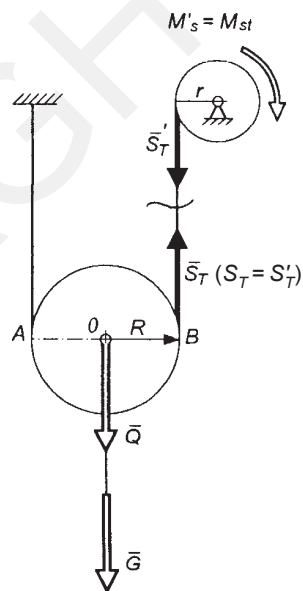
**Ad 1)**

Prędkość podnoszonego ciężaru  $v = v_0 = \omega R$  (chwilowy środek obrotu znajduje się w punkcie  $A$  (rys. 3.5.3)), a prędkość punktu  $B$   $v_B = 2v_0 = 2v$ . Uzależniając odpowiednie prędkości od prędkości kątowej silnika, otrzymuje się:

$$v = \frac{1}{2}v_B = \frac{1}{2}\omega_s r, \quad \omega = \frac{v_0}{R} = \frac{v}{R} = \frac{1}{2}\omega_s \frac{r}{R}.$$



Rys. 3.5.3



Rys. 3.5.3a

Energia kinetyczna układu ma postać

$$E_u = \frac{1}{2}J_1\omega_s^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2,$$

a po uwzględnieniu związków kinematycznych

$$E_u = \frac{1}{2}\left[ J_1 + J_0\left(\frac{r}{2R}\right)^2 + (Q+G)\frac{r^2}{eg} \right] \omega_s^2.$$

Ponieważ energia kinetyczna modelu zastępczego wynosi  $E_m = \frac{1}{2} J_{zr} \omega_s^2$ , więc zredukowany moment bezwładności na wał silnika jest równy

$$J_{zr} = J_1 + J_0 \left( \frac{r}{2R} \right)^2 + (Q + G) \frac{r^2}{4g}.$$

Obliczając z warunków rozruchu przyspieszenie kątowe wału silnika  $\varepsilon_s = \frac{\omega_s}{t_r}$ , otrzymuje się moment dynamiczny na wale silnika w postaci

$$M_d = J_{zr} \varepsilon_s = \left[ J_1 + J_0 \left( \frac{r}{2R} \right)^2 + (Q + G) \frac{r^2}{4g} \right] \frac{\omega_s}{t_r}.$$

Moment oporów statycznych pochodzący tylko od sił  $\bar{G}$  i  $\bar{Q}$  oblicza się z zależności

$$M_{st} = S'_T r, \quad S'_T = S_T,$$

gdzie  $S_T$  – siła wynikająca z równowagi dźwigni  $AB$  (punkt  $A$  nieruchomy) (rys. 3.5.3a).

Wartość statycznej siły  $\bar{S}_T$  oblicza się z równania

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \rightarrow S_T \cdot 2R - (Q + G)R = 0,$$

stąd

$$S_T = \frac{1}{2}(Q + G) \text{ i } M_{st} = \frac{1}{2}(Q + G)r.$$

Moment oporów na wale silnika uwzględniający obciążenia dynamiczne i statyczne wynosi więc

$$M = M_d + M_{st} = \left[ J_1 + J_0 \left( \frac{r}{2R} \right)^2 + (Q + G) \frac{r^2}{4g} \right] \frac{\omega_s}{t_r} + \frac{1}{2} (Q + G)r.$$

**Uwaga.** Pokazany na rysunku 3.5.3a  $M'_s$  jest przeciwny do  $M_{st}$  (oporów), gdyż jest on częścią momentu napędowego służącego do pokonania tylko oporów statycznych.

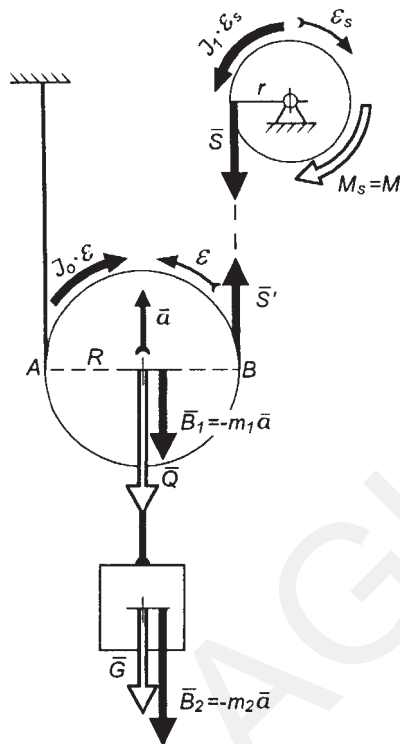
### Ad 2)

Moment oporów na wale silnika (rys. 3.5.3b) jest równy  $M = J_1 \varepsilon_s + S r$ .

Wartość siły  $\bar{S}$  w linie można obliczyć, układając równanie dynamiczne ruchu dla koła linowego i podnoszonego ciężaru lub korzystając z zasady d'Alamberta, z równania

$$\sum_{i=1}^n M_{i(A)} = 0 \rightarrow S' \cdot 2R - (Q + G + B_1 + B_2)R - J_0 \varepsilon = 0, \quad S' = S,$$

gdzie:  $B_1 = m_1 a$ ,  $B_2 = m_2 a$  oraz  $m_1 = \frac{Q}{g}$ ,  $m_2 = \frac{G}{g}$ .



Rys. 3.5.3b

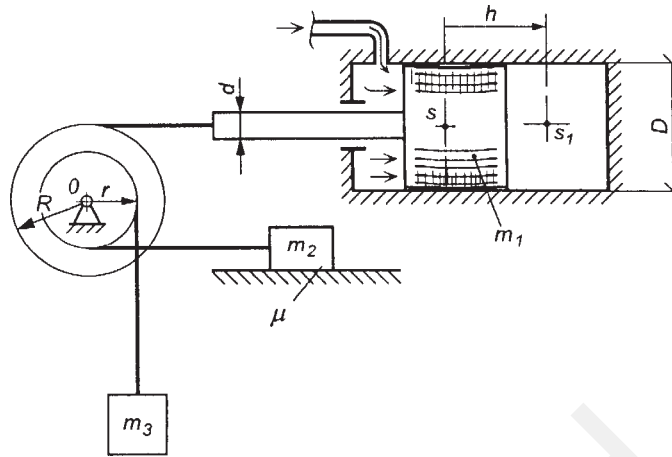
Uwzględniając zależności kinematyczne:  $a = \varepsilon R$ ,  $\varepsilon \cdot 2R = \varepsilon_s r$ ,  
otrzymuje się:  $\varepsilon = \varepsilon_s \frac{r}{2R}$ ,  $a = \frac{1}{2} \varepsilon_s r$ .

Podstawiając obliczoną wartość siły  $\bar{S}$  do wzoru na moment  $M$ , otrzymuje się

$$M = \left[ J_1 + J_0 \left( \frac{r}{2R} \right)^2 + (Q + G) \frac{r^2}{4g} \right] \frac{\omega_s}{t_r} + \frac{1}{2} (Q + G)r.$$

#### ZADANIE 3.5.4

Tłok cylindra pneumatycznego (rys. 3.5.4) o masie  $m_1$  jest napędzany stałym ciśnieniem tak, że tłok porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, osiągając największą wartość prędkości  $\bar{v}_p$  w połowie długości skoku  $h$ . Znając wartość prędkości  $\bar{v}_p$ , skok tłoka, masy  $m_2$ ,  $m_3$ , moment bezwładności  $J_0$  podwójnego krążka, jego promienie  $R$  i  $r$ , średnicę tłoka  $D$  i tłoczyśka  $d$ , współczynnik tarcia  $\mu$ , obliczyć moc napędu oraz ciśnienie robocze w cylindrze, jeżeli sprawność układu wynosi  $\eta$ .



Rys. 3.5.4

**Rozwiązanie**

Element roboczy (tłok) napędu wykonuje ruch postępowy i moc napędu obliczyć w tym przypadku można z zależności

$$N_u = P_u \cdot v_u \text{ [W]},$$

a uwzględniając straty mocy potrzebnej do pokonania oporów ruchu z zależności

$$N = \frac{N_u}{\eta} = \frac{P_u \cdot v_u}{\eta} \text{ [W]},$$

gdzie:

- $P_u$  – siła użyteczna działająca na element roboczy – tłok, w N,
- $v_u$  – prędkość tego elementu, w m/s,
- $\eta$  – współczynnik sprawności.

Siłę działającą na tłok obliczono dwiema metodami:

- 1) energetyczną,
- 2) redukcji sił i momentów sił.

**Ad 1)**

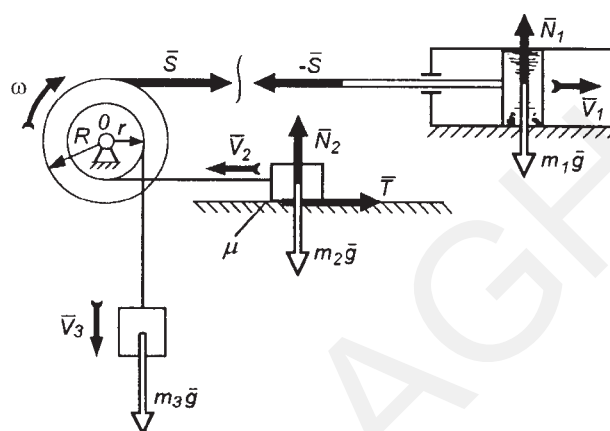
Siła  $P_u$  składa się z siły równoważącej opory dynamiczne i siły równoważącej opory statyczne układu

$$P_u = P_q + P_{st}.$$

Opory statyczne wynikają w tym przypadku z działania siły ciężkości  $m_3\bar{g}$  i siły tarcia o wartości  $T = \mu N_2 = \mu m_2 g$  (rys. 3.5.4a). Moment statyczny od tych sił na kole linowym jest równy  $M = (T - m_3 g) r = (\mu m_2 - m_3) g r$  i musi być zrównoważony momentem od siły  $S$  w linie związanej z tłoczyskiem

$$M_t = S \cdot R.$$

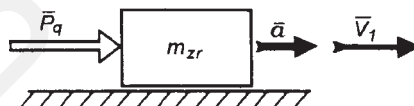
$$\text{Porównując } M = M_t, \text{ otrzymuje się } S = (\mu m_2 - m_3) g \frac{r}{R}.$$



Rys. 3.5.4a

Obliczona wartość siły  $\bar{S}$  równa jest sile statycznej  $P_{st} = S$  działającej na tłok.

Siłę oporów dynamicznych oblicza się, przyjmując model obliczeniowy układu rzeczywistego jak na rysunku 3.5.4b.



Rys. 3.5.4b

Model obliczeniowy odpowiada w tym przypadku ruchowi postępowemu, gdyż elementem napędowym jest człon wykonujący ruch postępowy (tłok).

Znając masę  $m_{zr}$  i przyspieszenie  $\bar{a}$ , siłę  $\bar{P}_q$  obliczyć można z zależności

$$P_q = m_{zr} a.$$

Ponieważ tłok porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, więc jego przemieszczenie i prędkość opisują zależności:

$$s = \frac{1}{2} a t^2, \quad v = a t.$$

Z warunków zadania wynika, że  $v = v_p$  dla  $s = \frac{1}{2}h$  i przyspieszenie tłoka jest równe  $a = \frac{v_p^2}{h}$ .

Masa  $m_{zr}$  (masa zredukowana) uwzględnia masy wszystkich elementów masowych układu rzeczywistego i oblicza się ją, porównując energie kinetyczne układu rzeczywistego –  $E_u$  i modelu –  $E_m$ . Energia układu rzeczywistego jest równa

$$E_u = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2.$$

Podstawiając:  $\omega = \frac{v_1}{R}$ ,  $v_2 = v_3 = \omega r = v_1 \frac{r}{R}$ , otrzymano

$$E_u = \frac{1}{2} \left[ m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2} \right] v_1^2.$$

Energia kinetyczna modelu wynosi  $E_m = \frac{1}{2}m_{zr}v_1^2$  i po porównaniu  $E_u = E_m$  otrzymano

$$m_{zr} = m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2}.$$

Suma składowych sił dynamicznych i statycznych jest więc równa

$$P_u = \left[ m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2} \right] \frac{v_p^2}{h} + (\mu m_2 - m_3)g \frac{r}{R}.$$

Moc napędu odpowiadająca największej prędkości tłoka  $\bar{v}_p$  ma więc postać

$$N = \frac{P_u \cdot v_u}{\eta} = \frac{P_u \cdot v_p}{\eta} = \frac{\left[ m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2} \right] \frac{v_p^2}{h} + (\mu m_2 - m_3)g \frac{r}{R}}{\eta} v_p.$$

Ciśnienie robocze w cylindrze oblicza się ze wzoru

$$p = \frac{P_u}{A},$$

gdzie  $A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$  jest czynną powierzchnią tłoka.

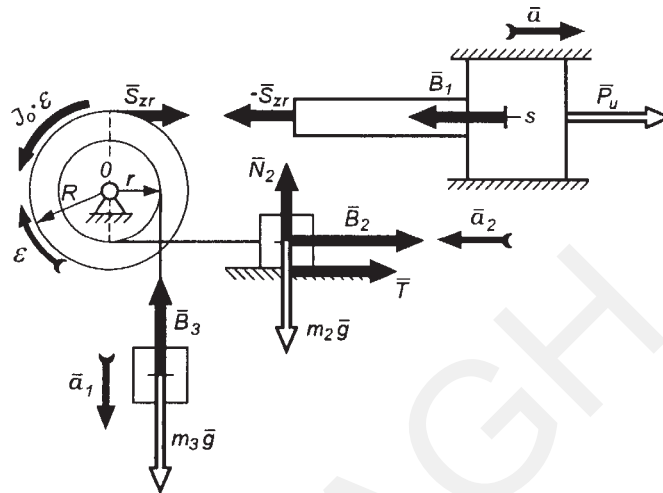
Stąd

$$p = 4 \frac{\left[ m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2} \right] \frac{v_p^2}{h} + (\mu m_2 - m_3)g \frac{r}{R}}{\pi(D^2 - d^2)}.$$



## Ad 2)

Na rysunku 3.5.4c pokazano rozkład sił działających na układ rzeczywisty z uwzględnieniem sił bezwładności, przy czym przedstawiono jedynie siły istotne dla obliczenia siły użytecznej  $\bar{P}_u$ .



Rys. 3.5.4c

Układając odpowiednie równania dla tłoka i koła linowego, otrzymuje się:

$$P_u - B_1 - S_{zr} = 0,$$

$$S_{zr} \cdot R - J_0 \varepsilon - (T + B_2)r + (m_3 g - B_3)r = 0,$$

gdzie:

$$B_1 = m_1 a_1,$$

$$B_2 = m_2 a_2,$$

$$B_3 = m_3 a_3,$$

$$T = \mu N_2 = \mu m_2 g.$$

Podstawiając  $\varepsilon = \frac{a_1}{R}$ ,  $a_2 = a_3 = \varepsilon \cdot r = a_1 \frac{r}{R}$  i obliczone jak w przypadku 1) przyspieszenie  $a_1 = \frac{v_p}{h}$  oraz rugując siłę  $S_{zr}$ , otrzymano

$$P_u = \left[ m_1 + (m_2 + m_3) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{J_0}{R^2} \right] \frac{v_p^2}{h} + (\mu m_2 - m_3) g \frac{r}{R}.$$

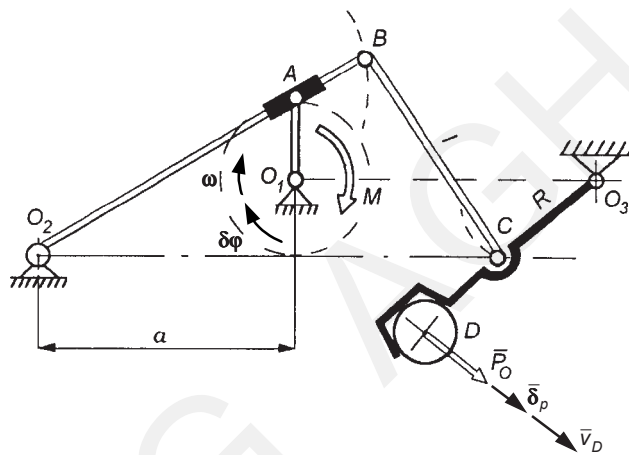
Postępując analogicznie jak w metodzie energetycznej, oblicza się moc napędu i ciśnienie robocze w cylindrze.

### 3.6. Elementy mechaniki analitycznej – zasada prac przygotowanych

#### ZADANIE 3.6.1

Mechanizm podajnika kierunkowego jest napędzany korbą  $O_1A$ , do której przyłożona jest para sił o momencie  $M$ . Mając dane:

$O_1A = r = 0,4$  m,  $a = 1,38$  m,  $O_2B = b = 2$  m,  $BC = l = 1,41$  m,  $R = O_3C = 0,8$  m,  $CD = d = 0,2$  m,  $M = 9300$  Nm, wyznaczyć wartość obwodowej siły  $\vec{P}_0$  na ramieniu podajnika, z jaką naciska on na transportowany przedmiot w położeniu jak na rysunku 3.6.1.



Rys. 3.6.1

#### Rozwiązanie

Siły zewnętrzne czynne działające na układ dźwigni podajnika składają się z pary sił o momencie  $M$  i siły  $\vec{P} = -\vec{P}_0$  będącej oddziaływaniem transportowanego przedmiotu na dźwignię podającą. Z zasady prac przygotowanych otrzymuje się równanie

$$\delta L = 0 \rightarrow M \cdot \delta\varphi - P \cdot \delta p = 0.$$

Przemieszczenia przygotowane są proporcjonalne do odpowiednich prędkości możliwych, tzn.

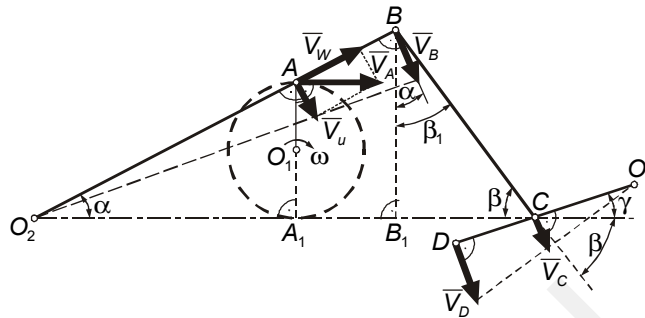
$$\delta\varphi = k\omega, \quad \delta p = kv_D,$$

stąd

$$\frac{\delta\varphi}{\delta p} = \frac{\omega}{v_D}.$$

Aby wyznaczyć zależność pomiędzy  $\delta\varphi$  i  $\delta\rho$ , należy znaleźć związek pomiędzy  $\omega$  i  $v_D$ .

Rozkład prędkości odpowiednich punktów mechanizmu pokazano na rysunku 3.6.1a.



Rys. 3.6.1a

Z zależności kinematycznych wynika, że:

$$v_A = \omega \cdot O_1A = \omega \cdot r, \quad v_u = v_A \sin \alpha = \omega \cdot r \sin \alpha,$$

$$\frac{v_u}{O_2A} = \frac{v_B}{O_2B} \rightarrow v_B = v_u \frac{O_2B}{O_2A} = \omega \cdot r \frac{b}{O_2A} \sin \alpha.$$

Ponieważ dźwignia  $BC$  porusza się ruchem płaskim, więc rzuty  $\bar{v}_B$  i  $\bar{v}_C$  na kierunek  $BC$  są jednakowe:

$$v_B \cos(\beta_1 - \alpha) = v_C \cos[90^\circ - (\beta + \gamma)]$$

i

$$v_C = v_B \frac{\cos(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\beta + \gamma)} = \omega \frac{r \cdot b}{O_2A} \frac{\cos(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\beta + \gamma)} \sin \alpha,$$

$$\frac{v_D}{O_3D} = \frac{v_C}{O_3C} \rightarrow v_D = v_C \frac{O_3D}{O_3C} = v_C \frac{R+d}{R} = \omega \frac{rb(R+d)}{R \cdot O_2A} \frac{\cos(\beta_1 - \alpha)}{\sin(\beta + \gamma)} \sin \alpha.$$

Z zależności geometrycznych otrzymuje się:

$$\sin \alpha = \frac{AA_1}{O_2A} = \frac{2r}{\sqrt{a^2 + 4r^2}}, \quad BB_1 = O_2B \sin \alpha = b \sin \alpha = b \frac{2r}{\sqrt{a^2 + 4r^2}},$$

$$\sin \beta = \frac{BB_1}{BC} = \frac{BB_1}{l} = \frac{2rb}{l \sqrt{a^2 + 4r^2}}, \quad \sin \gamma = \frac{O_3k}{R} = \frac{r}{R}, \quad \beta_1 = 90^\circ - \beta.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymuje się:

$$\alpha = \gamma = 30^\circ, \quad \beta = \beta_1 = 45^\circ, \quad v_D = 0,31\omega,$$

a z zasady prac przygotowanych zależności:

$$M \frac{\delta \varphi}{\delta p} - P = 0 \rightarrow M \frac{\omega}{v_D} - P = 0$$

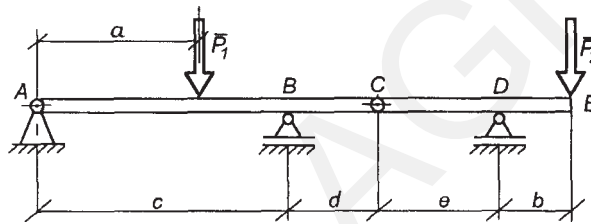
i

$$M \frac{\omega}{0,31\omega} - P = 0.$$

Szukana wartość siły  $P_0$  równa jest więc:  $P_0 = P = \frac{M}{0,31} = \frac{9300}{0,31} = 30\,000 \text{ N}$ .

### ZADANIE 3.6.2

Dana jest belka przegubowa  $AE$  (rys. 3.6.2). Znając długość  $a, b, c, d, e$ , a także siły  $\bar{P}_1$  i  $\bar{P}_2$ , obliczyć reakcje podpór.



Rys. 3.6.2

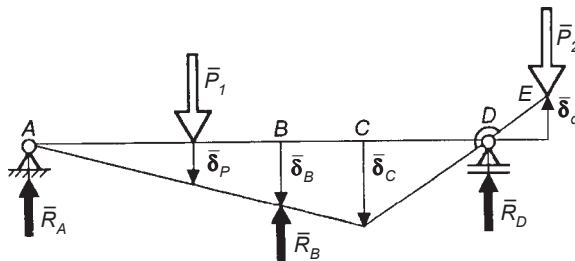
### Rozwiązanie

Odrzucając myślowo podporę  $B$ , dopuszcza się przemieszczenie belki  $AE$ , jak na rysunku 3.6.2a. Traktując przemieszczenia  $\delta_p, \delta_B, \delta_C$  i  $\delta_q$  jako przesunięcia przygotowane, z zasady prac przygotowanych otrzymuje się równanie

$$\delta L = 0 \rightarrow P_1 \delta_p - R_B \delta_B - P_2 \delta_q = 0,$$

przy czym

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\delta_B}{\delta_p} = \frac{c}{a} \rightarrow \delta_B = \frac{c}{a} \delta_p, \\ \frac{\delta_C}{\delta_q} = \frac{e}{b} \\ \frac{\delta_C}{\delta_p} = \frac{c+d}{a} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\delta_q}{\delta_p} = \frac{b(c+d)}{ea} \rightarrow \delta_q = \frac{b(c+d)}{ea} \delta_p.$$

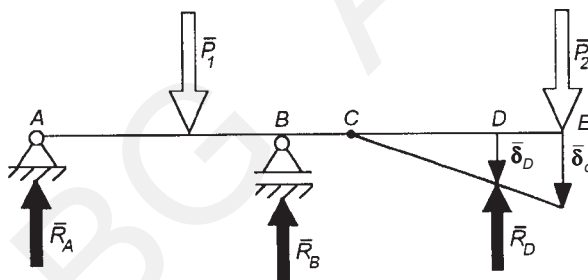


Rys. 3.6.2a

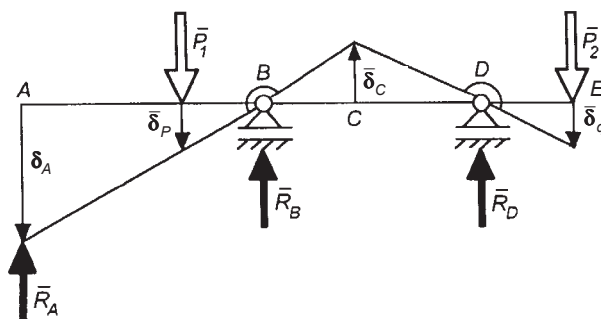
Uwzględniając obliczone przesunięcia w równaniu uzyskanym z zasady prac przygotowanych, obliczono wartość reakcji

$$R_B = \left[ P_1 - P_2 \frac{b(c+d)}{ea} \right] \frac{a}{c}.$$

Postępując analogicznie, tzn. kolejno odrzucając myślowo podpory A i D, otrzymuje się układy obliczeniowe pokazane na rysunkach 3.6.2b i 3.6.2c.



Rys. 3.6.2b



Rys. 3.6.2c

Układając odpowiednie równania z zasady prac przygotowanych oraz zależności geometryczne, otrzymano:

$$P_2 \delta_q - R_D \delta_D = 0, \quad \frac{\delta_q}{\delta_D} = \frac{e+b}{e},$$

$$P_1 \delta_p + P_2 \delta_A - R_A \delta_A = 0, \quad \frac{\delta_p}{\delta_A} = \frac{c-a}{c}, \quad \frac{\delta_p}{\delta_A} = \frac{db}{ce}.$$

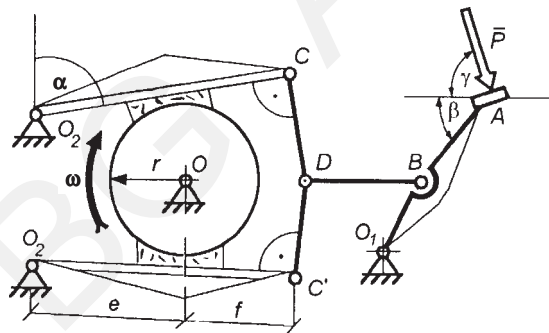
Rozwiązując powyższy układ równań otrzymuje się wartości reakcji:

$$R_A = P_1 \left(1 - \frac{a}{c}\right) + P_2 \frac{bd}{ce}, \quad R_D = P_2 \left(1 + \frac{b}{e}\right).$$

W punkcie  $A$  prosta działania siły reakcji  $\bar{R}_A$  jest prostopadła do osi belki  $AE$  (nie ma składowej poziomej), gdyż układ działających sił jest układem sił równoległych.

### ZADANIE 3.6.3

Na rysunku 3.6.3 pokazano schemat hamulca szczękowego maszyny rotacyjnej. Obliczyć wartość siły  $\bar{P}$  potrzebnej do zahamowania układu. Dane: obroty rotora  $n = 600$  obr/min, współczynnik tarcia szczęk o bęben hamulcowy  $\mu = 0,2$ , promień bębna  $r = 0,2$  m,  $e = 0,2$  m,  $f = 0,8$  m,  $AB = a = 0,6$  m,  $O_1B = b = 0,2$  m,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 75^\circ$ , moment bezwładności rotora wraz z bębniem hamulcowym  $J = 900$  kgm<sup>2</sup>, czas hamowania  $t_h = 40$  s.



Rys. 3.6.3

### Rozwiązanie

Hamowanie maszyny rotacyjnej zachodzi pod wpływem działania na bęben hamulcowy sił tarcia powstających w wyniku docisku szczęk do bębna. Dla wyznaczenia odpowiednich sił tarcia koniecznych do zatrzymania układu w czasie  $t_h$  skorzystano z dynamicznego równania ruchu bębna wraz z rotorem po przyłożeniu do układu sił, jak na rysunku 3.6.3a.

Równanie dynamiczne ruchu ma postać

$$J \cdot \varepsilon = M$$

gdzie  $M = 2Tr$ .

Zakładając, że hamowanie odbywa się ruchem jednostajnie opóźnionym, opóźnienie  $\varepsilon$  wyznacza się z zależności  $\varepsilon = \frac{\omega}{t_h}$ , gdzie  $\omega = \frac{\pi n}{30}$ .

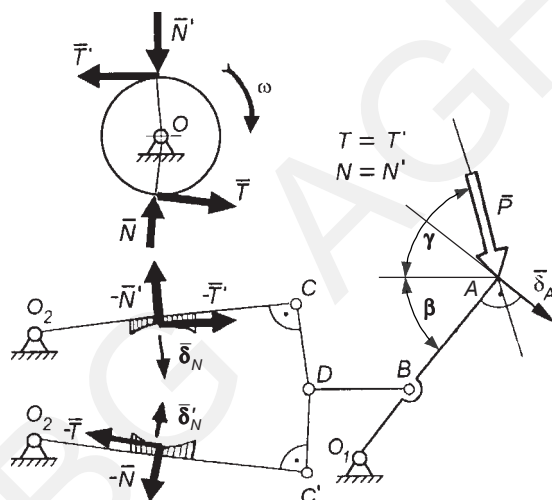
Zatem

$$T = \frac{J_0 \cdot \varepsilon}{2r} = \frac{J_0 \cdot \omega}{2rt_h} = \frac{\pi n J_0}{60rt_h} = \frac{\pi \cdot 600 \cdot 900}{60 \cdot 0.5 \cdot 40} = 450\pi \text{ [N]}.$$

Siły tarcia o tej wartości uzyskuje się wywierając docisk

$$N = \frac{T}{\mu} = \frac{450\pi}{0,2} = 2250\pi \text{ [N]}.$$

Do obliczenia wartości siły  $\bar{P}$  koniecznej do wywarcia obliczonego docisku skorzystano z zasady prac przygotowanych zastosowanej dla układu sił działających na dźwignię układu hamulcowego (rys. 3.6.3a).



Rys. 3.6.3a

Zasada prac przygotowanych ma postać

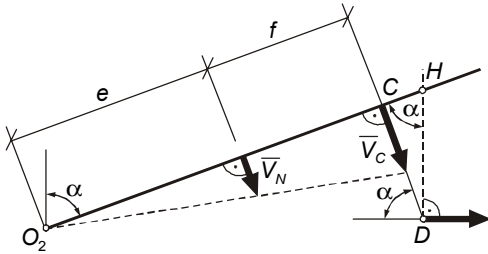
$$\delta L = 0 \rightarrow \delta L \rightarrow \bar{P} \cdot \bar{\delta}_A + 2\bar{N} \cdot \bar{\delta}_N = 0, \quad \delta_N = \delta'_N$$

$$\text{lub } P \cdot \delta_A \cos(\beta + \gamma - 90^\circ) - 2N\delta_N = 0.$$

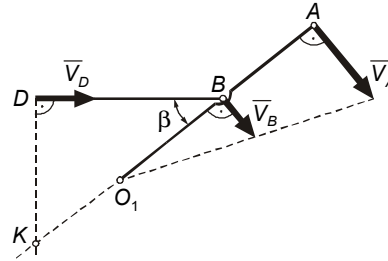
Uwzględniając zależność proporcjonalną pomiędzy przesunięciami przygotowanymi a prędkościami możliwymi, otrzymuje się

$$\frac{\delta_A}{\delta_N} = \frac{v_A}{v_N},$$

gdzie:  $\bar{v}_A$  i  $\bar{v}_N$  są prędkościami punktów przyłożenia sił  $\bar{P}$  i  $\bar{N}$ .



Rys. 3.6.3b



Rys. 3.6.3c

Z zależności kinematycznych otrzymuje się (rys. 3.6.3b i 3.6.3c):

$$\frac{v_C}{e+f} = \frac{v_N}{e} \quad (\text{względem osi obrotu } O_2),$$

$$\frac{v_C}{v_D} = \frac{CH}{DH} \quad (\text{względem chwilowego środka obrotu } H \text{ dźwigni } CD),$$

$$\frac{v_D}{v_B} = \frac{DK}{BK} \quad (\text{względem chwilowego środka obrotu } K \text{ dźwigni } DB \text{ oraz biorąc pod uwagę, że punkt } D \text{ porusza się poziomo}),$$

$$\frac{v_A}{O_1A} = \frac{v_B}{O_1B} \quad (\text{względem osi obrotu dźwigni } O_1A).$$

Uwzględniając, że  $\frac{CH}{DH} = \cos \alpha$ ,  $\frac{DK}{BK} \sin \beta$  z powyższych zależności otrzymano:

$$\frac{v_A}{v_N} = \frac{(a+b)(e+f)}{b \sin \beta \cos \alpha},$$

$$\delta_A = \delta_N \frac{(a+b)(e+f)}{b \sin \beta \cos \alpha},$$

i z zasady prac przygotowanych

$$P = 2N \frac{eb \cos \alpha \cos \beta}{(a+b)(e+f) \sin(\beta + \gamma)}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych obliczono wartość siły  $\bar{P}$  potrzebnej do zahamowania układu w żądanym czasie  $P = 293 \text{ N}$ .

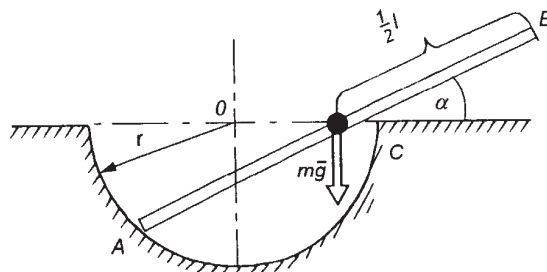
#### ZADANIE 3.6.4

Wyznaczyć kąt  $\alpha$  w położeniu równowagi pręta  $AB$  umieszczonego we wnęce w kształcie półokręgu o promieniu  $r$  (rys. 3.6.4). Pręt obciążony jest masą skupioną o ciężarze  $G$  w środku jego długości  $l$ . Podpory pręta w punktach  $A$  i  $C$  należy traktować jako gładkie – beztarciowe.

#### Rozwiązanie

Możliwy ruch pręta jest ruchem płaskim i w związku z tym rozkład prędkości możliwych i przesunięć przygotowanych jest taki jak na rysunku 3.6.4a.



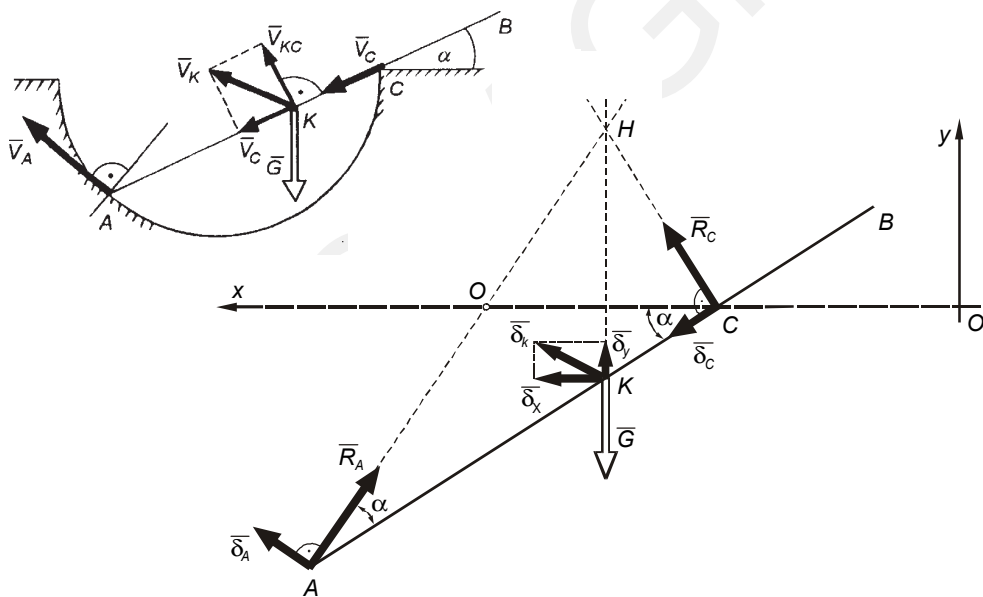


Rys. 3.6.4

Z zasady prac przygotowanych otrzymuje się równanie wektorowe:

$$\delta L = 0 \rightarrow \bar{R}_A \cdot \bar{\delta}_A + \bar{R}_C \cdot \bar{\delta}_C + \bar{G} \cdot \bar{\delta}_y = 0,$$

gdzie  $\bar{\delta}_y$  jest przesunięciem przygotowanym o kierunku siły  $\bar{G}$  (kierunek osi  $y$  na rysunku 3.6.4a), składowym przemieszczeniem przesunięcia  $\bar{\delta}_K$ .



Rys. 3.6.4a

Siły  $\bar{R}_A$  i  $\bar{R}_C$  nie wykonują pracy na przesunięciach  $\bar{\delta}_A$  i  $\bar{\delta}_C$ , ponieważ są one prostopadłe do przesunięć. Otrzymuje się więc równanie skalarne  $G \cdot \bar{\delta}_y = 0$ . Ponieważ  $G \neq 0$ , wobec tego  $\bar{\delta}_y = 0$  i uzależniając przesunięcie  $\bar{\delta}_y$  od wymiarów geometrycznych układu wyznaczyć można szukany kąt  $\alpha$  w położeniu równowagi.

Prędkość punktu  $K$  przyłożenia siły  $\bar{G}$  jest równa

$$\bar{v}_K = \bar{v}_C + \bar{v}_{KC}.$$

Rzutuując to równanie na oś  $y$ , otrzymuje się

$$v_{Ky} = -v_C \sin \alpha + v_{KC} \cos \alpha,$$

gdzie:

$$v_{KC} = \omega_{AB} \cdot KC \quad (\omega_{AB} - \text{prędkość kątowa pręta } AB),$$

$$v_C = \omega_{AB} \cdot CH \quad (H - \text{chwilowy środek obrotu pręta } AB).$$

Uwzględniając, że  $CH = AC \operatorname{tg} \alpha = 2r \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ ,  $KC = AC - \frac{1}{2}l$ , otrzymuje się

$$V_{ky} = \omega_{AB} \left[ \left( 2r \cos \alpha - \frac{1}{2}l \right) l \cos \alpha - 2r \sin^2 \alpha \right].$$

Ponieważ  $\delta_y = k \cdot v_{ky}$  i  $\delta \alpha = k \cdot \omega_{AB}$ , więc

$$\delta_y = \delta \alpha \left[ \left( 2r \cos \alpha - \frac{1}{2}l \right) l \cos \alpha - 2r \sin^2 \alpha \right] = 0.$$

Przyjmując  $\delta \alpha \neq 0$ , otrzymuje się

$$\left( 2r \cos \alpha - \frac{1}{2}l \right) l \cos \alpha - 2r \sin^2 \alpha = 0,$$

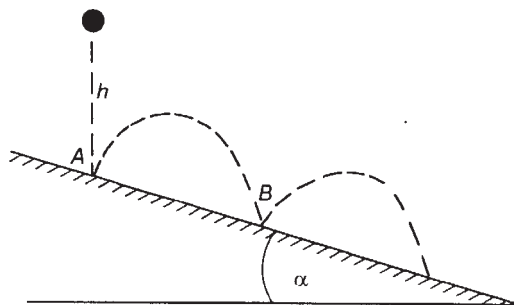
skąd

$$\alpha = \arccos \frac{0,5 \pm \sqrt{0,25l^2 + 32r^2}}{8r}.$$

### 3.7. Podstawy teorii zderzeń

#### ZADANIE 3.7.1

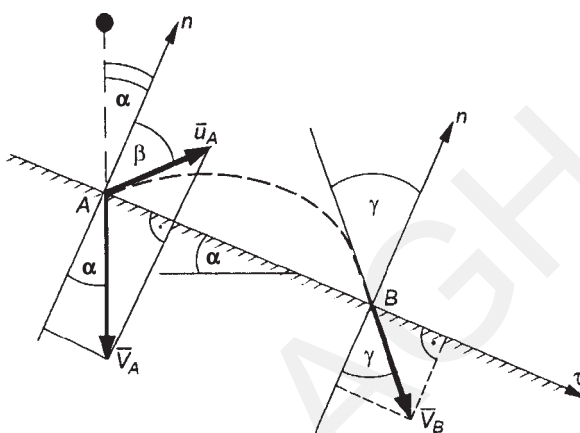
Kulka wykonana z twardego drewna spada z wysokości  $h = 1$  m na pochyłą płytę o kącie  $\alpha = 30^\circ$  (rys. 3.7.1). Wyznaczyć kąt padania kulki dla drugiego odbicia, jeżeli współczynnik restytucji wynosi  $R = 0,5$ . Przyspieszenie ziemskie przyjąć jako  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Rys. 3.7.1

**Rozwiązanie**

Kąt padania  $\gamma$  (rys. 3.7.1a) można wyznaczyć, obliczając prędkość padania  $\bar{v}_B$  drugiego odbicia w punkcie  $B$ . Prędkość  $\bar{v}_B$  wyznacza się, korzystając z równań ruchu punktu o masie  $m$  pomiędzy pierwszym a drugim odbiciem, przy czym prędkością początkową w tym ruchu jest prędkość  $\bar{u}_A$  po pierwszym odbiciu (rys. 3.7.1a). Prędkość po zderzeniu w punkcie  $A$  obliczono z zależności  $u_A = \sqrt{u_{An}^2 + u_{A\tau}^2}$ , gdzie  $\bar{u}_{An}$  i  $\bar{u}_{A\tau}$  są rzutami prędkości  $\bar{u}_A$  na kierunek normalny i styczny (rys. 3.7.1a).



Rys. 3.7.1a

Zgodnie z teorią zderzenia, składowe styczne prędkości przed i po odbiciu są sobie równe. Oznaczając prędkość przed odbiciem przez  $\bar{v}_A$ , otrzymuje się

$$u_{A\tau} = v_{A\tau} = v_A \sin \alpha.$$

Prędkość normalna po odbiciu zależy od rodzaju zderzenia, tj. od tego czy zderzenie jest czysto plastyczne ( $R = 0$ ), plastyczno-sprężyste ( $0 < R < 1$ ), czy czysto sprężyste ( $R = 1$ ). W przypadku zderzenia plastyczno-sprężystego kulki o masie  $m$  z nieruchomą powierzchnią, prędkość po odbiciu oblicza się z zależności

$$u_{An} = u_{pn} + R(u_{pn} - v_{An}),$$

gdzie  $\bar{u}_{pn}$  jest rzutem na normalną  $n$  wspólnej prędkości obu zderzających się mas po pierwszej fazie zderzenia (obie masy, odkształcając się plastycznie, poruszają się wspólnie do momentu rozłączenia się),  $\bar{v}_{An}$  jest składową normalną prędkości  $\bar{v}_A$  przed zderzeniem.

W rozpatrywanym przypadku  $u_{pn} = 0$  (płyta, o którą uderza kulka, jest nieruchoma),  $v_{An} = -v_A \cos \alpha$ ,  $u_{An} = -Rv_{An} = Rv_A \cos \alpha$ .

Prędkość przed zderzeniem w punkcie  $A$  obliczyć można z zależności dla spadku swobodnego, tj.  $v_A = \sqrt{2gh}$ .

Prędkość po zderzeniu w punkcie  $A$  jest równa

$$u_A = \sqrt{v_A^2 \sin^2 \alpha + R^2 v_A^2 \cos \alpha} = v_A^2 \sqrt{\sin^2 \alpha + R^2 \cos \alpha},$$

a po podstawieniu danych liczbowych  $u_A = 2,95$  m/s.

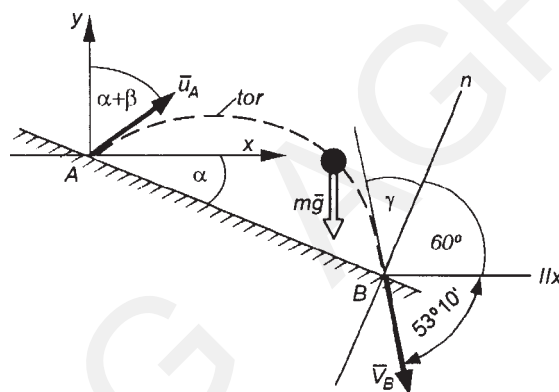
Kąt  $\beta$  odbicia wyznaczono z zależności:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u_{A\tau}}{u_{An}} = \frac{v_A \sin \alpha}{R v_A \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{R}, \quad \beta = 49^\circ 5'.$$

Dynamiczne równania ruchu kulki o masie  $m$  pomiędzy pierwszym a drugim odbiciem mają postać (rys. 3.7.1b):

$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\ddot{y} = -mg.$$



Rys. 3.7.1b

Przyjmując warunki początkowe ruchu:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = u_A \sin(\alpha + \beta), \quad \dot{y} = u_A \cos(\alpha + \beta),$$

oraz całkując równania dynamiczne, otrzymuje się po podstawieniu danych liczbowych:

$$\dot{x} = 2,9, \quad \dot{y} = -10t + 0,56,$$

$$x = 2,9t, \quad y = 5t^2 + 0,56t.$$

Rugując z ostatnich równań czas  $t$ , otrzymuje się równanie toru

$$y = -0,594x^2 + 0,193x.$$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$  ma postać

$$y = -(\operatorname{tg} \alpha)x, \quad \text{tj.} \quad y = -0,577x.$$

Porównując powyższe równanie z równaniem toru, otrzymuje się współrzędne  $x$ -owe punktów  $A$  i  $B$ ;  $x_A = 0$ ,  $x_B = 1,29$  m, a następnie podstawiając obliczoną współrzędną  $x_B$  do równania  $x = 2,9t$ , obliczono czas lotu kulki od punktu  $A$  do  $B$ ;  $t_B = 0,444$  s.

Wyznaczając dla obliczonego czasu  $t_B$  wartości  $\dot{x}$  i  $\dot{y}$ , otrzymuje się prędkość upadku kulki w punkcie  $B$ :

$$\dot{x}_B = 2,9 \text{ m/s}, \quad \dot{y}_B = -3,88 \text{ m/s},$$

$$v_b = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{(2,9)^2 + (-3,88)^2} = 4,94 \text{ m/s},$$

$$\cos(x, \bar{v}_B) = \frac{\dot{x}}{v_B} = \frac{2,9}{4,84} = 0,599, \quad (x, \bar{v}_B) = 53^\circ 10'.$$

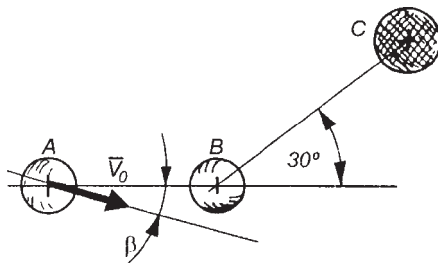
Korzystając z rysunku 3.7.1b wyznaczono kąt  $\gamma$  padania dla drugiego odbicia:

$$\gamma = 180^\circ - (60^\circ + 53^\circ 10') = 66^\circ 50'.$$

Wyznaczając w punkcie  $B$  kąt odbicia oraz prędkość po zderzeniu, można, postępując analogicznie, wyznaczyć kąt padania i prędkość padania dla trzeciego zderzenia itd.

### ZADANIE 3.7.2

Dwie kule  $A$  i  $B$  z kości słoniowej o promieniach  $r = 6$  cm znajdują się w odległości  $AB = l = 10$  cm (rys. 3.7.2). Pod jakim kątem  $\beta$  należy nadać kuli  $A$  minimalną prędkość początkową  $\bar{v}_0$ , tak aby uderzyła ona o kulę  $B$  i spowodowała przetoczenie się kuli  $B$  do otworu  $C$  leżącego w odległości  $BC = 32$  cm. Współczynnik restytucji  $R = 0,89$ , przyspieszenie ziemskie  $g \cong 10 \text{ m/s}^2$ , masy kul  $m_A = m_B = m = 0,2$  kg, siła oporu toczenia działająca na każdą z kul równa jest  $\frac{1}{40}$  jej siły ciężkości.



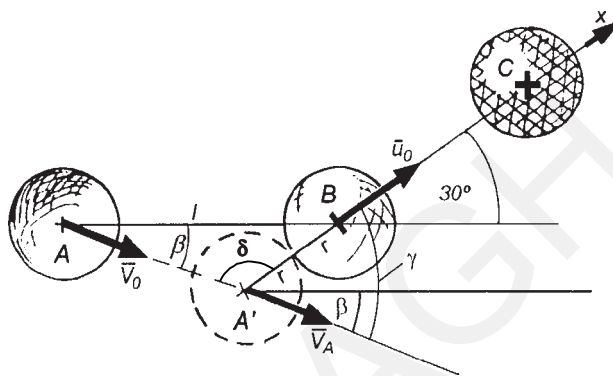
Rys. 3.7.2

**Rozwiązanie**

Minimalną prędkość  $\bar{u}_0$  kuli  $B$  w punkcie  $B$ , konieczną do przebycia drogi  $BC$ , tak aby kula ta wpadła do otworu  $C$  z teoretyczną zerową prędkością, wyznaczono pisząc dynamiczne równania ruchu kuli  $B$  (rys. 3.7.2a)

$$m \frac{du}{dt} = \frac{1}{40} mg,$$

gdzie  $u$  jest prędkością kuli o masie  $m$ .



Rys. 3.7.2a

Warunki początkowe ruchu mają postać:  $t = 0, u = u_0, x = 0$ .

Całkując równania dynamiczne i korzystając z warunków początkowych otrzymuje się:

$$u = -0,25t + u_0,$$

$$x = -0,125t^2 + u_0t.$$

Zakładając zerową prędkość w punkcie  $C$ , odpowiadającą przebytej drodze  $s = BC = 0,32$  m, z powyższych równań otrzymuje się prędkość kuli  $B$  w punkcie  $B$   $u_0 = 0,4$  m/s.

Prędkość kuli  $A$  przed zderzeniem, potrzebną do nadania kuli  $B$  prędkości  $\bar{u}_0$  po zderzeniu, obliczyć można na podstawie teorii zderzenia środkowego. Impuls siły zderzenia musi mieć kierunek pokrywający się z odcinkiem  $BC$ . Oznacza to, że środki mas obu kul w czasie zderzenia muszą leżeć na tym kierunku. Na rysunku 3.7.2a przyjęto oś  $x$  pokrywającą się z tym kierunkiem (oś normalna w punkcie styku kul). Prędkość kuli  $B$  po zderzeniu oblicza się z zależności

$$u_{Bx} = u_0 = \frac{(m_B + Rm_A)v_{Bx} + (1 + R)m_A v_{Ax}}{m_A + m_B},$$

gdzie:

$v_{Ax} = v_A \cos \gamma = v_A \cos(\beta + 30^\circ)$  jest składową normalną prędkości kuli  $A$  przed zderzeniem,

$v_{Bx} = 0$ , ponieważ przed zderzeniem kula  $A$  była w spoczynku.

Kąt  $\beta$  obliczyć można z zależności (rys. 3.7.2a):

$$\frac{\sin \beta}{2r} = \frac{\sin \delta}{AB}, \quad \delta = 180 - (\beta + 30^\circ).$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$\beta = 17^\circ, \quad v_{Ax} = 0,682v_A \quad \text{oraz} \quad u_0 = 0,644v_A, \quad \text{skąd} \quad v_A = 0,62 \text{ m/s}.$$

Zatem kula  $A$  musi mieć przed zderzeniem prędkość o wartości  $v_A = 0,62$  m/s, którą uzyskać można, nadając odpowiednią prędkość  $\bar{v}_0$  w punkcie  $A$ .

Prędkość  $\bar{v}_0$  obliczyć można, wykorzystując dynamiczne równanie ruchu kuli  $A$  na przemieszczeniu od  $A$  do  $A'$

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{40} mg.$$

Przyjmując warunki początkowe ruchu:  $t = 0$ ,  $v = v_0$ ,  $s = 0$ , po scałkowaniu otrzymuje się:

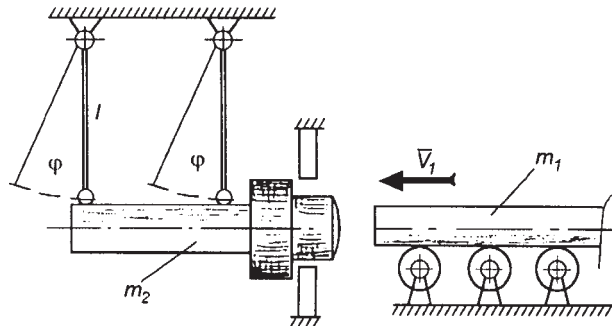
$$v = -0,25t + v_0, \quad s = -0,125t^2 + v_0t.$$

Podstawiając do powyższych równań  $v = v_A$  oraz  $s = AA' = 2r \frac{\sin 30^\circ}{\sin \beta}$  (drogę  $s = AA'$  obliczono z twierdzenia sinusów), obliczono minimalną prędkość  $v_0 = 0,72$  m/s, taką aby kula  $B$  wpadła do otworu  $C$  z zerową prędkością.

Ponieważ kule są gładkie, więc impulsy zderzenia na kierunku stycznym w punkcie zderzenia pominięto.

### ZADANIE 3.7.3

Na końcu technologicznej linii zgrzewania rur (rys. 3.7.3) zamontowany jest wahadłowy zderzak służący do wyhamowywania rur. Przyjmując zderzenie rury z wahadłem jako sprężysto-plastyczne o współczynniku restytucji  $R = 0,8$ , wyznaczyć masę wahadła  $m_2$ , tak aby rura o masie  $m_1 = 20$  kg (tzn. o długości 5 m przy 4 kg/m) ulegała wyhamowaniu przy jej prędkości transportowania  $v_1 = 2$  m/s. Wyliczyć kąt wychylenia wahadła po zderzeniu, jeżeli jego ciężna mają długość  $l = 1$  m.



Rys. 3.7.3

**Rozwiązanie**

Masę wahadła  $m_2$  dobrać można na podstawie wzorów na prędkości mas po zderzeniu prostym centralnym. Masa  $m_2$  jest wprawdzie nieswobodna, ale w krótkotrwałym zderzeniu, siły w cięgnach są prawie prostopadłe do kierunku jej ruchu. Przy niewielkim odchyleniu lin wpływ tych sił można pominąć, zwłaszcza w porównaniu do sił zderzenia. Ruch zderzaka w czasie zderzenia można traktować wobec powyższego jako ruch postępowy prostoliniowy, a zderzak jako punkt materialny. Zatem prędkość masy  $m_1$  po zderzeniu zapisać można

$$u_1 = \frac{(m_1 - Rm_2)v_1 + (1 + R)m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Przed zderzeniem masa  $m_2$  była w spoczynku, więc  $v_2 = 0$ , natomiast z faktu wyhamowania masy  $m_1$  wynika, że jej prędkość po zderzeniu  $u_1 = 0$ .

Stąd

$$u_1 = \frac{(m_1 - Rm_2)v_1}{m_1 + m_2} = 0 \quad \text{i} \quad m_2 = \frac{m_1}{R}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych obliczono masę zderzaka  $m_2 = 25$  kg. Prędkość zderzaka po zderzeniu wyznaczono ze wzoru

$$u_2 = \frac{(m_1 - Rm_1)v_2 + (1 + R)m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Podstawiając  $v_2 = 0$ , obliczoną masę  $m_2 = 25$  kg oraz pozostałe dane liczbowe, otrzymano  $u_2 = 1,6$  m/s.

Pomijając opory ruchu zderzaka wahadłowego, kąt wychylenia wahadła po zderzeniu obliczono z zasady zachowania energii mechanicznej, tj.  $E_I + V_I = E_{II} + V_{II}$ .



Położenie I jest położeniem zderzaka w momencie rozpoczęcia ruchu z prędkością  $u_2$  (w tym położeniu przyjęto poziom energii potencjalnej równej zero), a położenie II jest końcowym położeniem wahadła po jego zatrzymaniu się.

Tak więc:

$$E_I = \frac{1}{2} m_2 u_2^2, \quad V_I = 0, \quad E_{II} = 0, \quad V_{II} = m_2 g l (1 - \cos \varphi)$$

i

$$\frac{1}{2} m_2 u_2^2 = m_2 g l (1 - \cos \varphi),$$

skąd

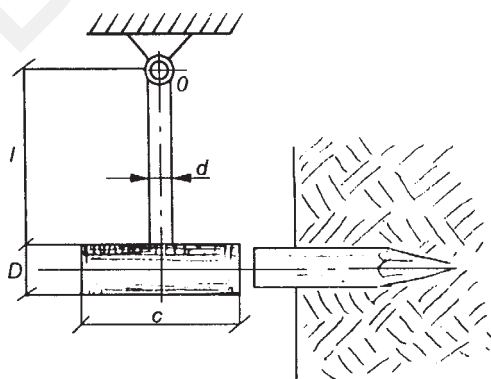
$$\cos \varphi = 1 - \frac{u_2^2}{2gl}.$$

Po uwzględnieniu danych liczbowych otrzymano  $\varphi = 29^\circ 18'$ .

Przyjęcie przez wahadło ponownego uderzenia w cyklu technologicznym wiąże się z ustawieniem zderzaka w pierwotnym położeniu. Położenie takie zapewnić można przez odpowiednie rozwiązanie konstrukcyjne urządzenia.

#### ZADANIE 3.7.4

Wahadłowy młot do wbijania poziomych pali składa się z trzonka o długości  $l = 1,68$  m oraz cylindrycznego bijaka o średnicy  $D$  i długości  $c$  (rys. 3.7.4). Trzonek wykonany jest z pręta stalowego o średnicy  $d = 3$  cm i masie jednostki długości  $m_0 = 5,5$  kg/m. Dobrać wymiary bijaka tak, aby w osi obrotu  $O$  nie powstawały reakcje impulsowe.



Rys. 3.7.4

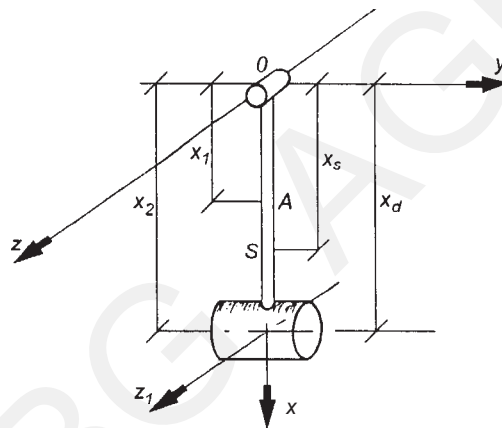
**Rozwiązanie**

W osi obrotu  $O$  nie powstaną reakcje impulsowe, jeżeli kierunek siły impulsowej w procesie zderzenia pokrywać się będzie z prostą przechodzącą przez tzw. środek uderzenia. Odległość środka uderzenia od osi obrotu zależy od rozkładu masy elementów młota i od jej wielkości. Odległość tę obliczyć można na podstawie wzoru

$$x_d = \frac{J_z}{m \cdot x_s},$$

gdzie:

- $J_z$  – moment bezwładności młota względem osi obrotu młota,
- $m$  – masa młota,
- $x_s$  – odległość środka masy młota od osi obrotu (rys. 3.7.4a).



Rys. 3.7.4a

Obliczenia przeprowadzono tak, aby oś bijaka (cylindra) była osią środka uderzeń. Współrzędną  $x_s$  środka masy obliczyć można na podstawie wzoru:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad m_1 + m_2 = m,$$

gdzie:

$$x_1 = \frac{1}{2}l,$$

$$x_2 = x_d \text{ (wobec założenia odnośnie osi środka uderzeń),}$$

$m_1, m_2$  – masy odpowiednio trzonka i bijaka.

Podstawiając  $x_s$  do wzoru  $x_d$ , otrzymano

$$x_d = \frac{J_z}{m_1 x_1 + m_2 x_2}.$$

Uwzględniając, że:

$$x_1 = \frac{1}{2}l, \quad x_2 = x_d = l + \frac{1}{2}D, \quad m_1 = m_0 l, \quad m_2 = \frac{\pi D^2}{4}c \cdot \rho = \frac{\pi D^2}{4}c \cdot \frac{\gamma}{g},$$

$$J_z = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}m_1 l^2 + J_{z_1} + M_2 x_2^2 = \frac{1}{3}m_0 l^3 + \frac{1}{12}m_2 \left( \frac{3}{4}D^2 + c^2 \right) + m_2 \left( l + \frac{1}{2}D \right)^2,$$

otrzymano po przekształceniach równanie

$$\frac{\pi \gamma}{24g} D^2 c^3 + \frac{\pi \gamma}{32g} D^4 c - l^2 \left( \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}D \right) m_0 = 0.$$

Z równania dla danego materiału młota dobrać można parametry geometryczne młota.

Podstawiając dane liczbowe oraz przyjmując średnicę bijaka  $D = 0,36$  m, otrzymano równanie

$$13,3c^3 + 1,29c - 11,48 = 0,$$

z którego wyznaczono długość bijaka  $c = 0,91$  m, taką aby oś bijaka pokrywała się z osią przechodzącą przez środek uderzenia i aby w łożysku młota nie powstawały podczas uderzeń reakcje dynamiczne.

## Literatura

- [1] Bat M.I., Dżanielidze T.J., Kelzon A.C.: *Teorieticzeskaja miechanika w primierach i zadaczach*. Cz. I, II, III, Moskwa, Izd. Nauka 1966
- [2] Beer F.P., Russel Johnston Jr. F.: *Vector Mechanics for Engineers*. USA, TA 350, B3552, McGraw-Hill 1977
- [3] Engel Z., Giergiel J.: *Mechanika ogólna*. T. I, II, Warszawa, PWN 1990
- [4] McGill D.J., King W.W.: *Engineering Mechanics Statics*. Boston, USA, PWS Publishers, 20 Park Plaza 1985
- [5] McGill D.J., King W.W.: *Engineering Mechanics: An Introduction to Dynamics*. Boston, USA, PWS Publishers, 20 Park Plaza 1989
- [6] McGill D.J., King W.W.: *Engineering Meehanics: Statics and Introduction to Dynamics*. Boston, USA, PWS Publishers, 20 Park Plaza 1989
- [7] Giergiel J.: *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej z odpowiedziami*. Skrypt AGH nr 691, Kraków, 1980
- [8] Giergiel J., Uhl T.: *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej*. Warszawa, PWN 1987
- [9] Kowalski J.: *Zbiór zadań z mechaniki z zastosowaniem do obliczania elementów maszyn*. Warszawa, PWN 1980
- [10] Miescerskij I.W.: *Zbiór zadań z mechaniki*. Tłum. z ros., Warszawa, PWN 1971
- [11] Nizioł J.: *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*. Warszawa, PWN 1980
- [12] *Sbornik zadacz po teorieticzeskoj miechanikie*, pod. ried. K.C. Koliesnikowa, Moskwa, Izd. Nauka 1983