Zdzisław Iwulski

WYZNACZANIE SIŁ TNĄCYCH I MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W BELKACH

Zadania z rozwiązaniami

BG AGH

SU 1611

SKRYPTY UCZELNIANE
AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Zdzisław Iwulski

WYZNACZANIE SIŁ TNĄCYCH I MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W BELKACH

Zadania z rozwiązaniami

AGH UCZELNIANE WYDAWNICTWA NAUKOWO-DYDAKTYCZNE KRAKÓW 2001

1611 pozycja wydawnictw naukowych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2001
ISSN 0239-6114

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. inż. Henryk Filcek*

BG AGH

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie: *Danuta Harnik*

Korekta: *Danuta Harnik*

Skład komputerowy: „Andre”, tel. 423-10-10

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
tel. 617-32-28, tel./fax 636-40-38

Spis treści

Przedmowa 7
1. Ogólne zagadnienia o zginaniu 9
1.1. Sposoby podparcia belek 9
1.2. Czyste zginanie 12
2. Zadania z rozwiązaniami 17
Literatura 183

BG AGH

BG AGH

Przedmowa

Niniejszy skrypt przeznaczony jest dla studentów, którzy mają w programie studiów przedmiot „Wytrzymałość materiałów” i pragną poznać sposób wyznaczania momentów gnących i sił tnących przy rozwiązywaniu belek.

Autor pragnął uczynić podręcznik wygodnym środkiem do nauki rozwiązywania belek i przedstawił sposób postępowania przy ich rozwiązywaniu. Każde zadanie poprzedzone jest treścią i rysunkiem, a następnie każdorazowo został przedstawiony tok postępowania przy prawidłowym ich rozwiązywaniu.

Treść podręcznika podzielono na dwie części, pierwszą podającą w sposób bardzo skrótowy teorię zginania belek statycznie wyznaczalnych, a w drugiej przedstawiono w sposób bardzo przystępny ich rozwiązywanie.

Przy pisaniu tego skryptu korzystałem z istniejącej literatury i zebrałem tam materiały do napisania niniejszego skryptu.

Jeżeli skrypt ten spełni zamierzone przez mnie zadanie i ułatwi czytelnikowi i studiującym poznanie tej pięknej i wciąż żywej dziedziny nauki, jaką jest wytrzymałość materiałów – a szczególnie rozwiązywanie belek – stanowić to będzie dla mnie najmilszą nagrodę.

Autor

BG AGH

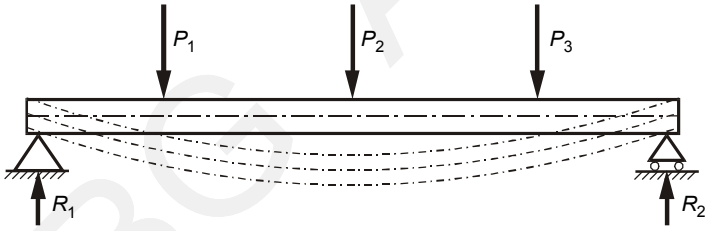
BG AGH

1. Ogólne zagadnienia o zginaniu

1.1. Sposoby podparcia belek

Zginanie zachodzi wówczas, gdy siły działające na pręt sprowadzają się do dwóch par leżących w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pręta lub w płaszczyźnie równoległej do niej. Zginanie proste zachodzi tylko w pierwszym przypadku; drugi należy do zagadnień wytrzymałości złożonej. Pręty zginane nazywamy belkami. Siły działające na belki dzielą się na dwa rodzaje:

1) obciążenia,
2) reakcje podpór.



Rys. 1.1

Jeżeli rozpatrzymy belkę o przekroju symetrycznym (rys. 1.1), na którą działają siły zewnętrzne P_1, P_2 i P_3 oraz reakcje R_1 i R_2 leżące w płaszczyźnie symetrii belki, to pod działaniem tych sił belka ugnie się w taki sposób, że oś jej pozostanie po ugięciu się nadal w płaszczyźnie działania sił zewnętrznych. Płaszczyznę tę nazywamy płaszczyzną zginania, taki zaś przypadek zginania nazywamy zginaniem płaskim.

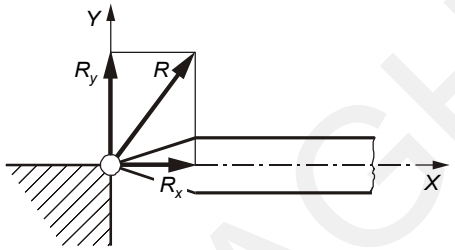
Siły zewnętrzne obciążające belkę mogą się sprowadzać do sił skupionych lub do par, mogą to być również obciążenia ciągłe rozłożone równomiernie lub nierównomiernie wzdłuż belki.

Podpory bywają trzech rodzajów:

1) podpora przegubowa stała,
2) podpora przegubowa ruchoma,
3) utwierdzenie.

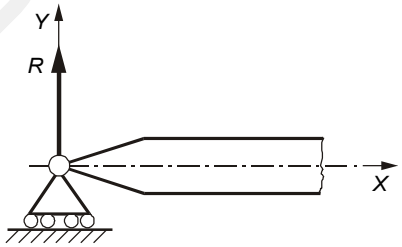
BG AGH

Podpora przegubowa stała pozwala na obrót końca belki dookoła osi przegubu, nie dopuszcza natomiast przesuwu końca belki ani w kierunku jej osi, ani w kierunku prostopadłym do niej. Reakcja przechodzi tu przez środek przegubu i leży w płaszczyźnie zginania, kierunek jej jest nam jednak nieznany. Zamiast wyznaczania wielkości reakcji i kąta α, który tworzy ona z osią belki, wygodniejsze jest rozłożenie reakcji na dwie składowe – poziomą i pionową wzdłuż osi prostokątnego układu współrzędnych, którego początek przyjmujemy na lewym końcu belki. Wówczas oś x pokrywa się z osią belki, oś y zaś jest skierowana do góry. Mamy wówczas dwie reakcje nieznane pod względem wielkości, lecz o znanych kierunkach. Na podporze przegubowej stałej są zatem zawsze dwie niewiadome R_x i R_y. Schematycznie będziemy przedstawiali podporę przegubową stałą tak jak na rysunku 1.2.



Rys. 1.2

Podpora przegubowa ruchoma różni się od podpory stałej tym, że jest umieszczona na rolkach. Pozwala ona na obrót końca belki dookoła osi przegubu oraz na jego przesuw w kierunku końca belki, umożliwia natomiast przesuw w kierunku prostopadłym do osi belki. Reakcja na podporze ruchomej przechodzi przez środek przegubu i jest prostopadła do osi belki. Mamy tu zatem tylko jedną niewiadomą R. Schemat podpory przegubowej ruchomej przedstawiono na rysunku 1.3.



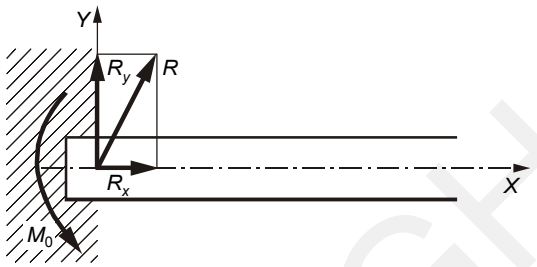
Rys. 1.3

Utwierdzenie nie pozwala ani na obrót końca belki, ani na przesuw w żadnym kierunku. Obrotowi przeszkadza tu para sił, którą utwierdzenie wywiera na belkę. Moment tej pary nazywamy momentem utwierdzenia, jest on nieznany podobnie jak nieznana jest również co do wielkości i kierunku reakcja w miejscu utwierdzenia. Reakcję

tę rozkładamy na dwie składowe – prostopadłą i równoległą do osi belki, o znanych kierunkach, lecz nieznanych wielkościach. W miejscu utwierdzenia mamy zatem trzy nieznane reakcje:

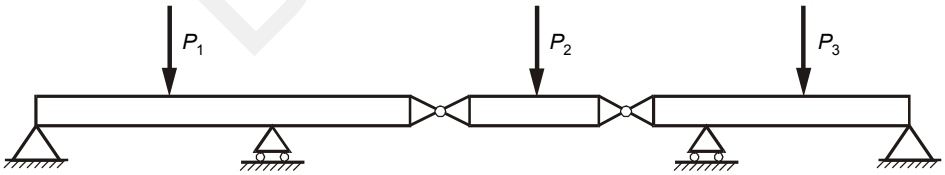
1) moment utwierdzenia M_0,
2) reakcję poziomą R_x,
3) reakcję pionową R_y.

Utwierdzony koniec belki przedstawiamy schematycznie tak, jak na rysunku 1.4.



Rys. 1.4

W celu wyznaczenia niewiadomych reakcji musimy korzystać ze statycznych warunków równowagi (siły czynne + reakcje). Dla płaskiego układu sił jest ich trzy: dwa równania sumy rzutów sił na osie układu i jedno równanie momentów względem dowolnego punktu. Zazwyczaj belki posiadają kierunek poziomy, a siły pionowy – wtedy liczba równań redukuje się do dwóch, ponieważ rzut każdej siły na osi poziomej x jest równy zeru. Jeżeli liczba niewiadomych reakcji jest równa lub mniejsza od liczby statycznych równań, reakcje dadzą się wyznaczyć (belka jest statycznie wyznaczalna). W wypadku gdy liczba niewiadomych jest większa od możliwej ilości równań statyki, wówczas belka staje się statycznie niewyznaczalna.



Rys. 1.5

Oprócz wymienionych belek występują belki ciągłe przegubowe (rys. 1.5). Rozpatrujemy w takich wypadkach najpierw warunki równowagi belek podwieszonych i znajdujemy reakcje tak, jak to się robi przy belkach na dwóch podporach. Oddziaływania te przenoszą się poprzez przeguby z belek podwieszonych na belki podstawowe. Znając wielkości oddziaływań w przegubach możemy wyznaczyć reakcje belek podstawowych.

BC AGH

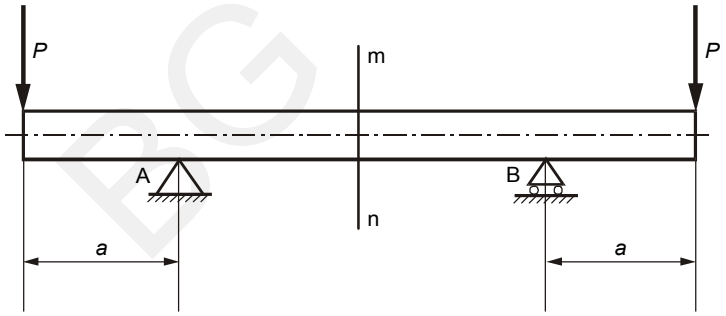
1.2. Czyste zginanie

Załóżmy, że pręt spoczywający na dwóch podporach obciążony jest równymi siłami P tak jak na rysunku 1.6. Przyjmujemy symetryczny przekrój pręta, przy czym siły P działają w płaszczyźnie symetrii. Zgięcie polega na tym, że pierwotnie prosta oś pręta ulega zakrzywieniu, a poprzeczne przekroje – pierwotnie do siebie równoległe ulegają pochyleniu. Dla znalezienia sił wewnętrznych w pręcie poprowadzimy między podporami dowolny przekrój m–n i odrzucając lewą część pręta, zastąpimy oddziaływanie jej na prawą siłami wewnętrznymi, przyłożonymi w poprowadzonym przekroju.

Aby pozostała prawa część belki znajdowała się w równowadze, siły wewnętrzne w przekroju m–n muszą sprowadzać się do układu równoważnego układowi działającemu na odrzuconą część lewą, a więc do pary sił. Przypadek, kiedy siły zewnętrzne redukują się wyłącznie do pary sił, określamy nazwą czystego zgięcia. Ze statycznych warunków równowagi wynika zatem, że siły wewnętrzne w przekroju sprowadzają się do pary sił o momencie

$$M = Pa.$$

Zginanie, przy którym oś belki po odkształceniu pozostaje w płaszczyźnie działania sił zewnętrznych, nazywamy zginaniem płaskim. O sposobie rozłożenia sił wewnętrznych w przekroju będziemy mogli wnosić na podstawie analizy odkształcenia pręta.

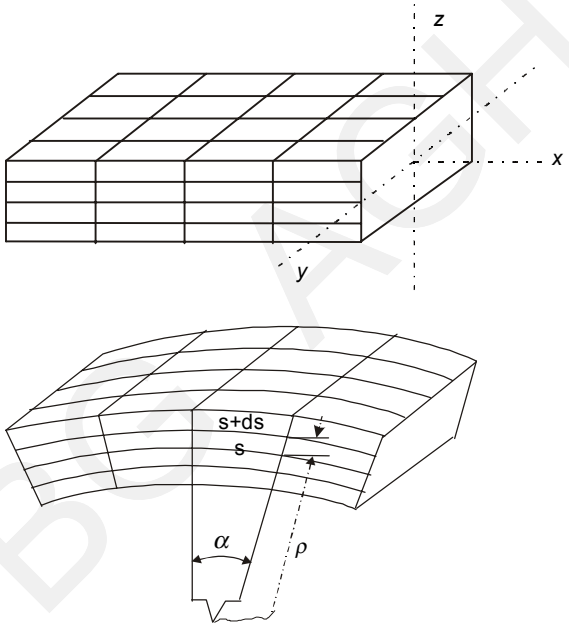


Rys. 1.6

Otóż, jeżeli poddamy zgięciu pręt kauczukowy o przekroju prostokątnym, na którym wyrysowano siatkę linii prostych na wszystkich czterech ścianach (tzn. bocznych) oraz górnej i dolnej tak, jak na rysunku 1.7, to po odkształceniu zauważymy, że:

- linie podłużne na ścianach bocznych zakrzywiają się pozostając prostopadłymi do linii poprzecznych;
- linie poprzeczne na ściankach bocznych, pierwotnie do siebie równoległe, nachylając się ku sobie, pozostają jednak liniami prostymi;

– linie obwodowe wyrysowane na powierzchni górnej, dolnej i obu bocznych, leżące początkowo w jednej płaszczyźnie, pozostają nadal w tej płaszczyźnie pomimo pewnego odchylenia kątowego całej płaszczyzny, co nasuwa przypuszczenie, że i pomyślane w tej płaszczyźnie linie, leżące wewnątrz pręta, pozostaną w tej samej płaszczyźnie;
– paski podłużne, na jakie podzielona jest górna ścianka pręta, ulegają przy zgięciu wydłużeniu i zwężeniu, natomiast paski na ściance dolnej (wklęsłej) rozszerzają się, a długość ich maleje. Pomiar tych odkształceń podłużnych i poprzecznych wykazuje, że stosunek ich odpowiada liczbie Poissona;
– odkształcenia włókien w tej samej płaszczyźnie poziomej są jednakowe. Wskutek tego normalne naprężenia zmieniające się wzdłuż wysokości przekroju pozostają stałe na jego szerokości.



Rys. 1.7

Opierając się na tych spostrzeżeniach możemy ustalić podstawowe założenia dla teorii zgięcia.

– Przekroje poprzeczne pręta poddanego czystemu zginaniu pozostają płaskie; zachodzi to wtedy, gdy długość belki jest przynajmniej pięć razy większa od jej wysokości.
– Włókna belki wywierają na siebie pewne naciski, są one jednak tak małe, że można je pominąć.
– Materiał podlega prawu Hooke'a, przy czym moduł sprężystości E jest jednakowy dla rozciągania i ściskania.

BRAK

Obserwując zgiętą postać pręta zauważymy, że podłużne włókna po stronie wypukłej ulegają wydłużeniu, a po stronie wklęsłej skróceniu. Z tego wynika, iż w środku pręta istnieje warstwa, której długość przy zgięciu nie ulega zmianie. Jest to tzw. warstwa obojętna. Włókna podłużne na zewnątrz tej warstwy ulegają wydłużeniu i zwężeniu, natomiast włókna podłużne po stronie wewnętrznej ulegają skróceniu i poprzecznemu rozszerzeniu. Dlatego prostokątny przekrój belki zmienia się na trapezowy, gdzie krótszy bok jest po stronie wypukłej pręta, a dłuższy po stronie wklęsłej.

Dla znalezienia naprężeń w dowolnym przekroju poprowadzonym w odległości x od lewej podpory, odrzucamy lewą część belki zastępując jej oddziaływanie na prawą siłami wewnętrznymi, mającymi punkty zaczepienia w danym przekroju. Siły wewnętrzne muszą stanowić układ równoważny układowi sił działających na lewą część pręta. Układ ten redukujemy do jednej siły przechodzącej przez środek poprowadzonego przekroju oraz do pary sił.

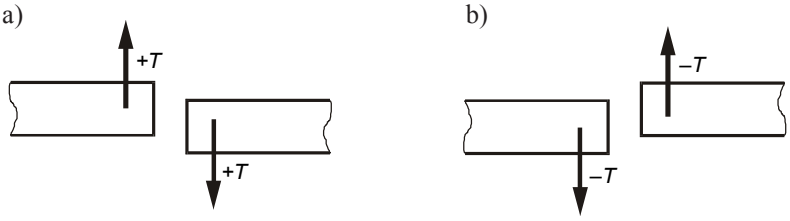
Ogólnie możemy powiedzieć, że siła tnąca w dowolnym przekroju belki równa się sumie algebraicznej sił zewnętrznych działających na belkę po jednej stronie rozpatrywanego przekroju, a działający moment gnący równa się sumie algebraicznej momentów (względem tego przekroju) sił zewnętrznych działających po jednej stronie tego przekroju. Jest to tzw. moment zginający.

Siły tnące i momenty gnące uzależniamy od sił zewnętrznych działających po lewej stronie rozpatrywanego przekroju. Jednak z warunków równowagi wynika, że można je uzależnić od sił działających po prawej stronie danego przekroju i łatwo sprawdzić, że otrzymane wyniki dla siły tnącej i momentu gnącego byłyby wówczas takie same co do wartości, tylko z przeciwnymi znakami. Wynikiem działania momentu zginającego są naprężenia normalne w przekroju poprzecznym belki, natomiast w wyniku działania siły poprzecznej powstają w przekroju naprężenia styczne, czyli ścinające. Naprężenia ścinające występują również w przekrojach równoległych do podłużnej osi belki.

Znaki sił tnących i momentów gnących przyjmujemy według następującej umowy:

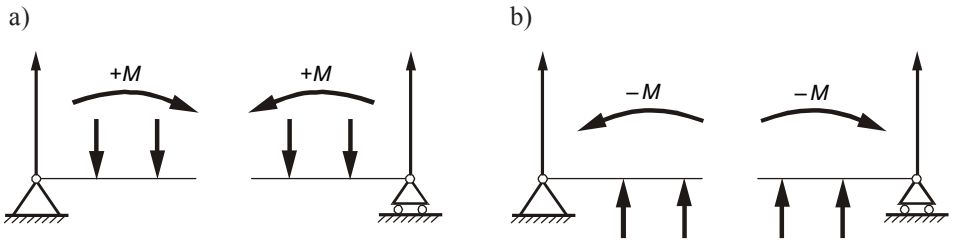
- siła tnąca jest dodatnia, jeżeli dąży do podniesienia lewej części belki,
- siła tnąca jest ujemna, gdy dąży do jej opuszczenia (rys. 1.8).

Względem prawej części belki siła tnąca jest dodatnia, jeśli dąży do obniżenia prawej części belki, a ujemna zmierza do jej podniesienia.



Rys. 1.8

Moment gnący uważamy za dodatni w danym przekroju, jeśli dąży do obrócenia lewej części belki względem rozpatrywanego przekroju zgodnie z obrotem wskazówki zegara, a ujemny – jeśli obrót wywołany byłby przeciwny (rys. 1.9).



Rys. 1.9

W stosunku do prawej strony belki moment gnący w danym przekroju uważamy za ujemny, jeśli zmierza do obrócenia prawej części belki w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegara, a dodatni – jeśli obrót wywoływany byłby przeciwny. Moment gnący dodatni powoduje wygięcie belki wypukłością w dół, a ujemny – wypukłością w górę.

Siła tnąca i moment gnący charakteryzują obciążenie belki w danym przekroju. Im większa jest siła tnąca, tym większe grozi belce niebezpieczeństwo ścięcia w danym przekroju, a im większy jest moment gnący, tym belka bardziej wygina się w tym przekroju i tym większe zachodzi niebezpieczeństwo jej złamania. Z tych względów dla każdej obciążonej belki należy określić przekrój niebezpieczny, tj. ten, w którym panuje największy moment gnący.

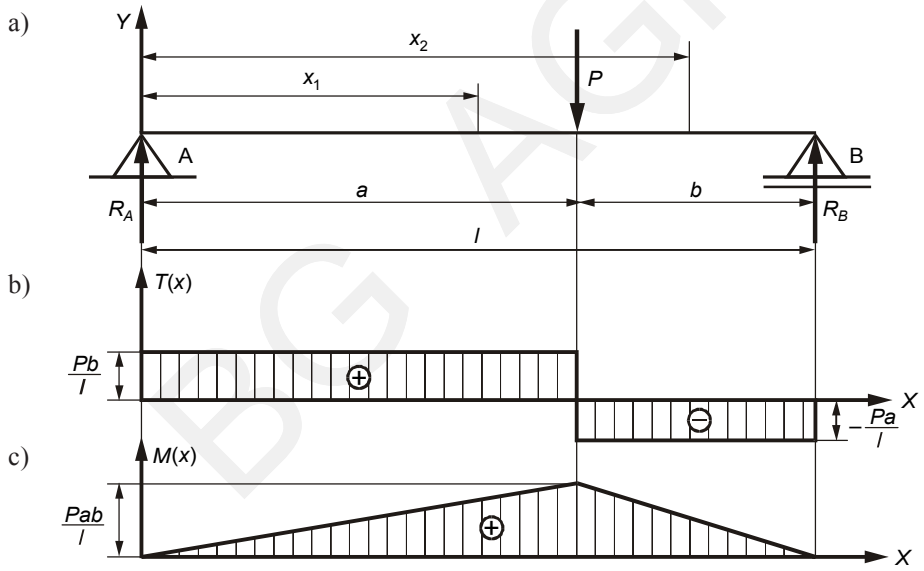
Zarówno siła tnąca, jak i moment gnący w belce są funkcjami odległości x mierzonej wzdłuż osi podłużnej belki. Przy analizie belek zginanych wymagana jest znajomość siły tnącej i momentu zginającego w każdym przekroju. Szczególnie ważna jest znajomość maksymalnej siły tnącej oraz maksymalnego momentu zginającego, które to wielkości bierzemy do oceny wytrzymałościowej całej belki. Najlepszym sposobem znalezienia tych wielkości jest wykonanie wykresów przebiegu zmienności siły tnącej i momentu gnącego jako funkcji x. Na osi odciętych odmierzamy bieżące położenie rozpatrywanego przekroju poprzecznego belki, a wzdłuż osi rzędnych odnosimy odpowiednie wartości siły tnącej lub momentu gnącego. Te wykresy są nazywane wykresami siły tnącej i momentu gnącego. Wskazane jest, aby wykresy te umieszczać bezpośrednio pod rozpatrywaną belką, stosując tę samą skalę wzdłuż długości belki. Nie jest zwykle potrzebna wysoka precyzja wykonania tych wykresów, chociaż istotne wartości rzędnych należy podawać liczbowo lub w sposób ogólny.

BG AGH

2. Zadania z rozwiązaniami

Zadanie 1

Dla belki swobodnie podpartej i obciążonej jak na rysunku 2.1a, wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące, i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunku 2.1b i 2.1c.



Rys. 2.1. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z momentów względem punktu A. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot l + P \cdot b = 0,$$

BG AGH

skąd

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum M_A = -R_B \cdot l + P \cdot a = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M(x_1) = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=a)} = \frac{P \cdot b \cdot a}{l},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T(x_1) = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{P \cdot b}{l},$$

$$T_{(x1=a)} = \frac{P \cdot b}{l}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A(x_2 - 2) - P(x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = \frac{P \cdot b \cdot a}{l},$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

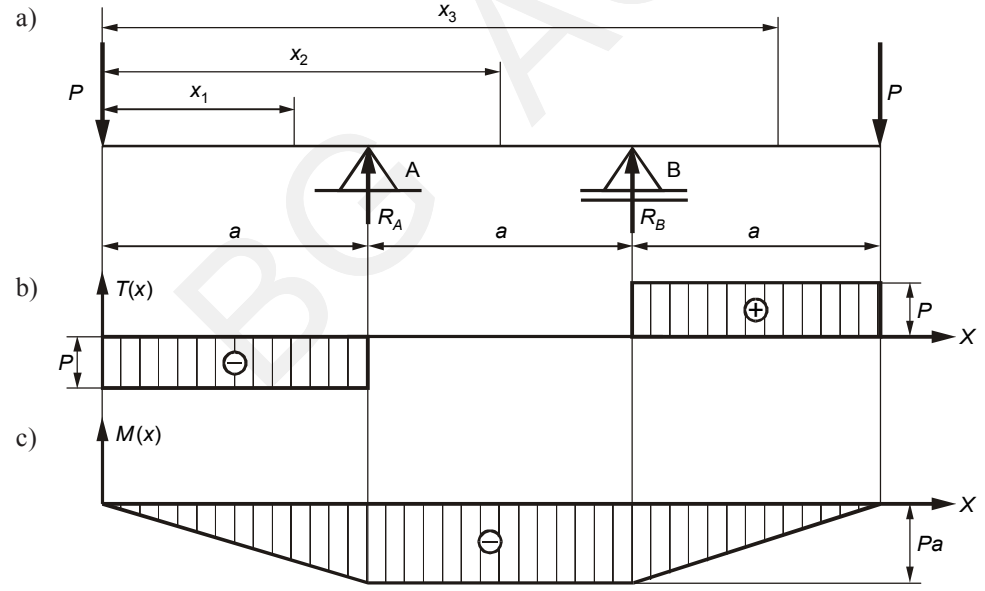
$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2=a)} = -\frac{P \cdot a}{l},$$

$$T_{(x2=l)} = -\frac{P \cdot a}{l}.$$

Zadanie 2

Wykonać wykresy sił tnących i momentów gnących dla belki przedstawionej na rysunku 2.2a.



Rys. 2.2. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Wartość reakcji R_A i R_B są sobie równe i wynoszą P. W belce wyodrębnimy trzy przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

BC AGH

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -Px_1,$$
$$M_{(x1=0)} = 0,$$
$$M_{(x1=a)} = -Pa,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = -P,$$
$$T_{(x1=0)} = -P,$$
$$T_{(x1=a)} = -P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A(x_2 - a) = -Pa,$$
$$M_{(x2=a)} = -Pa,$$
$$M_{(x2=2a)} = -Pa,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -P + R_A = 0,$$
$$T_{(x2=a)} = 0,$$
$$T_{(x2=2a)} = 0.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -Px_3 + R_A(x_3 - a) + R_B(x_3 - 2a) = Px_3 - 3Pa,$$
$$M_{(x3=2a)} = -Pa,$$
$$M_{(x3=3a)} = 0,$$

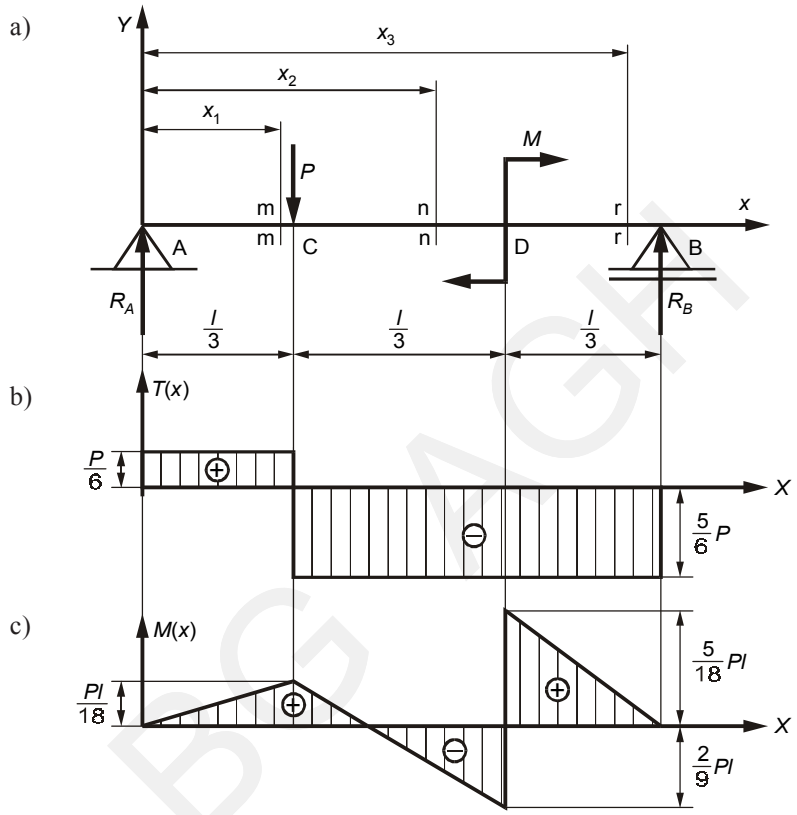
natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T_{(x3)} = -P + R_A + R_B = P.$$

BG AGH

Zadanie 3

Wykonać wykres momentów zginających i sił tnących dla belki AB podpartej przegubowo na obu końcach i obciążonej siłą skupioną P oraz parą sił o momencie $M = \frac{Pl}{2}$, jak pokazano na rysunku 2.3a.



Rys. 2.3. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Podpora A jest stała, podpora B ruchoma, ponieważ siła P i reakcja R_B są pionowe, zatem i reakcja R_A musi być pionowa. Wyznaczamy wartość reakcji R_A i R_B. Równanie momentów względem punktu B ma postać:

$$R_A l - P\,\frac{2}{3}\,l + M = 0,$$

$$R_A = \frac{2}{3}\,P - \frac{M}{l} = \frac{2}{3}\,P - \frac{P}{2} = \frac{P}{6}.$$

BG AGH

Równanie rzutów na kierunek pionowy ma postać

$$R_A + R_B = P,$$

skąd

$$R_B = P - R_A = P - \frac{P}{6} = \frac{5}{6} P.$$

Wyrażenia na moment zginający i na siłę tnącą musimy pisać dla każdego z trzech przedziałów osobno. Najpierw przetniemy belkę w przekroju m–m o odciętej x_1, moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

odcięta x_1 jest w pierwszej potędze, moment zatem zmienia się wzdłuż przęsła AC liniowo, ponadto x_1 może przybierać wartości od 0 do l/3. Przy:

$$x_1 = 0, \qquad M_{(x1)} = 0,$$

$$x_1 = \frac{l}{3}, \qquad M_{(x1)} = \frac{Pl}{18}.$$

Siła tnąca w przekroju m–m

$$T_{(x1)} = R_A = \frac{P}{6}.$$

Siła tnąca nie jest zależna od odciętej x_1, ma więc wartość stałą wzdłuż przedziału AC. Następnie belka jest przecięta w przekroju n–n o odciętej x_2. Moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P\left(x_2 - \frac{l}{3}\right).$$

Odcięta x_2 może przybierać wartości od $\frac{l}{3}$ do $\frac{2l}{3}$, moment zginający zmienia się wzdłuż przedziału CD liniowo:

$$x_2 = \frac{l}{3}, \qquad M_{(x2)} = R_A \cdot \frac{l}{3} - P\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{3}\right) = \frac{Pl}{18},$$

$$x_2 = \frac{2l}{3}, \qquad M_{(x2)} = R_A \cdot \frac{2l}{3} - P\left(\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}\right) = -\frac{2}{9} Pl.$$

Siła tnąca w przekroju n–n

$$T_{(x2)} = R_A - P = -\frac{5}{6} P.$$

Przecinamy belkę w przekroju r–r o odciętej x_3. Moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P\left(x_3 - \frac{l}{3}\right) + M.$$

Odcięta x_3 może przybierać wartości od $\frac{2l}{3}$ do l. Moment zginający zmienia się wzdłuż przedziału DB liniowo, i przy:

$$x_3 = \frac{2l}{3}, \qquad M_{(x3)} = R_A \cdot \frac{2l}{3} - P\left(\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}\right) + M = \frac{5Pl}{18},$$

$$x_3 = l, \qquad M_{(x3)} = R_A l - P\left(l - \frac{l}{3}\right) + M = 0.$$

Wykres momentów zginających jest pokazany na rysunku 2.3b. Siła tnąca w przekroju r–r wynosi

$$T_{(x_3)} = R_A - P = -\frac{5P}{6}.$$

Wykres sił tnących jest pokazany na rysunku 2.3c.

Zadanie 4

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB podpartej przegubowo obu końcami i obciążonej dwiema siłami P, jak pokazano na rysunku 2.4a.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zwroty obu reakcji zakładamy, że działają do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = Pl - P2l - R_B 3l = 0,$$

skąd:

$$R_B = -\frac{P}{3},$$

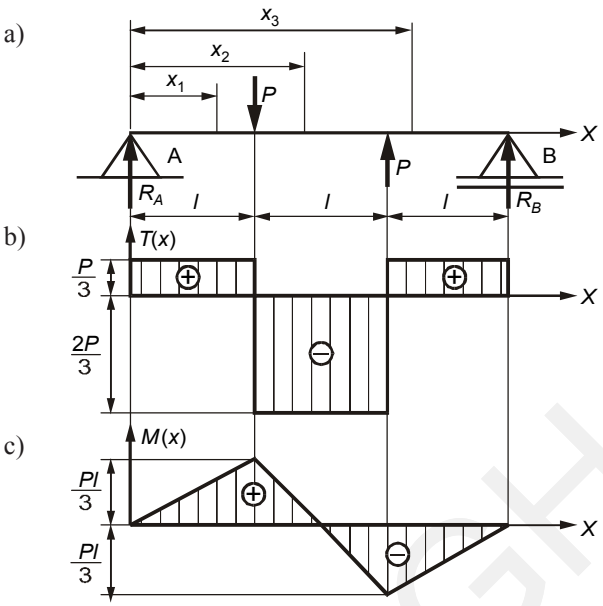
$$\sum P_y = R_A - P + P + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = -R_B = \frac{P}{3}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest poprawnie przyjęty.

EG AGH



Rys. 2.4. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = \frac{Pl}{3},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{P}{3},$$

$$T_{(x1=l)} = \frac{P}{3}.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_2 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P(x_2 - l),$$

$$M_{(x2=l)} = \frac{Pl}{3},$$

$$M_{(x2=2l)} = -\frac{Pl}{3},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2=l)} = -\frac{2P}{3},$$

$$T_{(x2=2l)} = -\frac{2P}{3}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2l \le x_3 \le 3l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - l) + P(x_3 - 2l),$$

$$M_{(x3=2l)} = -\frac{Pl}{3},$$

$$M_{(x3=3l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - P + P,$$

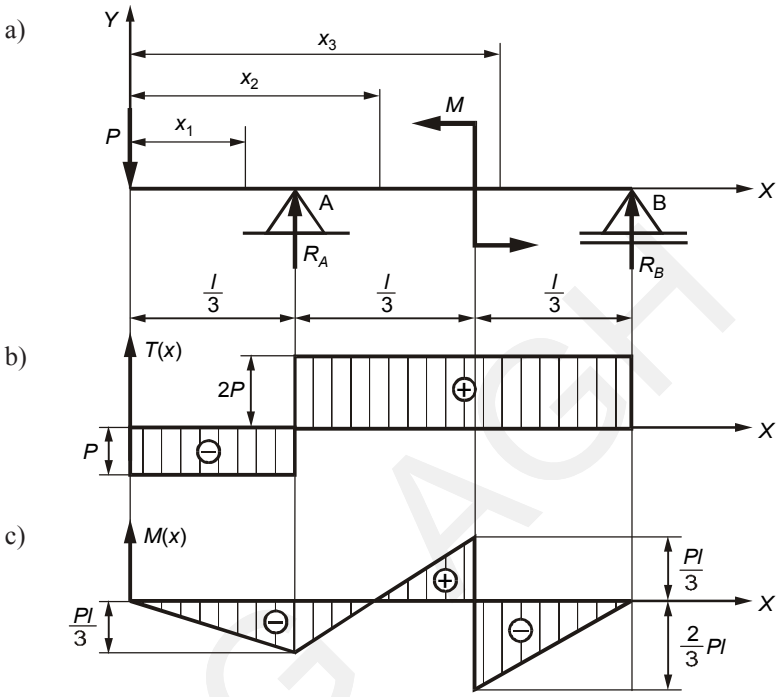
$$T_{(x3=2l)} = \frac{P}{3},$$

$$T_{(x3=3l)} = \frac{P}{3}.$$

BG AGH

Zadanie 5

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki podpartej przegubowo obciążonej siłą skupioną P oraz parą sił o momencie $M = Pl$, jak pokazano na rysunku 2.5a.



Rys. 2.5. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

Wtedy:

$$\sum M_A = P\frac{l}{3} - M - \frac{2}{3}R_B l = 0,$$

skąd

$$R_B = -2P,$$

$$\sum P_y = -P + R_A + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 3P.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{3}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -Px_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/3)} = -P\frac{l}{3},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -P,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = -P,$$

$$T_{(x1=l/3)} = -P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{3} \le x_2 \le \frac{2l}{3}.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A\left(x_2 - \frac{l}{3}\right),$$

$$M_{(x2=l/3)} = -P\frac{l}{3},$$

$$M_{(x2=2l/3)} = P\frac{l}{3},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -P + R_A,$$

$$T_{(x2=l/3)} = 2P,$$

$$T_{(x2=2l/3)} = 2P.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{2l}{3} \le x_3 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -Px_3 + R_A\left(x_3 - \frac{l}{3}\right) - M,$$

$$M_{(x3=2l/3)} = -\frac{2Pl}{3},$$

$$M_{(x3=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

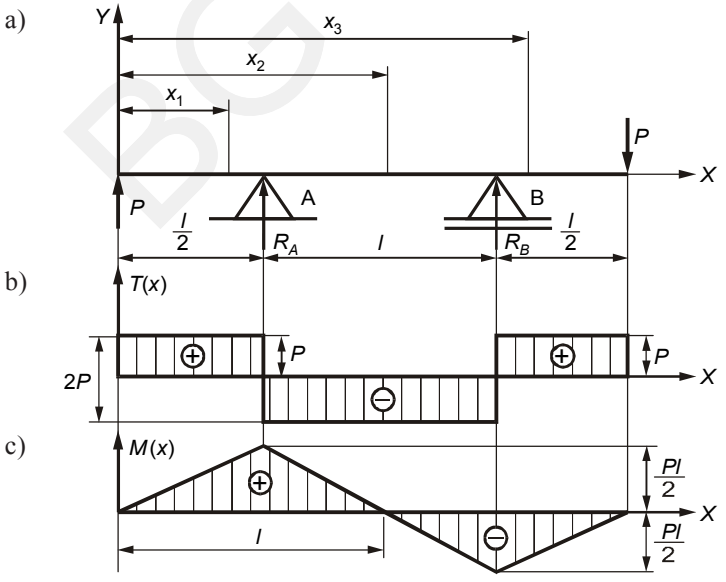
$$T_{(x3)} = -P + R_A,$$

$$T_{(x3=2l/3)} = 2P,$$

$$T_{(x3=l)} = 2P.$$

Zadanie 6

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki podpartej przegubowo w punktach A i B, obciążonej dwiema siłami skupionymi *P*, jak pokazano na rysunku 2.6a.



Rys. 2.6. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = P\,\frac{l}{2} - R_B l + P\,\frac{3}{2}\,l = 0,$$

skąd:

$$R_B = 2P,$$

$$\sum P_y = P + R_A + R_B - P = 0,$$

skąd

$$R_A = -2P.$$

Znak ujemny dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest przeciwny do przyjętego.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = Px_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = \frac{Pl}{2},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = P,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = P,$$

$$T_{(x1=l/2)} = P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le \frac{3l}{2}.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = Px_2 + R_A\left(x_2 - \frac{l}{2}\right),$$

$$M_{(x2=l/2)} = \frac{Pl}{2},$$

$$M_{(x2=3l/2)} = -\frac{Pl}{2},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = P + R_A,$$

$$T_{(x2=l/2)} = -P,$$

$$T_{(x2=3l/2)} = -P.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{3l}{2} \le x_3 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = Px_3 + R_A\left(x_3 - \frac{l}{3}\right) + R_B\left(x_3 - \frac{3l}{2}\right),$$

$$M_{(x3=3l/2)} = -\frac{Pl}{2},$$

$$M_{(x3=2l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = P + R_A + R_B,$$

$$T_{(x3=3l/2)} = P,$$

$$T_{(x3=2l)} = P.$$

Zadanie 7

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki obciążonej siłą skupianą *P* jak pokazano na rysunku 2.7a.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutu względem osi OY. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

Wtedy:

$$\sum M_A = P\,\frac{2}{5}\,l + P\,\frac{4}{5}\,l - R_B l = 0,$$

skąd:

$$R_B = \frac{6}{5}\,P,$$

$$\sum P_y = R_A - P - P - R_B = 0,$$

skąd

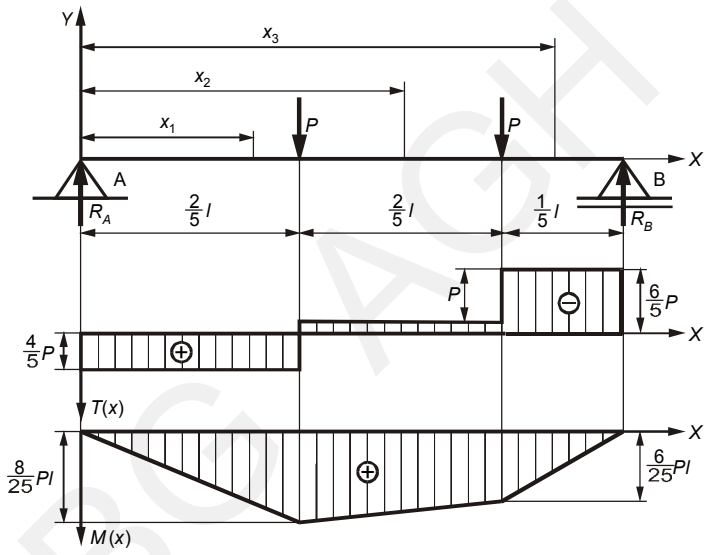
$$R_A = \frac{4}{5}\,P.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.

a)

b)

c)



Rys. 2.7. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{2}{5}\,l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = 0,$$

$$M_{(x1 = 2l/5)} = \frac{8}{25}\,Pl,$$

PG AGH

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla

$$T_{(x1=0=2l/5)} = \frac{4}{5} P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{2}{5} l \le x_2 \le \frac{4}{5} l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P\left(x_2 - \frac{2}{5} l \right),$$

$$M_{(x2=2l/5)} = \frac{8}{25} Pl,$$

$$M_{(x2=4l/5)} = \frac{6}{25} Pl,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2=2l/5=4l/5)} = -\frac{1}{5} P.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{4}{5} l \le x_3 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P\left(x_3 - \frac{2}{5} l \right) - P\left(x_3 - \frac{4}{5} l \right),$$

$$M_{(x3=4l/5)} = \frac{6}{25} Pl,$$

$$M_{(x3=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

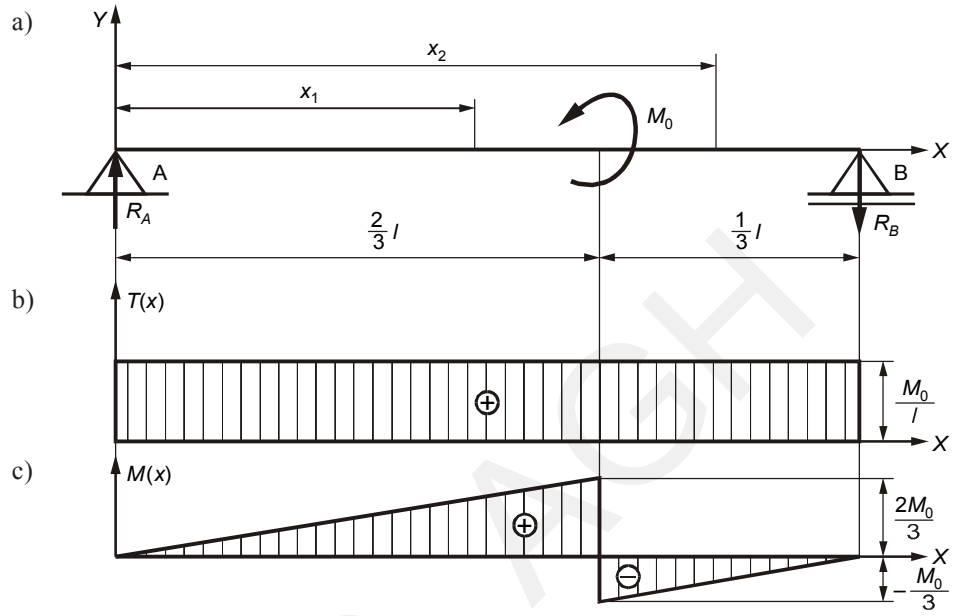
$$T_{(x3)} = R_A - P - P,$$

$$T_{(x3=4l/5=l)} = -\frac{6P}{5}.$$

BG AGH

Zadanie 8

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.8a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.8b i 2.8c.



Rys. 2.8. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_0 + R_B \cdot l = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{M_0}{l}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy:

$$\sum P_y = R_A - R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{M_0}{l}.$$

BG AGH

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{2}{3} l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2l/3)} = \frac{2M_0}{3},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{M_0}{l},$$

$$T_{(x1=2l/3)} = \frac{M_0}{l}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{2}{3} l \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - M_0,$$

dla:

$$M_{(x2=2l/3)} = -\frac{M_0}{3},$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A,$$

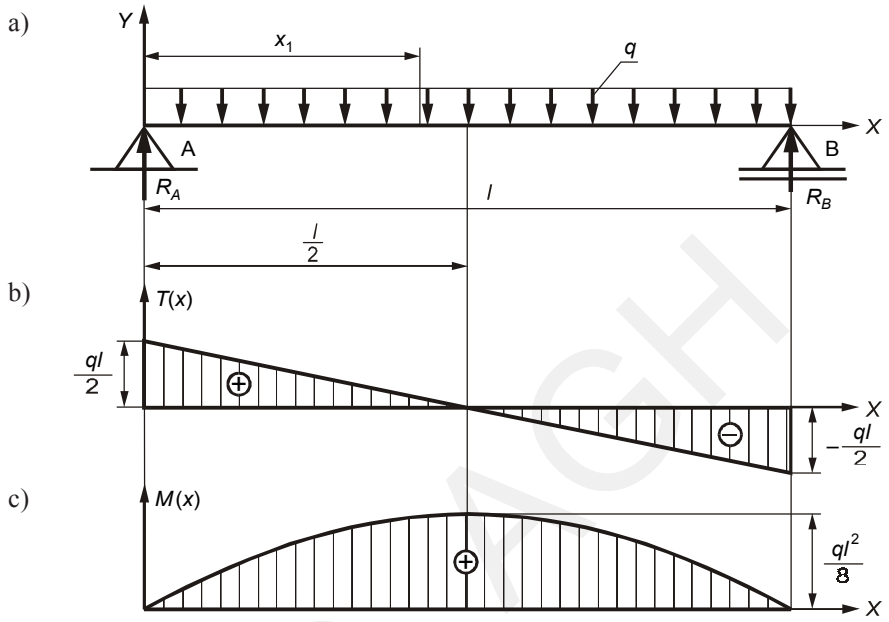
$$T_{(x2=2l/3)} = \frac{M_0}{l},$$

$$T_{(x2=l)} = \frac{M_0}{l}.$$

BG AGH

Zadanie 9

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.9a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.9b i 2.9c.



Rys. 2.9. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = ql \cdot \frac{l}{2} - R_B l = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{ql}{2}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - ql + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{ql}{2}.$$

AGH

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce jeden przedział. Przedział ten będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q x_1 \cdot \frac{x_1}{2},$$

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q_1 \cdot \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = 0,$$

$$M_{(x1\,=\,l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = \frac{ql}{2} - q x_1,$$

dla:

$$T_{(x1\,=\,0)} = \frac{ql}{2},$$

$$T_{(x1\,=\,l)} = -\frac{ql}{2}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = \frac{ql}{2} - q x_1 = 0,$$

stąd

$$x_0 = \frac{l}{2}.$$

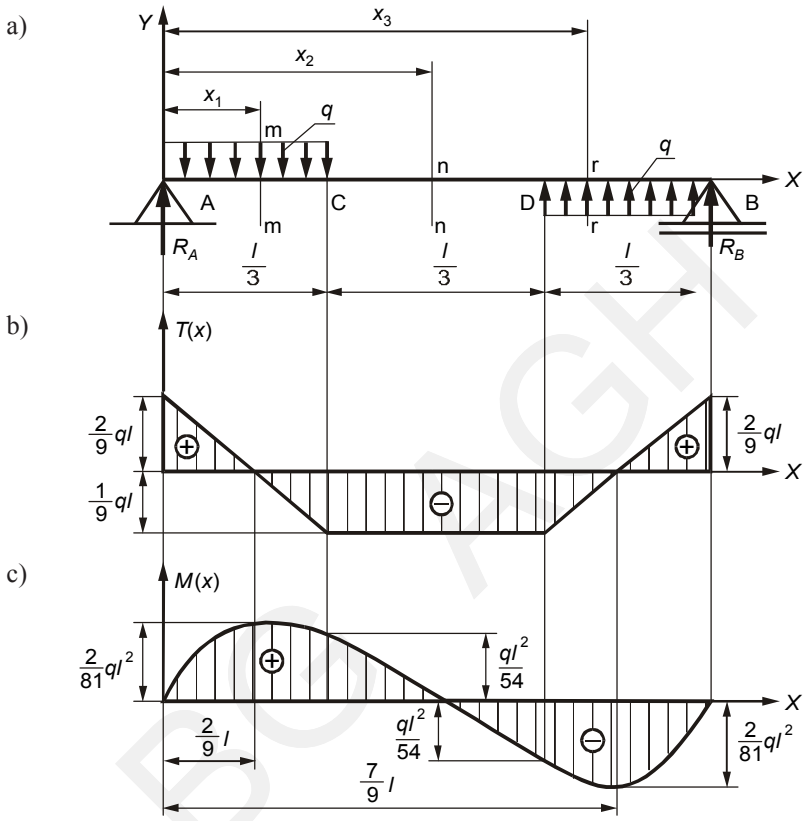
Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x\,0)} = R_A x_1 - q_1 \cdot \frac{x_1^2}{2} = \frac{ql^2}{2}.$$

BG AGH

Zadanie 10

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB podpartej oba końcami przegubowo i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q w sposób pokazany na rysunku 2.10.



Rys. 2.10. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczymy wartości reakcji R_A i R_B. Reakcja R_A ma kierunek pionowy ponieważ obciążenie q i reakcja R_B są pionowe (podpora A jest stała, podpora B ruchoma). W celu zastosowania równania statystyki do wyznaczania reakcji, trzeba oba obciążenia ciągłe q zastąpić ich wypadkowymi, które wobec równomierności rozłożenia tych obciążeń, będą przechodziły w środkach długości odcinków AC i DB.

Równanie momentów względem punktu B ma postać:

$$R_A l - \frac{ql}{3}\left(l - \frac{l}{6}\right) + \frac{ql}{3}\cdot\frac{l}{6} = 0, \qquad R_A = \frac{q}{3}\cdot\frac{5l}{6} - \frac{ql}{18} = \frac{2}{9}\,ql.$$

BC AGH

Równanie rzutów na kierunek pionowy ma postać:

$$R_A + R_B - \frac{ql}{3} + \frac{ql}{3} = 0, \qquad R_B = -R_A = -\frac{2}{9}\,ql.$$

Jeżeli przetniemy belkę w przekroju m–m o odciętej x_1, to moment zginający w tym przekroju wyraża się następująco

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2},$$

odcięta x_1 jest w drugiej potędze, zatem moment zginający zmienia się wzdłuż belki w przedziale AC parabolicznie, x_1 może zmieniać wartości od 0 do $\frac{l}{3}$. Przy:

$$x_1 = 0, \qquad M_{(x1)} = 0,$$

$$x_1 = \frac{l}{3}, \qquad M_{(x1)} = \frac{ql^2}{54}.$$

Siła tnąca w przekroju m–m

$$\mathrm{T}_{(x1)} = R_A - qx_1.$$

Odcięta x_1 jest w pierwszej potędze, zatem siła tnąca zmienia się wzdłuż belki w przedziale AC liniowo i przy:

$$x_1 = 0, \qquad T_{(x1)} = \frac{2}{9}\,ql,$$

$$x_1 = \frac{l}{3}, \qquad T_{(x1)} = -\frac{ql}{9}.$$

Aby wyznaczyć przekrój, w którym moment zginający przybiera wartość maksymalną, bierzemy pochodną momentu zginającego względem odciętej x i przyrównujemy ją do zera:

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = R_A - qx_1' = 0, \qquad x_1' = \frac{2}{9}\,l.$$

Po podstawieniu wartości odciętej x_1' do wyrażenia na moment zginający otrzymamy jego wartość maksymalną:

$$M_{\max} = \frac{2ql^2}{81}.$$

Następnie przetniemy belkę przekroju n–n o odciętej x_2. Moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - \frac{ql}{3}\left(x_2 - \frac{l}{6}\right).$$

PG AGH

Odcięta x_2 jest w pierwszej potędze zatem, moment Mx_2 zmienia się wzdłuż belki w przedziale CD liniowo, x_2 może przybierać wartości od $\frac{l}{3}$ do $\frac{2l}{3}$.

Przy:

$$x_2 = \frac{l}{3}, \qquad M_{(x2)} = \frac{ql^2}{54},$$

$$x_2 = \frac{2l}{3}, \qquad M_{(x2)} = -\frac{ql^2}{54}.$$

Siła tnąca w przekroju n–n

$$T_{(x2)} = R_A - \frac{ql}{3} = -\frac{ql}{9}.$$

Przecinamy belkę w przekroju r–r o odciętej x_3, moment zginający w tym przekroju wygląda następująco:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - \frac{ql}{3}\left(x_3 - \frac{l}{6}\right) + \frac{q\left(x_3 - \frac{2}{3}l\right)^2}{2},$$

x_3 może przybierać wartości od $2l/3$ do l. Przy:

$$x_3 = \frac{2l}{3}, \qquad M_{(x3)} = -\frac{ql^2}{54},$$

$$x_3 = l, \qquad M_{(x3)} = 0.$$

Siła tnąca w przekroju r–r wynosi:

$$T_{(x3)} = R_A - \frac{ql}{3} + q\left(x_3 - \frac{2}{3}l\right),$$

przy:

$$x_3 = \frac{2l}{3}, \qquad T_{(x3)} = -\frac{ql}{9},$$

$$x_3 = l, \qquad T_{(x3)} = \frac{2}{9}ql.$$

Aby wyznaczyć w przedziale DB przekrój, w którym moment zginający przybiera wartość maksymalną, przyrównujemy siłę tnącą T_{x3} do zera.

$$T_{(x3)} = R_A - \frac{ql}{3} + \frac{2q\left(x_3''' - \frac{2}{3}l\right)}{2} = 0, \quad x_3''' = \frac{7}{9}l.$$

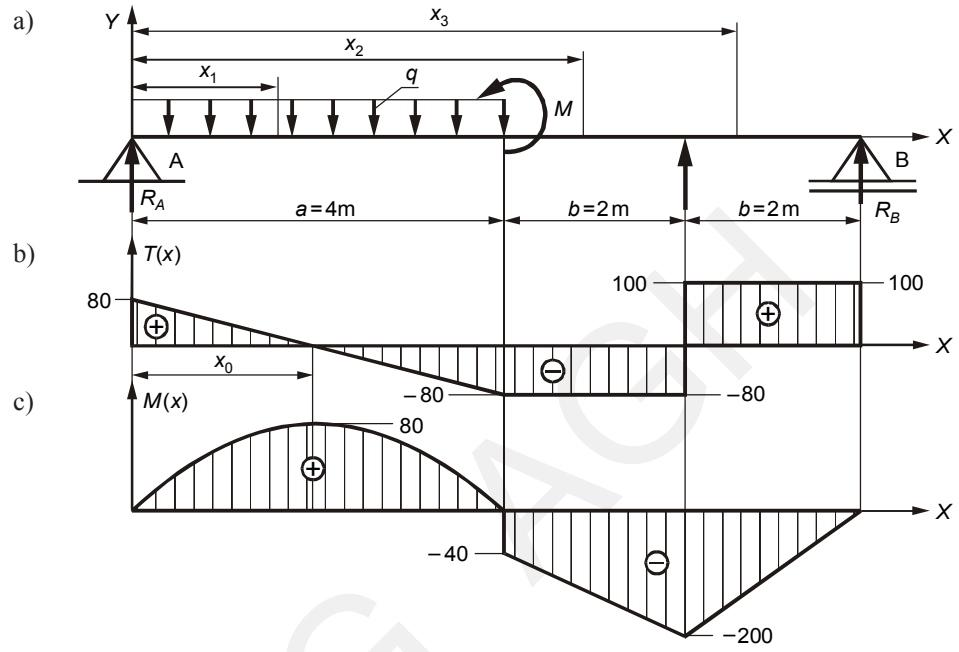
Podstawiając wartość odciętej x_3''' do wyrażenia na moment zginający otrzymamy jego wartość maksymalną wynoszącą:

$$M_{\max} = -\frac{2ql^2}{81}.$$

PG AGH

Zadanie 11

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.11a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.11b i 2.11c. P = 180 kN, q = 40 kN/m, M = 40 kNm.



Rys. 2.11. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry. Wtedy

$$\sum M_A = 4 \cdot q \cdot \frac{a}{2} - M - P \cdot (a+b) - R_B \cdot (a+2b) = 0,$$

skąd

$$R_B = -100 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - q \cdot 4 + P + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 80 \text{ kN}.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 4.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2} = 0,$$

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q \frac{x_1^2}{2} = 0,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=4)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 80 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=4)} = -80 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$4 \le x_2 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - q \cdot 4 (x_2 - 2) - M,$$

dla:

$$M_{(x2=4)} = -40 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=6)} = -200 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A,$$

$$T_{(x2=4)} = -80 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=6)} = -80 \text{ kN}.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$6 \le x_3 \le 8 \qquad \text{(rozwiązanie od prawej strony).}$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_B(8 - x_3),$$

dla:

$$M_{(x3=6)} = -200 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=8)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -R_B,$$

$$T_{(x3=6)} = 100 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=8)} = 100 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - qx_1 = 0,$$

stąd

$$x_0 = 2 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_A x_1 - q\,\frac{x_1^2}{2} = 80 \text{ kNm}.$$

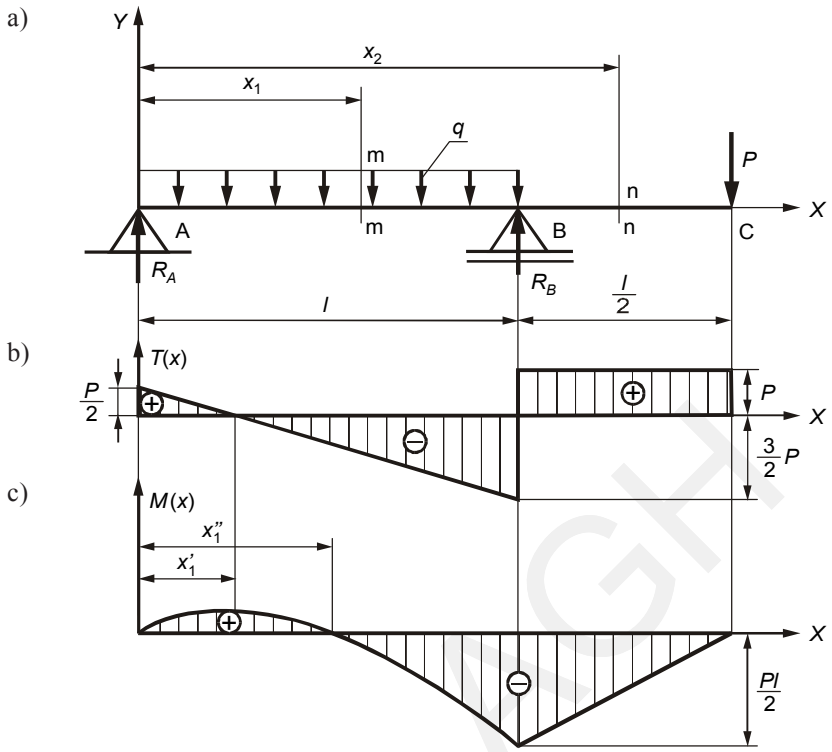
Zadanie 12

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki podpartej przegubowo w punktach A i B i obciążonej siłą skupioną P oraz równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym $q = \frac{2P}{l}$ w sposób pokazany na rysunku 2.12a.

Rozwiązanie

Na samym początku wyznaczymy wartość reakcji. Reakcja A jest pionowa, ponieważ reakcja B oraz siły obciążające belkę są pionowe.

BG AGH



Rys. 2.12. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Równanie momentów względem punktu B ma postać:

$$R_A l - \frac{ql^2}{2} + P \cdot \frac{l}{2} = 0, \qquad R_A = \frac{P}{2}.$$

Równanie rzutów na kierunek pionowy wygląda następująco:

$$R_A + R_B - ql - P = 0, \qquad R_B = \frac{5}{2} P.$$

Następnie przecinamy belkę w przekroju m–m o odciętej x_1, siła tnąca w tym przekroju wynosi

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

przy:

$$x_1 = 0, \qquad T_{(x_1)} = \frac{P}{2},$$

$$x_1 = l, \qquad T_{(x1)} = R_A - ql = -\frac{3P}{2}.$$

BG AGH

moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2},$$

x_1 może przybierać wartości od 0 do l przy:

$$x_1 = 0, \qquad M_{(x1)} = 0,$$

$$x_1 = l, \qquad M_{(x1)} = -\frac{Pl}{2}.$$

Następnie przyrównujemy do zera siłę tnącą aby znaleźć przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną:

$$T_{(x1)} = R_A - q x_1' = 0, \qquad x_1' = \frac{R_A}{q} = \frac{l}{4},$$

po czym podstawiamy wartość odciętej x_1' do wyrażenia na moment zginający i otrzymujemy

$$M_{\max} = R_A \cdot \frac{l}{4} - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{Pl}{16}.$$

Aby wyznaczyć położenie punktu przegięcia belki musimy znaleźć taką wartość odciętej x_1'' przekroju, w którym moment zginający równa się zeru:

$$M_{(x1)} = R_A x_1'' - \frac{q x''^2_1}{2} = 0, \qquad x_1'' = \frac{2R_A}{q} = \frac{l}{2}.$$

Przecinamy następnie belkę w przekroju n–n o odciętej x_2, siła tnąca w tym przekroju

$$T_{(x2)} = R_A - ql + R_B = P.$$

Moment zginający w przekroju n–n wynosi

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - ql\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) + R_B(x_2 - l) = \frac{P}{2} x_2 - ql\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) + \frac{5}{2}P(x_2 - l),$$

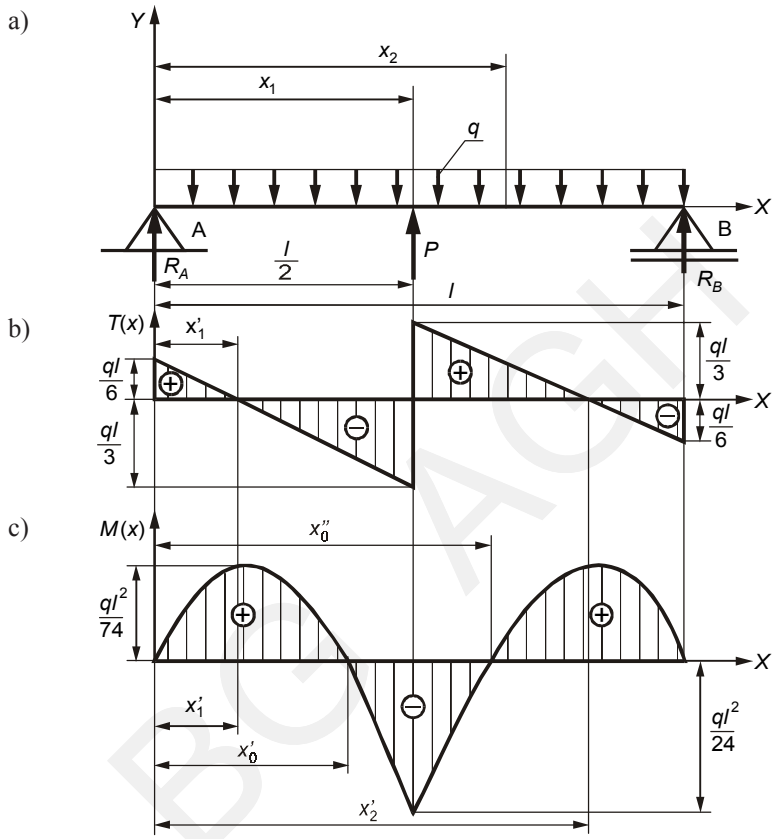
x_2 może przybierać wartości od l do $\frac{3l}{2}$, przy:

$$x_2 = l, \qquad M_{(x2)} = -\frac{Pl}{2},$$

$$x_2 = \frac{3l}{2}, \qquad M_{(x2)} = 0.$$

Zadanie 13

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB podpartej obu końcami przegubowo i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q oraz siłą skupioną $P = \frac{2}{3} ql,$ jak pokazano na rysunku 2.13a.



Rys. 2.13. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY.

Obciążenie belki w przedziale AB zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest ql i przechodzi przez środek odcinka AB.

Zwroty obu reakcji zakładamy do góry. Wtedy

$$\sum M_A = -P\,\frac{l}{2} + ql\,\frac{l}{2} - R_B l = 0,$$

BC AGH

skąd:

$$R_B = \frac{ql}{6},$$

$$\sum P_y = R_A + P - ql + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{ql}{6}.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte. Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q\,\frac{x_1^{\,2}}{2},$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = 0,$$

$$M_{(x1\,=\,l/2)} = -\frac{ql^2}{24},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1\,=\,0)} = \frac{ql}{6},$$

$$T_{(x1\,=\,l/2)} = -\frac{ql}{3}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 + P\left(x - \frac{l}{2}\right) - qx_2\,\frac{x_2}{2},$$

$$M_{(x2)} = R_A x_2 + P\left(x - \frac{l}{2}\right) - q\,\frac{x_2^2}{2},$$

BG AGH

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = -\frac{ql^2}{24},$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - qx_2 + P,$$

$$T_{(x2=l/2)} = \frac{ql}{3},$$

$$T_{(x2=l)} = -\frac{ql}{6}.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej w pierwszym i drugim przedziale zmienia znak z plusa na minus, dlatego występuje w nim ekstremum momentu gnącego. Aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x2} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x1} i T_{x2}:

$$T_{(x1)} = R_A - qx_0 = 0,$$

$$T_{(x2)} = R_A - qx_0 + P = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_1 = \frac{l}{6}$ i $x_2 = \frac{5l}{6}$.

Uwzględniając wartość *x1* w funkcji M_{x1} otrzymamy

$$M_{x1\,\max} = \frac{ql^2}{72},$$

i x_2 w funkcji M_{x2} otrzymamy

$$M_{x2\,\max} = \frac{ql^2}{72}.$$

Zadanie 14

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki wsporniko wej AD, podpartej przegubowo w punktach A i B, obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q oraz siłą skupioną $P = ql$ (rys. 2.14a).

Rozwiązanie

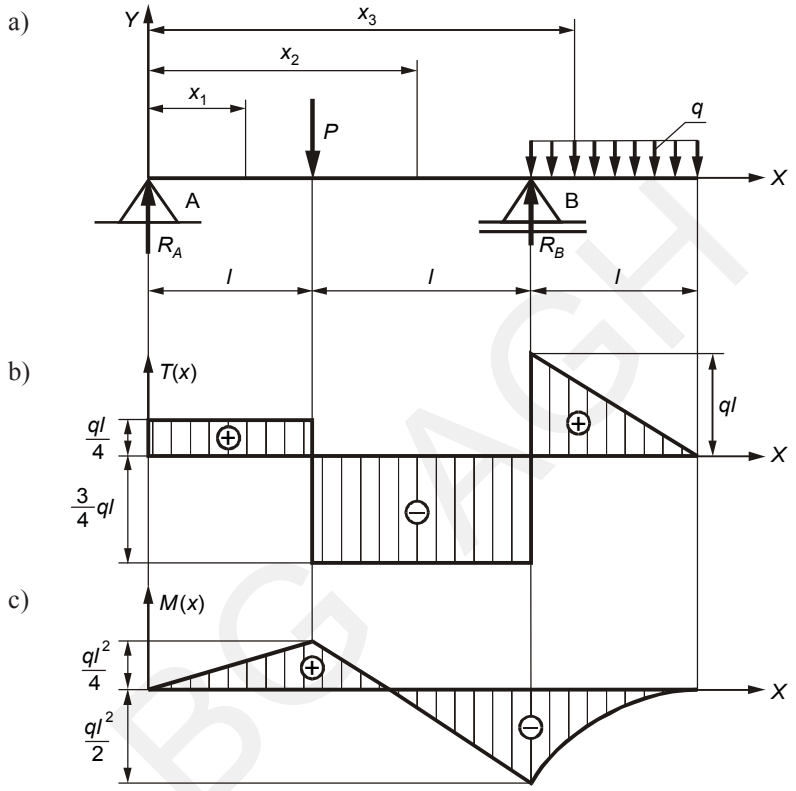
Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY.

BG AGH

$$\sum M_A = Pl - R_B 2l + ql\,\frac{5}{2}\,l = 0,$$

skąd:

$$R_B = \frac{7}{4}ql.$$



Rys. 2.14. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Obciążenie belki w przedziale BD zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest *ql* i przechodzi przez środek odcinka BD. Zwroty obu reakcji zakładamy, że działają do góry.

Wtedy

$$\sum P_y = R_A - P + R_B - ql = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{1}{4}ql.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 = \frac{1}{4} q l x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = \frac{1}{4} q l^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = R_A = \frac{1}{4} q l,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{1}{4} q l,$$

$$T_{(x1=l)} = \frac{1}{4} q l.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_2 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P(x_2 - l),$$

$$M_{(x2=l)} = \frac{1}{4} q l^2,$$

$$M_{(x2=2l)} = -\frac{1}{2} q l^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2\ =\ l)} = -\frac{3}{4} q l,$$

$$T_{(x2=2l)} = -\frac{3}{4} q l.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2l \le x_3 \le 3l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - l) + R_B(x_3 - 2l) - q(x_3 - 2l)\frac{(x_3 - 2l)}{2},$$

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - l) + R_B(x_3 - 2l) - q\frac{(x_3 - 2l)^2}{2},$$

$$M_{(x3=2l)} = -\frac{1}{2}ql^2,$$

$$M_{(x3=3l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

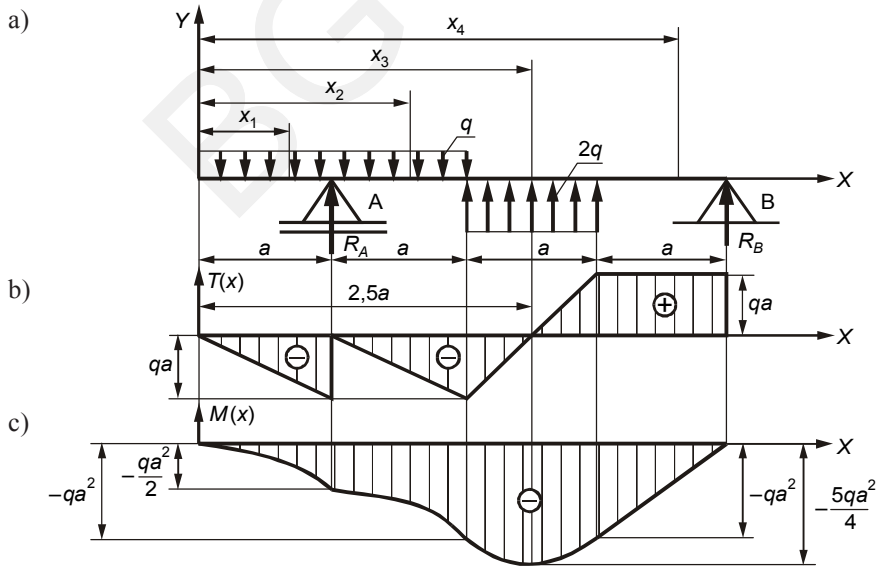
$$T_{(x3)} = R_A - P + R_B - q(x_3 - 2),$$

$$T_{(x3=2l)} = ql,$$

$$T_{(x3=3l)} = 0.$$

Zadanie 15

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.15a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.15b i 2.15c.



Rys. 2.15. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = -q \cdot 2a \cdot 3a + R_A \cdot 3a + 2qa \cdot \frac{3}{2} a = 0,$$

skąd

$$R_A = qa.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = -2qa + R_A + 2qa + R_B = 0,$$

skąd

$$R_B = -qa.$$

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -qx_1 \frac{x_1}{2},$$

$$M_{(x1)} = -q \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M(x_1 = 0) = 0,$$

$$M_{(x1=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T(x_1) = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=a)} = 0,$$

$$T_{(x1=a)} = -qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x2 \le 2a.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -qx_2 \frac{x_2}{2} + R_A(x_2 - a),$$

$$M_{(x2)} = -q \frac{x_2^2}{2} + R_A(x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

$$M_{(x2=2a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qx_2 + R_A,$$

$$T_{(x2=a)} = 0,$$

$$T_{(x2=2a)} = -qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -2qa(x_3 - a) + R_A(x_3 - a) + 2q(x_3 - 2a)\frac{(x_3 - 2a)}{2},$$

$$M_{(x3)} = -2qa(x_3 - a) + R_A(x_3 - a) + 2q\frac{(x_3 - 2a)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3=2a)} = -qa^2,$$

$$M_{(x3=3a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -2qa + R_A + 2q(x_3 - 2a),$$

$$T_{(x3=2a)} = -qa,$$

$$T_{(x3=3a)} = qa.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$3a \le x_4 \le 4a.$$ (rozwiązywane od prawej strony).

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = R_B(4a - x_4),$$

BG AGH

dla:

$$M_{(x4=3a)} = -qa^2,$$

$$M_{(x4=4a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = -R_B,$$

$$T_{(x4=3a)} = qa,$$

$$T_{(x4=4a)} = qa.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w trzecim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą trzeciego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x3}}{dx} = T_{(x3)} = -2qa + R_A + 2q(x_3 - 2a) = 0,$$

stąd

$$x_0 = \frac{5}{2}a.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x3\,=\,x_0)} = -2qa(x_3 - a) + R_A(x_3 - a) + 2q\,\frac{(x_3 - 2a)^2}{2} = -\frac{5}{4}\,qa^2.$$

Zadanie 16

Podać wzory na siłę poprzeczną i moment gnący oraz sporządzić na ich podstawie wykresy dla belki podpartej swobodnie i obciążonej jak na rysunku 2.16a. Dane: P = 12 kN, q = 15 kN/m, l = 4 m.

Rozwiązanie

Wyznaczamy reakcje podpór korzystając z równań momentów względem punktu A i B:

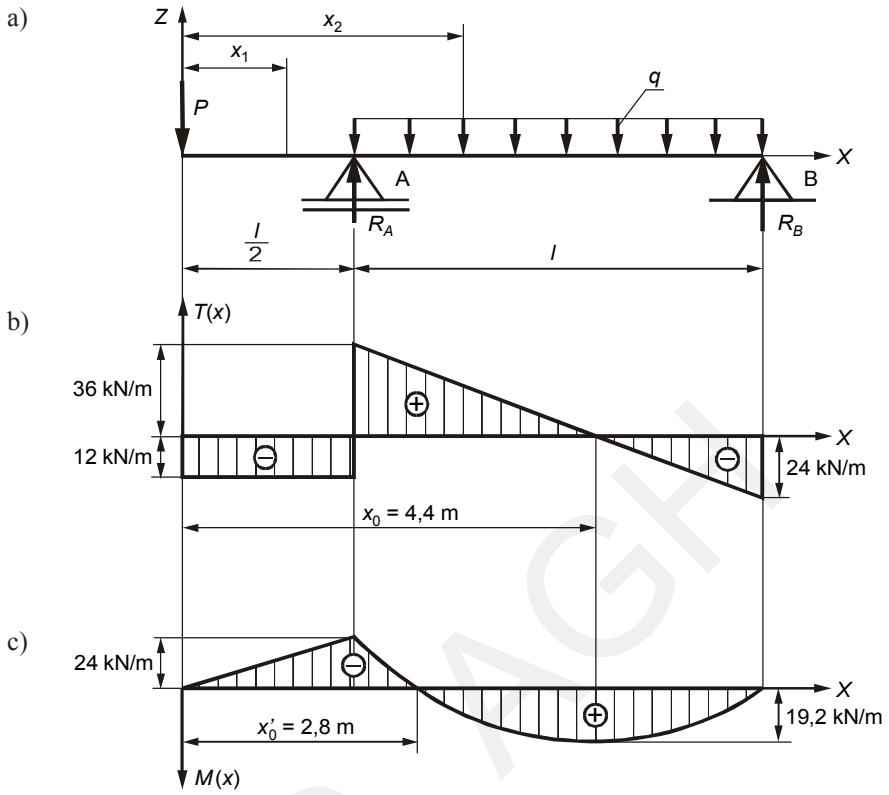
$$\sum M_B = -P\,\frac{3}{2}\;l + R_A l - \frac{ql^2}{2} = 0,$$

$$R_A = \frac{3}{2}\,P + \frac{ql}{2} = 48\ \text{kN},$$

$$\sum M_A = R_B l - \frac{ql^2}{2} + \frac{Pl}{2} = 0,$$

$$R_B = -\frac{P}{2} + \frac{ql}{2} = 24\ \text{kN}.$$

BG AGH



Rys. 2.16. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -Px_1,$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = -P\frac{l}{2},$$

$$T_{(x1)} = -P.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le \frac{3l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) - \frac{q\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2},$$

$$M_{(x2=l/2)} = -P\,\frac{l}{2},$$

$$M_{(x2\,=\,3/2)} = 0,$$

$$T_{(x2)} = -P + R_A - q\left(x_2 - \frac{l}{2}\right).$$

Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. W tym celu przyrównujemy siłę tnącą do zera dla drugiego przedziału.

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = -P + R_A - q\left(x_0 - \frac{l}{2}\right),$$

stąd

$$x_0 = 4{,}4 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi:

$$M_{(x2=x0)} = -Px_0 + R_A\left(x_0 - \frac{l}{2}\right) - \frac{q\left(x_0 - \frac{l}{2}\right)^2}{2},$$

$$M_{\max} = 19{,}2 \text{ kNm}.$$

Natomiast odcięta, dla której moment gnący jest równy zeru obliczamy z warunku:

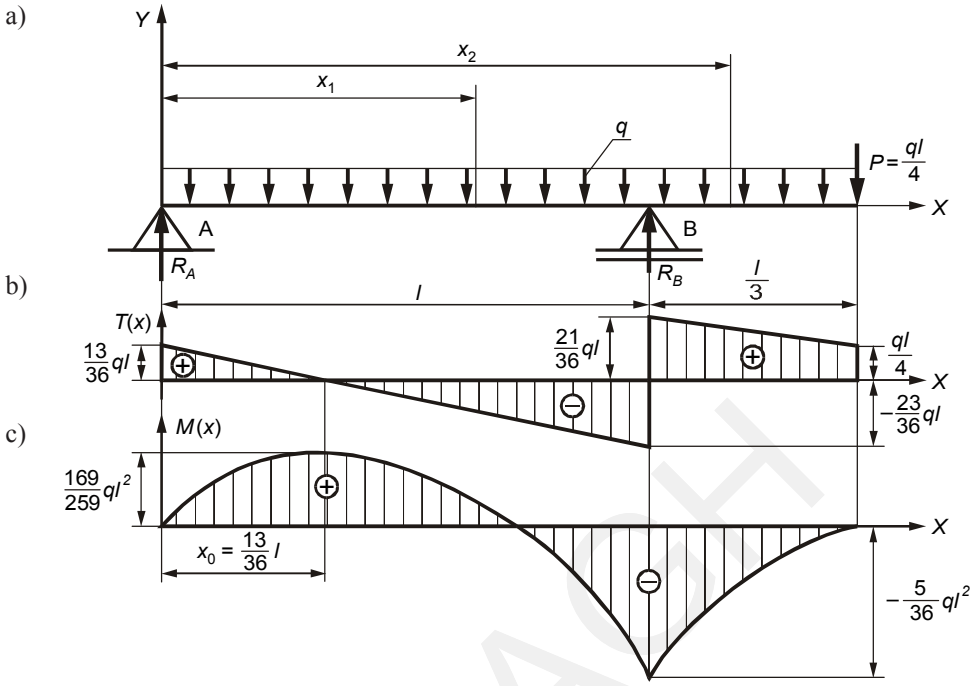
$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) - \frac{q\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2},$$

$$x_0' = 2{,}8 \text{ m}.$$

Zadanie 17

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.17a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.17b i 2.17c.

BG AGH



Rys. 2.17. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot l + P \cdot \frac{l}{3} - ql \cdot \frac{l}{2} + q \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{6} = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{13}{36}\, ql.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A + R_B - P - q\left(l + \frac{l}{3}\right) = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{11}{9}\, ql.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym.

BG AGH

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A \cdot x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = -\frac{5}{36} ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{13}{36} ql,$$

$$T_{(x1=l)} = \frac{23}{36} ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_2 \le \frac{4}{3} l. \quad \text{(rozwiązanie od prawej strony).}$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -P\left(\frac{4}{3}l - x_2\right) - q\left(\frac{4}{3}l - x_2\right)\frac{\left(\frac{4}{3}l - x_2\right)}{2},$$

$$M_{(x2)} = -P\left(\frac{4}{3}l - x_2\right) - q\frac{\left(\frac{4}{3}l - x_2\right)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=l)} = -\frac{5}{36} ql^2,$$

$$M_{(x2=4l/3)} = 0,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = P + q\left(\frac{4}{3}l - x_2\right),$$

$$T_{(x2=l)} = \frac{7}{12}\,ql,$$

$$T_{(x2=4l/3)} = \frac{1}{4}\,ql.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - qx_1 = 0,$$

stąd

$$x_0 = \frac{13}{36}\,l.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_A \cdot x_1 - qx_1\,\frac{x_1}{2} = \frac{169}{256}\,ql^2.$$

Zadanie 18

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.18a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.18b i 2.18c.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot 3 - M + P \cdot 1{,}2 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0,$$

skąd

$$R_A = 4{,}87 \text{ kN}.$$

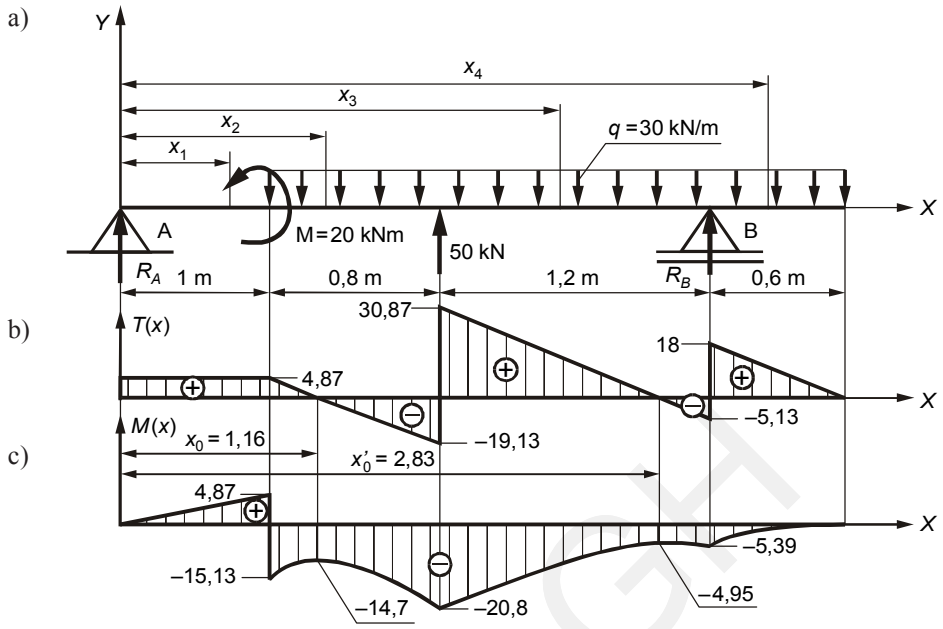
Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A + P + R_R - q \cdot 2{,}6 = 0,$$

skąd

$$R_B = 23{,}13 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B są zgodne z założonymi.



Rys. 2.18. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 1.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=1)} = 4{,}87 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 4{,}87 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=1)} = 4{,}87 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$1 \le x_2 \le 1{,}8.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A \cdot x - M - q\,\frac{(x_2 - 1)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2\,=\,1)} = -\,15{,}13 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2\,=\,1{,}8)} = -20{,}8 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - q(x_2 - 1)^2,$$

$$T_{(x2\,=\,1)} = 4{,}87 \text{ kN},$$

$$T_{(x2\,=\,1{,}8)} = -19{,}13 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$1{,}8 \le x_3 \le 3.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_A \cdot x_3 - M + P(x_3 - 1{,}8) - q\,\frac{(x_3 - 1)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3\,=\,1{,}8)} = -\,20{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3\,=\,3)} = -\,5{,}39 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - q(x_3 - 1) + P,$$

$$T_{(x3\,=\,1{,}8)} = 30{,}87 \text{ kN},$$

$$T_{(x3\,=\,3)} = -\,5{,}13 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$3 \le x_4 \le 3{,}6 \quad \text{(rozwiązanie od prawej strony)}.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = -q\,(3{,}6 - x_4)\,\frac{(3{,}6 - x_4)}{2} = -q\,\frac{(3{,}6 - x_4)^2}{2},$$

BG AGH

dla:

$$M_{(x4=3)} = -5{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{(x4=3{,}6)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = q(3{,}6 - x_4),$$

$$T_{(x4=3)} = 18 \text{ kN},$$

$$T_{(x4=3{,}6)} = 0.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim i trzecim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = R_A - q(x_2 - 1) = 0,$$

stąd

$$x_0 = 1{,}16 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = R_A \cdot x - M - q\frac{(x_2 - 1)^2}{2} = -14{,}7 \text{ kNm}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego w trzecim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą trzeciego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x3}}{dx} = T_{(x3)} = R_A - q(x_3 - 1) + P = 0,$$

stąd

$$x_0' = 2{,}83 \text{ m}.$$

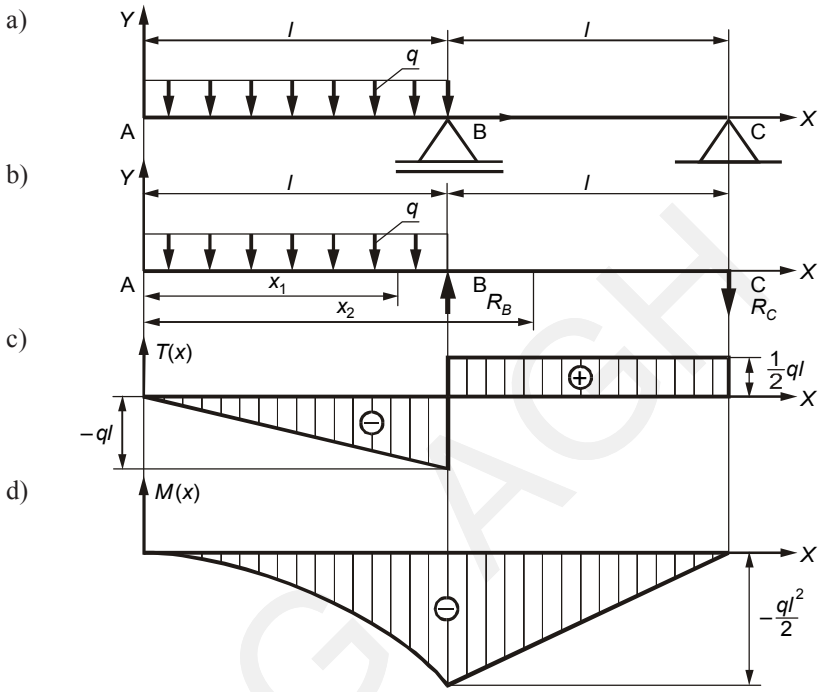
Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x3=x0)} = R_A \cdot x - M + P(x_x - 1{,}8) - q\frac{(x_3 - 1)^2}{2} = -4{,}95 \text{ kNm}.$$

BG AGH

Zadanie 19

Pozioma belka ABC o długości 2*l* (rys. 2.19), spoczywająca w środku długości na podporze rolkowej B i na podporze nieruchomej na końcu C, jest obciążona na części AB równomiernie rozłożonym obciążeniem o natężeniu *q*. Wyprowadzić wzory i sporządzić wykresy dla sił tnących i momentów gnących.



Rys. 2.19. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu C.

Obciążenie belki w przedziale AB zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest *ql* i przechodzi przez środek odcinka AB. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

Wtedy

$$\sum M_C = -ql\left(\frac{l}{2}+l\right)+R_B l = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{3}{2}\,ql.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_B jest taki, jak założono.

BGACH

$$\sum M_B = -ql\,\frac{l}{2} - R_C l = 0,$$

skąd

$$R_C = -\frac{1}{2}\,ql.$$

Znak ujemny dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_C jest przeciwny do założonego.

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -qx_1\,\frac{x_1}{2} = -q\,\frac{x_1^2}{2},$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = -\frac{ql^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l)} = -ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_2 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -ql\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) + R_B(x_2 - l),$$

czyli:

$$M_{(x2)} = -ql^2 + \frac{1}{2}\,qlx_2,$$

$$M_{(x2=l)} = -\frac{ql^2}{2},$$

$$M_{(x2=2l)} = 0,$$

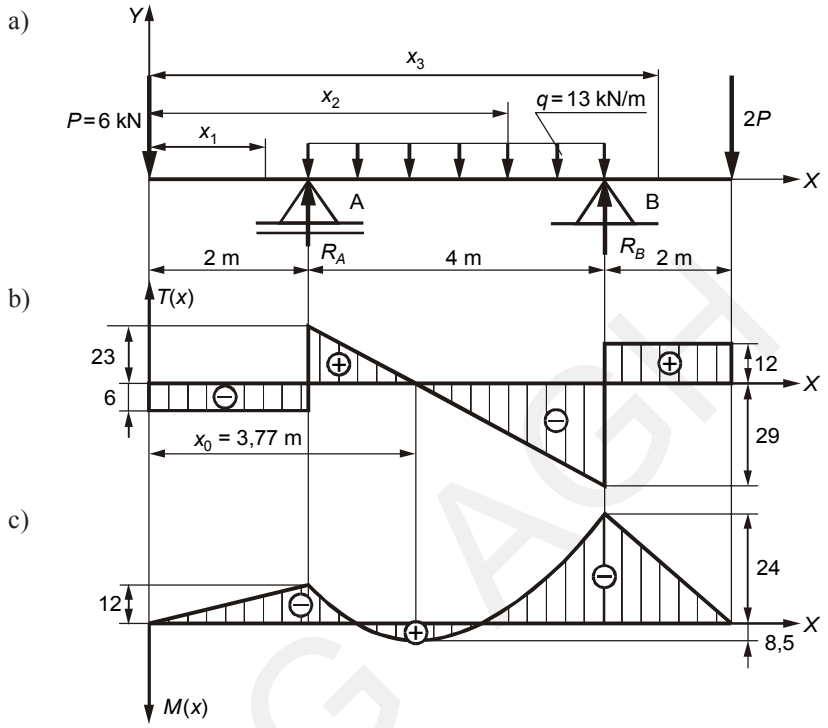
natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału

$$T_{(x2)} = -ql + R_B = -ql + \frac{3}{2}\,ql = \frac{ql}{2}.$$

BG AGH

Zadanie 20

Dla belki obciążonej jak na rysunku 2.20a wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące, i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.20b i 2.20c.



Rys. 2.20. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś *Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -P \cdot 2 + 4q \cdot 2 - R_B \cdot 4 + 2P \cdot 6 = 0,$$

skąd

$$R_B = 41 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś *Y* otrzymamy

$$\sum P_y = P + R_A - 4q + R_B - 2P = 0,$$

skąd

$$R_A = 29 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym.

BG AGH

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -Px_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2)} = -12 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -P,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = -6 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=2)} = -6 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2 \le x_2 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A(x_2 - 2) - q(x_2 - 2) \cdot \frac{(x_2 - 2)}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=2)} = -12 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=6)} = -24 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -P + R_A - q(x_2 - 2),$$

$$T_{(x2=2)} = 23 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=6)} = -29 \text{ kN}.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$6 \le x3 \le 8.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M(x3) = -P + R_A - 4q(x3 - 2) + R_B(x3 - 6),$$

dla:

$$M(x3 = 6) = -24 \text{ kNm},$$

$$M(x3 = 8) = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T(x3) = -P + R_A - 4q + R_B,$$

dla:

$$T(x3 = 6) = 12 \text{ kN},$$

$$T(x3 = 8) = 12 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = -q(x_2 - 2) - P + R_A = 0,$$

stąd

$$x_0 = 3{,}77 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = -Px_2 + R_A(x_2 - 2) - q(x_2 - 2) \cdot \frac{(x_2 - 2)}{2} = 8{,}35 \text{ kNm}.$$

Zadanie 21

Dla belki obciążonej jak na rysunku 2.21a wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.21b i 2.21c.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = M_0 + R_A \cdot 4 - 4q_1 \cdot 2 + 2q_2 \cdot 1 = 0,$$

skąd

$$R_B = -R_A + 10{,}4 = 81 \text{ kN}.$$

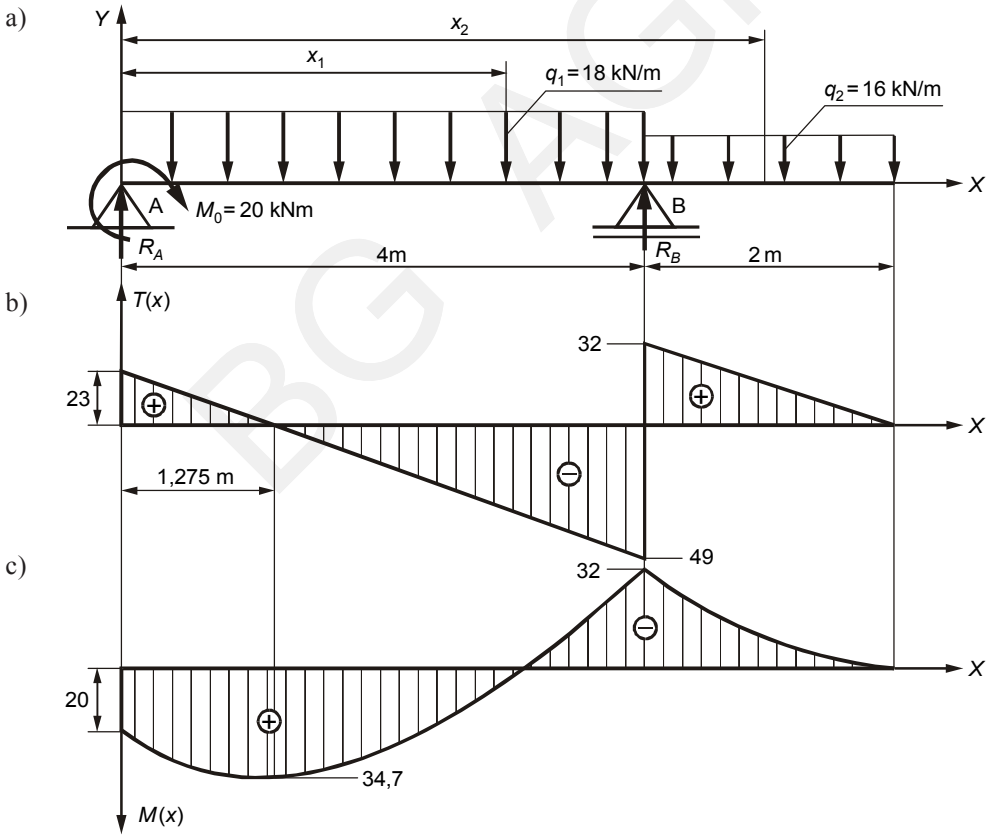
Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - 4q_1 + R_B - q_2 \cdot 2 = 0,$$

skąd

$$R_A = 23 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym.



Rys. 2.21. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 4.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = M_0 + R_A x_1 - q_1 \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 20 \text{ kNm},$$

$$M_{(x1=4)} = -32 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q_1 x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 23 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=4)} = -49 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$4 \le x_2 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = M_0 + R_A \cdot x_2 - 4q_1 \cdot (x_2 - 2) + R_B (x_2 - 4) - q_2 (x_2 - 4) \frac{(x_2 - 4)}{2},$$

$$M_{(x2)} = M_0 + R_A \cdot x_2 - 4q_1 \cdot (x_2 - 2) + R_B (x_2 - 4) - q_2 \frac{(x_2 - 4)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=4)} = -32 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=6)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - 4q_1 + R_B - q_2 (x_2 - 4),$$

$$T_{(x2=4)} = 32 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=6)} = 0.$$

BC AGH

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - q_1 x_1 = 0,$$

stąd

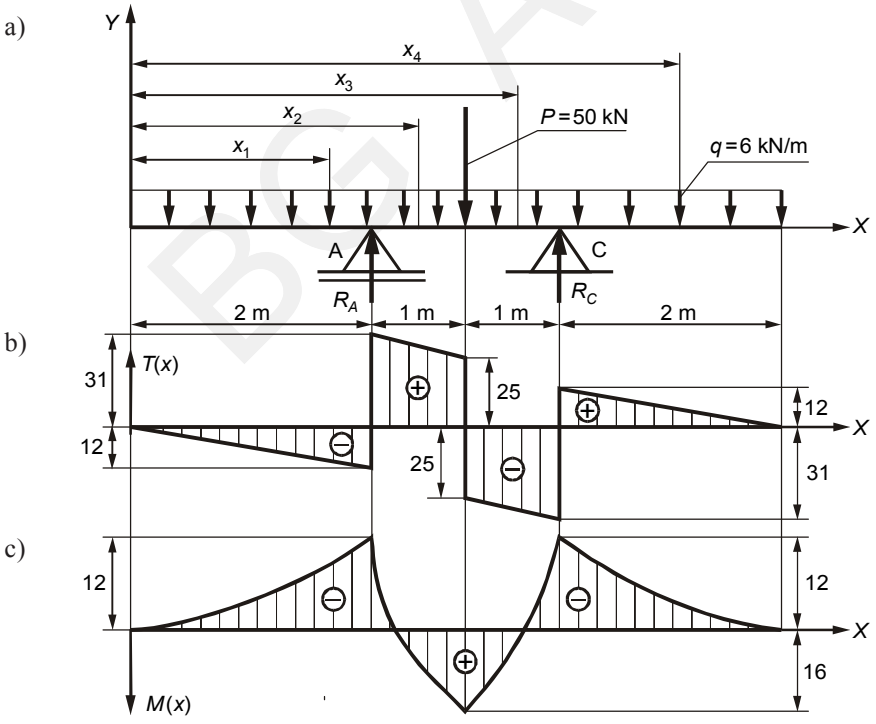
$$x_0 = 1{,}277 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = M_0 + R_A x_1 - q_1 \frac{x_1^2}{2} = 34{,}7 \text{ kNm}.$$

Zadanie 22

Dla belki obciążonej obciążeniem ciągłym jak na rysunku 2.22a, wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.22b i 2.22c.



Rys. 2.22. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BRAK

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu C, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie C korzystamy z sumy rzutów sił na oś *Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -2q \cdot 1 + P \cdot 1 - R_C \cdot 2 + 4q \cdot 2 = 0,$$

skąd

$$R_C = 43 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś *Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - P + R_C - 6q = 0,$$

skąd

$$R_A = 43 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_C jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2)} = -12 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=2)} = -12 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2 \le x_2 \le 3.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -\frac{qx_2^2}{2} + R_A(x_2 - 2),$$

dla:

$$M_{(x2=2)} = -12 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=3)} = 16 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qx_2 + R_A,$$

$$T_{(x2=2)} = 31 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=3)} = 25 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$3 \le x_3 \le 4.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -\frac{qx_2^3}{2} + R_A(x_3 - 2) - P(x_3 - 3),$$

dla:

$$M_{(x3=3)} = 16 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=4)} = -12 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -qx_3 + R_A - P,$$

$$T_{(x3=3)} = -25 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=4)} = -31 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$4 \le x_4 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = -\frac{qx_2^4}{2} + R_A(x_4 - 2) - P(x_4 - 3) + R_C(x_4 - 4),$$

dla:

$$M_{(x4=4)} = -12 \text{ kNm},$$

$$M_{(x4=6)} = 0,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

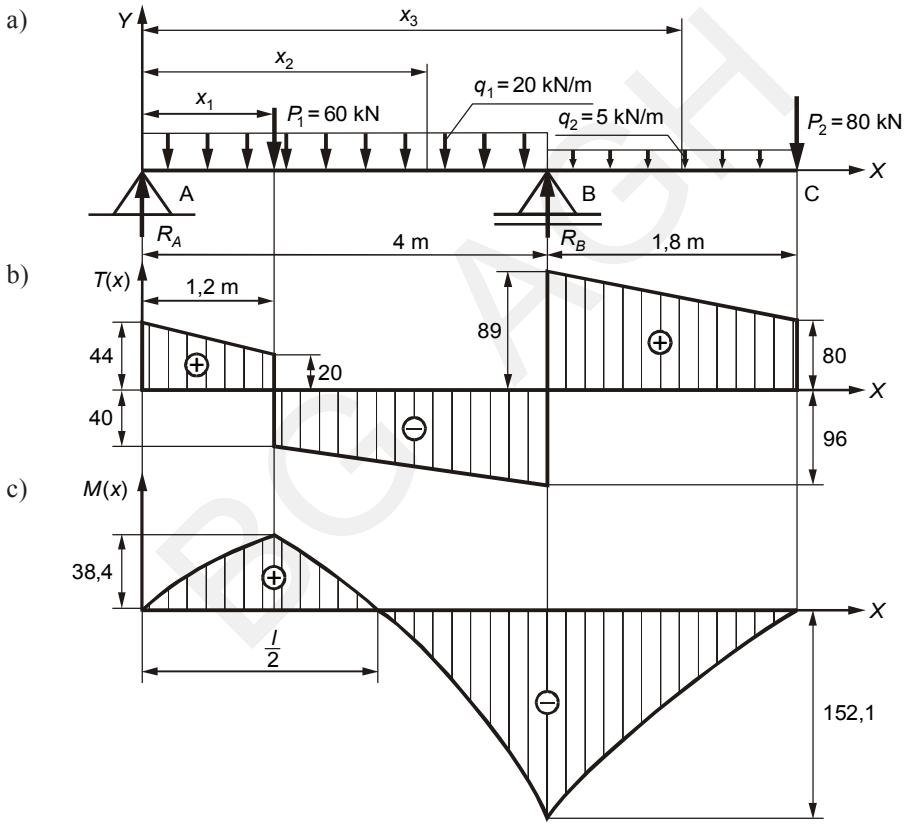
$$T_{(x4)} = -qx4 + R_A - P + R_C,$$

$$T_{(x4=4)} = 12 \text{ kN},$$

$$T_{(x4=6)} = 0.$$

Zadanie 23

Wykonać wykresy sił poprzecznych i momentów gnących dla belki obciążonej jak na rysunku 2.23a.



Rys. 2.23. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś *Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = P_1 \cdot 1{,}2 + q_1 \cdot 4 \cdot 2 - R_B \cdot 4 + q_2 \cdot 1{,}8 \cdot 4{,}9 + P_2 \cdot 5{,}8 = 0,$$

skąd

$$R_B = 185 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś Y otrzymamy:

$$\sum P_y = R_A - P_1 - q_1 4 + R_B - q_2 1{,}8 - P_2 = 0,$$

$$R_A = 44 \text{ kN}.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 1{,}2.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q x_1 \frac{1}{2} x_1 = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=1{,}2)} = 38{,}4 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 44 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=1{,}2)} = 20 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$1{,}2 \le x_2 \le 4.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - q_1 \frac{x^2}{2} - P(x_2 - 1{,}2),$$

dla:

$$M_{(x2=1{,}2)} = 38 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=4)} = -152 \text{ kNm},$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - q_1 x_2 - P,$$

$$T_{(x2=1,2)} = -40 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=4)} = -96 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$4 \le x_3 \le 5{,}8.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - q_1 l (x_3 - 2) + R_B (x_3 - 4) - P(x_3 - 1{,}2) - q_2 (x_3 - 4)\frac{x_3 - 4}{2},$$

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - q_1 l (x_3 - 2) + R_B (x_3 - 4) - P(x_3 - 1{,}2) - q_2 \frac{(x_3 - 4)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3=4)} = -152 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=5,8)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - ql + R_B - q_2(x_3 - 4) - P,$$

$$T_{(x3=4)} = 89 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=5,8)} = 80 \text{ kN}.$$

Zadanie 24

Dla belki przedstawionej na rysunku 2.24a opartej na podporach A i B, która jest obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q i $q_1 = 2q$ oraz siłą skupioną $P = 2qa$ sporządzić wykres momentów gnących i sił tnących.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś *Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -qa \cdot \frac{a}{2} + P \cdot a - R_B \cdot 2a + q_1 \cdot a \cdot \frac{5}{2}a = 0,$$

skąd

$$R_B = 3{,}25qa.$$

BG AGH

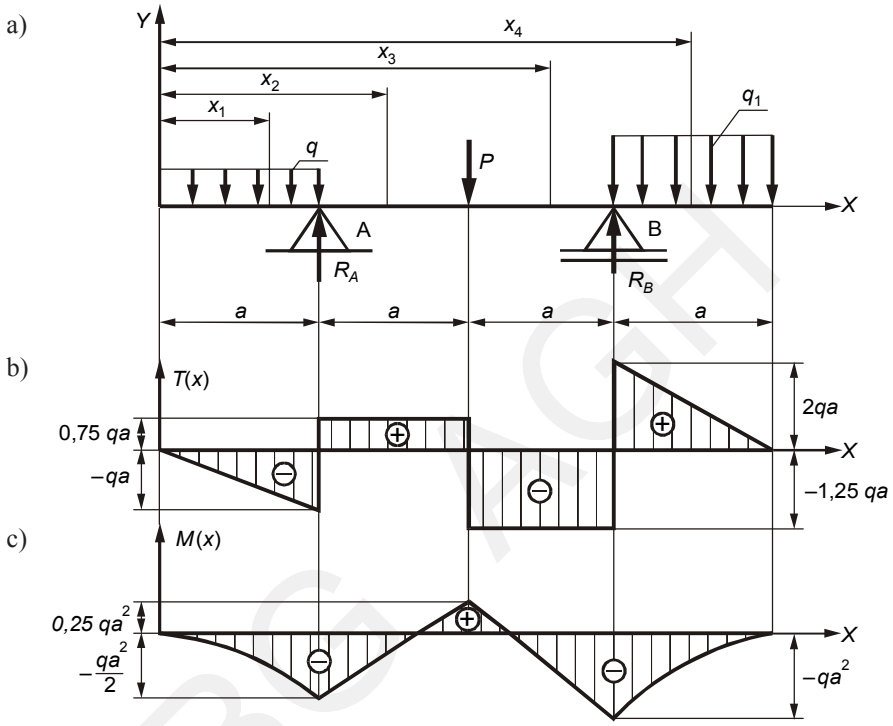
Wykorzystując sumę rzutów sił na oś Y otrzymamy

$$\sum P_y = -qa - P + R_A + R_B - q_1 a = 0,$$

skąd

$$R_A = 1{,}75qa.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_C jest zgodny z założonym.



Rys. 2.24. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q\frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=a)} = -qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x2 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -qa\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + R_A(x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

$$M_{(x2=2a)} = 0{,}25qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qa + R_A,$$

$$T_{(x2=a=2a)} = 0{,}75qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -qa\left(x_3 - \frac{a}{2}\right) + R_A(x_3 - a) - P(x_3 - 2a),$$

dla:

$$M_{(x3=2a)} = 0{,}25qa^2,$$

$$M_{(x3=3a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -qa + R_A - P,$$

$$T_{(x3=2a=3a)} = -1{,}25qa.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$3a \le x_4 \le 4a.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x4)} = -qa\left(x_4 - \frac{a}{2}\right) + R_A(x_4 - a) - P(x_4 - 2a) + R_B(x_4 - 3a) - \\ - q_1(x_4 - 3a)\frac{(x_4 - 3a)}{2},$$

$$M_{(x4 = 3a)} = -qa^2,$$

$$M_{(x4 = 4a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

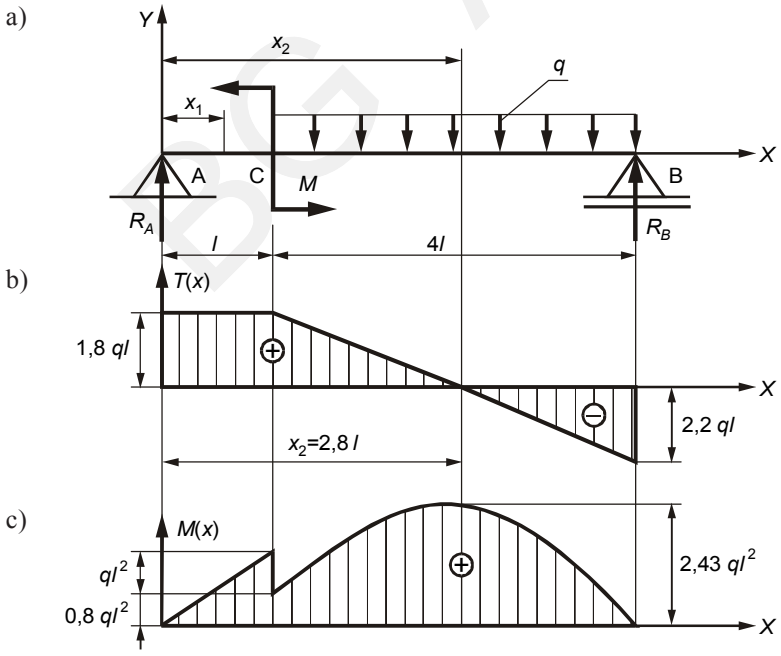
$$T_{(x4)} = -qa + R_A - P + R_B - 2q(x_4 - 3a),$$

$$T_{(x4 = 3a)} = 2qa,$$

$$T_{(x4 = 4a)} = 0.$$

Zadanie 25

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB podpartej obu końcami przegubowo i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q i momentem zginającym $M = ql^2$ w sposób pokazany na rysunku 2.25a.



Rys. 2.25. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

PG AGH

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Obciążenie belki w przedziale BC zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest $4ql$ i przechodzi przez środek odcinka BC. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M + 4ql3l - 5lR_B\, l = 0,$$

skąd:

$$R_B = 2{,}2ql,$$

$$\sum P\mathrm{y} = R_A - 4ql + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 4ql - R_B = 1{,}8ql.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 = 1{,}8qlx_1,$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = 0,$$

$$M_{(x1\,=\,l)} = 1{,}8ql,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1\,=\,0)} = 1{,}8ql,$$

$$T_{(x1\,=\,l)} = 1{,}8ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x2 \le 5l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - M - q\,(x_2 - l)\,\frac{(x_2 - l)}{2},$$

BG AGH

czyli:

$$M_{(x2)} = 1{,}8qlx_2 - ql^2 - q\,\frac{(x_2 - l)^2}{2},$$

$$M_{(x2 = l)} = 0{,}8ql^2,$$

$$M_{(x2 = 5l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = 1{,}8ql - q(x_2 - l),$$

$$T_{(x2 = l)} = 1{,}8ql,$$

$$T_{(x2 = 5l)} = -2{,}2ql.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej w drugim przedziale zmienia znak musi wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem, aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x2} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x2}

$$T_{(x2)} = 1{,}8ql - q(x_2 - l) = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_2 = 2{,}8l$. Uwzględniając tę wartość w funkcji M_{x2} otrzymamy

$$M_{x2\,\max} = 2{,}42ql^2.$$

Zadanie 26

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki podpartej przegubowo obu końcami i obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q oraz dwoma momentami zginającymi $M = \frac{ql^2}{12}$ (rys. 2.26).

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Obciążenie belki w przedziale AB zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest ql i przechodzi przez środek odcinka AB. Zwroty obu reakcji zakładamy, że są skierowane do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M + ql\,\frac{l}{2} + M - R_B l = 0,$$

skąd:

$$R_B = \frac{ql}{2},$$

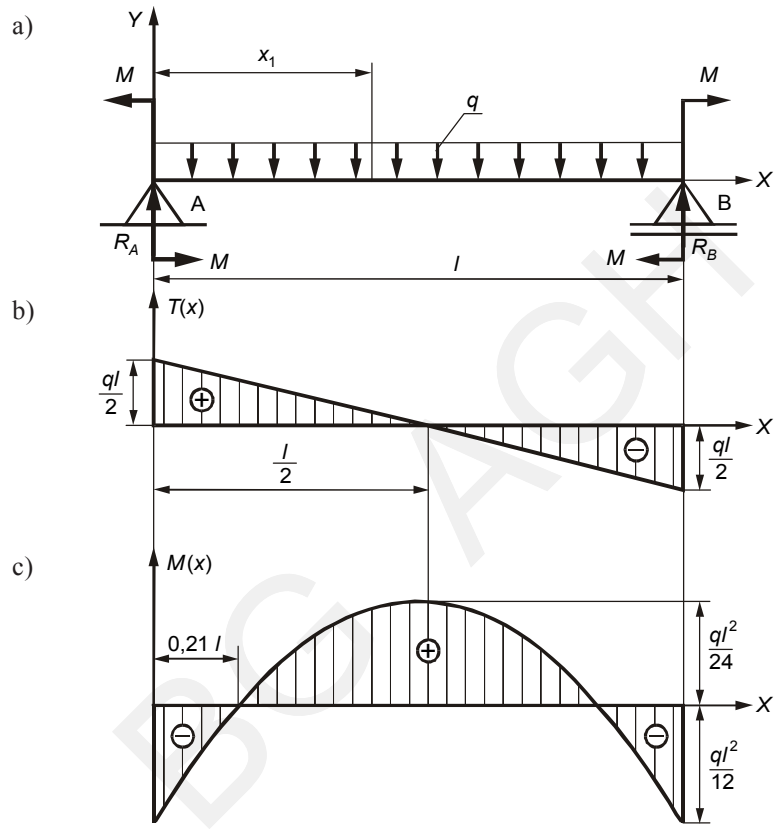
$$\sum P_y = R_A + R_B - ql = 0,$$

BC AGH

skąd

$$R_A = -\frac{ql}{2} + ql = \frac{ql}{2}.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.



Rys. 2.26. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce jeden przedział. Przedział ten będzie się zmieniał

$$0 \le x1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -M + R_A x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2},$$

$$M_{(x1)} = -M + R_A x_1 - q \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = -\frac{ql^2}{12},$$

$$M_{(x1=l)} = -\frac{ql^2}{12},$$

natomiast siła tnąca dla tego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{ql}{2},$$

$$T_{(x1\ =\ l)} = -\frac{ql}{2}.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej zmienia znak musi wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x1} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x1}

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1 = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_1 = 0{,}5l$. Uwzględniając tę wartość w funkcji Mx_1 otrzymamy

$$M_{x1\,\max} = \frac{ql^2}{24}.$$

Zadanie 27

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki podpartej obu końcami przegubowo i obciążonej wzdłuż całej swej długości równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q (rys. 2.27), zaś w środku długości belki momentem zginającym $M = \frac{ql^2}{8}$.

Rozwiązanie

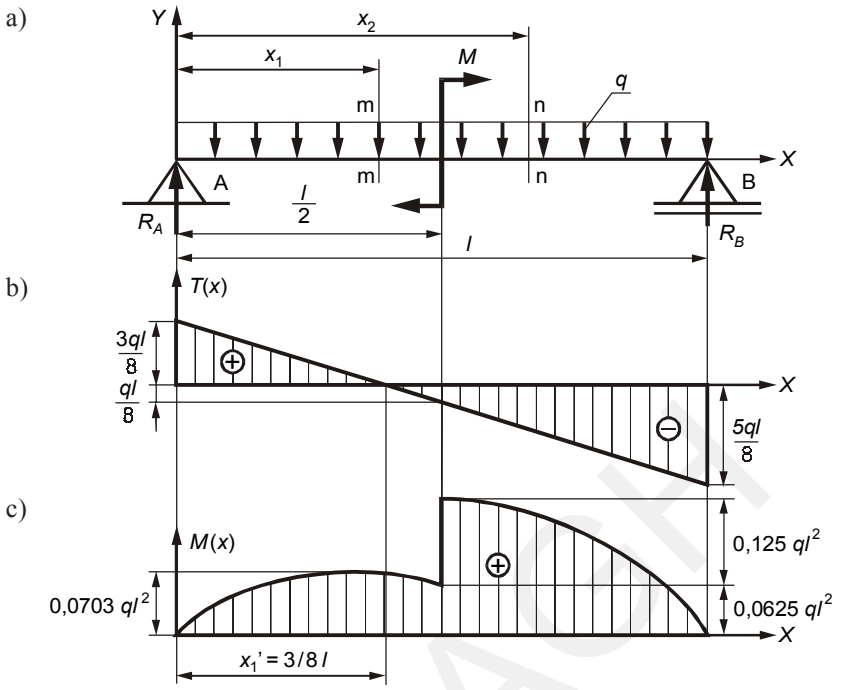
Wyznaczamy wartość reakcji. Reakcja R_A jest pionowa, ponieważ reakcja R_B oraz obciążenie ciągłe są pionowe. Równanie momentów względem punktu B przedstawia się następująco:

$$R_A l - \frac{ql^2}{2} + M = 0, \qquad R_A = \frac{3ql}{8}.$$

Równanie rzutów na kierunek pionowy ma postać:

$$R_A + R_B = ql, \qquad R_B = \frac{5ql}{8}.$$

BG AGH



Rys. 2.27. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Następnie przecinamy belkę w przekroju m–m o odciętej x_1. Siła tnąca w przekroju m–m

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

przy:

$$x_1 = 0, \qquad T_{(x1)} = \frac{3}{8}\,ql,$$

$$x_1 = \frac{l}{2}, \qquad T_{(x1)} = R_A - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8}.$$

Moment zginający w przekroju m–m

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2},$$

x_1 może przybierać wartości od 0 do $\frac{l}{2}$, i tak dla:

$$x_1 = 0, \qquad M_{(x1)} = 0,$$

$$x_1 = \frac{l}{2}, \qquad M_{(x1)} = \frac{ql^2}{16}.$$

Wyznaczamy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną i w tym celu przyrównujemy do zera siłę tnącą:

$$T_{(x1)} = R_A - \frac{2qx_1'}{2} = 0, \qquad x_1' = \frac{3}{8}\,l.$$

Podstawiając wartość x_1' do wyrażenia na moment zginający otrzymamy:

$$M_{\max} = \frac{9ql^2}{128}.$$

Przecinamy belkę w przekroju n–n o odciętej x_2.

Siła tnąca w tym przekroju:

$$T_{(x2)} = R_A - qx_2 = \frac{3ql}{8} - qx_2,$$

przy:

$$x_2 = \frac{l}{2}, \qquad T_{(x2)} = -\frac{ql}{8},$$

$$x_2 = l, \qquad T_{(x2)} = -\frac{5ql}{8},$$

moment zginający w przekroju n–n

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - \frac{qx_2^2}{2} + M = \frac{3qlx_2}{8} - \frac{qx_2^2}{2} + \frac{ql^2}{8},$$

x_2 może przybierać wartości od $l/2$ do l przy:

$$x_2 = \frac{l}{2}, \qquad M_{(x2)} = \frac{3ql^2}{16},$$

$$x_2 = l, \qquad M_{(x2)} = 0.$$

Aby znaleźć przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną przyrównamy do zera siłę tnącą:

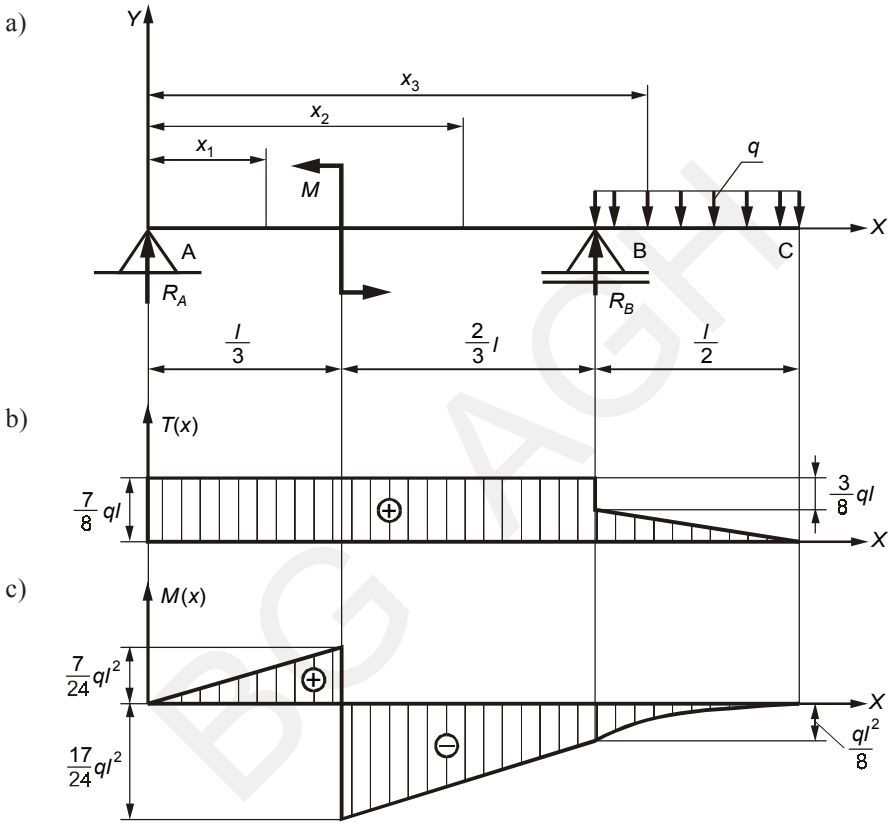
$$T_{(x2)} = \frac{3ql}{8} - qx_2' = 0, \qquad x_2' = \frac{3}{8}\,l.$$

W przedziale CB moment zginający nie posiada maksimum ponieważ x_2 nie może być mniejsze od $\frac{l}{2}$.

BG AGH

Zadanie 28

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki wspornikowej podpartej przegubowo w punktach A i B i obciążonej momentem zginającym M oraz równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q, jak pokazano na rysunku 2.28a. Zależność między M i q wynosi $\frac{M}{q} = l^2$.



Rys. 2.28. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY.

Obciążenie belki w przedziale BC zastępujemy wypadkową, która wobec równomierności rozłożenia obciążenia równa jest $q\frac{l}{2}$ i przechodzi przez środek odcinka BC. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.

BG AGH

Wtedy

$$\sum M_A = -M - R_B l + q\,\frac{l}{2}\,\frac{5}{4}l = 0,$$

skąd:

$$R_B = \frac{3}{8}\,ql,$$

$$\sum P_y = R_A + R_B - q\,\frac{l}{2} = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{7}{8}\,ql.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{3}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/3)} = \frac{7}{24}\,ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{7}{8}\,ql,$$

$$T_{(x1=l/3)} = \frac{7}{8}\,ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{3} \le x_2 \le l.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A\, x_2 - M,$$

$$M_{(x2=l/3)} = -\frac{17}{24}\, ql^2,$$

$$M_{(x2=l)} = -\frac{1}{8}\, ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A,$$

$$T_{(x2=l/3)} = \frac{7}{8}\, ql,$$

$$T_{(x2=l)} = \frac{7}{8}\, ql.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_3 \le \frac{3}{2}\, l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - M + R_B (x_3 - l) - q (x_3 - l)\, \frac{(x_3 - l)}{2},$$

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - M + R_B (x_3 - l) - q\, \frac{(x_3 - l)^2}{2},$$

$$M_{(x3=l)} = -\frac{1}{8}\, ql^2,$$

$$M_{(x3\,=3l/2)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

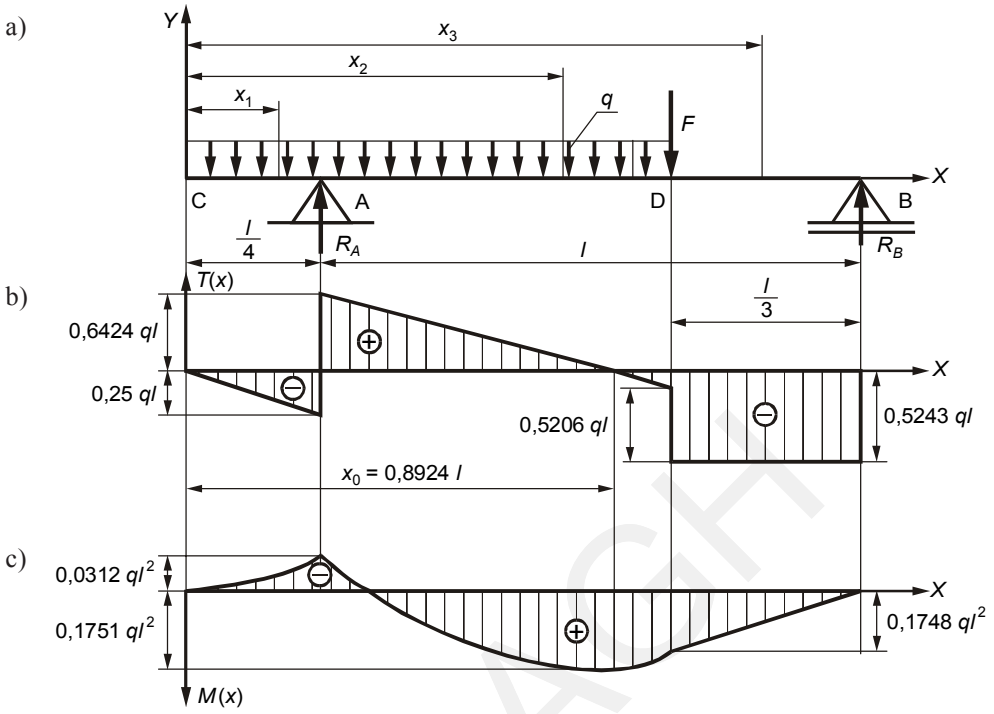
$$T_{(x3)} = R_A + R_B - q(x3 - l),$$

$$T_{(x3=l)} = \frac{1}{2}\, ql,$$

$$T_{(x2=3l/2)} = 0.$$

Zadanie 29

Na belkę podpartą w punktach A i B działa obciążenie ciągłe q oraz siła skupiona $F = \frac{ql}{2}$. Sporządzić wykres momentów gnących i sił tnących (rys. 2.29).



Rys. 2.29. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy:

$$\sum M_A = -q\,\frac{l}{4}\cdot\frac{l}{8} + q\,\frac{2}{3}\,l\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,l + F\,\frac{2}{3}\,l - R_B l = 0,$$

$$\sum M_A = -q\,\frac{1}{32}\,l + \frac{4}{18}\,ql + \frac{2}{6}\,ql - R_B l = 0,$$

skąd

$$R_B = 0{,}5243ql.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy:

$$\sum P_y = -q\left(\frac{1}{4}\,l + \frac{2}{3}\,l\right) - F + R_A + R_B = 0,$$

$$\sum P_y = -q\,\frac{11}{12}\,l - \frac{1}{2}\,ql + R_A + 0{,}5243 = 0,$$

skąd

$$R_A = 0{,}8924ql.$$

BG AGH

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{4}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -qx_1 \frac{x_1}{2} = -q \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/4)} = -0{,}0312ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla

$$T_{(x1=0=l/4)} = -\frac{1}{4}ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{4} \le x_2 \le \frac{11}{12}l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -q \frac{x_2^2}{2} + R_A\left(x_2 - \frac{1}{4}l\right) = -q \frac{x_2^2}{2} + 0{,}8924ql\left(x_2 - \frac{1}{4}l\right),$$

$$M_{(x2=l/4)} = -0{,}0312ql^2,$$

$$M_{(x2=11l/12)} = 0{,}1748ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qx_2 + R_B,$$

$$T_{(x2=l/4)} = 0{,}6424ql,$$

$$T_{(x2=11l/12)} = -0{,}0243ql.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{11}{12}l \le x_3 \le \frac{5}{4}l.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -q\,\frac{11}{12}\,l\left(x_3 - \frac{11}{24}\,l\right) + R_A\left(x_3 - \frac{1}{4}\,l\right) - F\left(x_3 - \frac{11}{12}\,l\right),$$

$$M_{(x3)} = -q\,\frac{11}{12}\,l\left(x_3 - \frac{11}{24}\,l\right) + 0{,}8924ql\left(x_3 - \frac{1}{4}\,l\right) -$$

$$-\,0{,}5ql\left(x_3 - \frac{11}{12}\,l\right),$$

$$M_{(x3\,=\,11l/12)} = -\,0{,}1748ql^2,$$

$$M_{(x3\,=\,5l/4)} = 0{,}1667ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$M_{(x3)} = -q\,\frac{11}{12}\,l + R_A - F = -\frac{11}{12}\,ql + 0{,}8924ql - 0{,}5ql,$$

$$T_{(x3\,=\,11l/12\,=\,5l/4)} = -\,0{,}5243ql.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = -qx_2 + R_B = 0,$$

stąd

$$x_0 = 0{,}8924l.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi:

$$M_{(x2\,=\,x0)} = -q\,\frac{x_2^2}{2} + R_A\left(x_2 - \frac{1}{4}\,l\right) = -q\,\frac{x_2^2}{2} + 0{,}8924ql\left(x_2 - \frac{1}{4}\,l\right),$$

$$M_{(x2\,=\,x0)} = 0{,}1751ql^2.$$

Zadanie 30

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki wspornikowej podpartej przegubowo w punktach B i C obciążonej równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q oraz parą sił o momencie zginającym $M = \frac{ql^2}{2}$ (rys. 2.30).

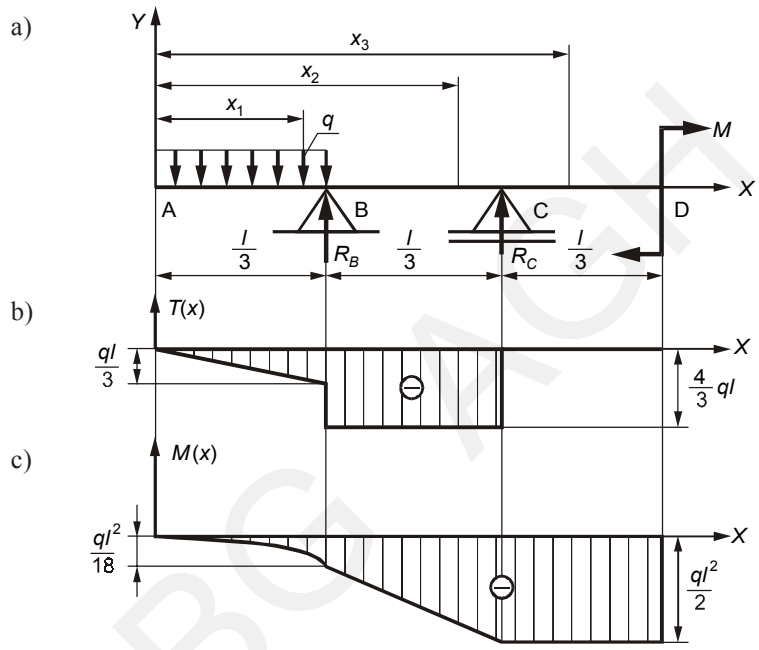
BG AGH

Rozwiązanie

Wyznaczamy reakcje podpór układając równanie momentów względem punktu C

$$\sum M_C = -\frac{ql}{3}\left(\frac{l}{6}+\frac{l}{3}\right)+R_B\frac{l}{3}+M=0,$$

$$R_B=\left(\frac{ql^2}{6}-\frac{ql^2}{2}\right)\frac{3}{l}=-ql.$$



Rys. 2.30. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rzutując siły na oś *y* otrzymamy:

$$\sum P_y = R_B + R_C - q\frac{l}{3}=0,$$

$$R_C = q\frac{l}{3}-R_B = q\frac{l}{3}+ql=\frac{4}{3}ql.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0\le x_1\le\frac{l}{3}.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -\frac{qx_1^2}{2},$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/3)} = -\frac{ql^2}{18},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l/3)} = -q\frac{l}{3}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{3} \le x_2 \le \frac{2l}{3}.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -q\frac{l}{3}\left(x_2 - \frac{l}{6}\right) + R_B\left(x_2 - \frac{l}{3}\right),$$

$$M_{(x2=l/3)} = -q\frac{l}{3}\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{6}\right) - ql\left(\frac{l}{3} - \frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{18},$$

$$M_{(x2=2l/3)} = -q\frac{l}{3}\left(2\frac{l}{3} - \frac{l}{6}\right) - ql\left(\frac{2l}{3} - \frac{l}{3}\right) = -\frac{ql^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -q\frac{l}{3} + R_B = -q\frac{l}{3} - ql = -\frac{4}{3}ql,$$

$$T_{(x2=l/3)} = -\frac{4}{3}ql,$$

$$T_{(x2=2l/3)} = -\frac{4}{3}ql.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{2l}{3} \le x_3 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -q\frac{l}{3}\left(x_3 - \frac{l}{6}\right) + R_B\left(x_3 - \frac{l}{3}\right) + R_C\left(x_3 - \frac{2l}{3}\right) =$$

$$= -q\,\frac{l}{3}\left(x_3 - \frac{l}{6}\right) + ql\left(x_3 - \frac{l}{3}\right) + \frac{4}{3}ql\left(x_3 - \frac{2l}{3}\right),$$

$$M_{(x3=2l/3)} = -\frac{ql^2}{2},$$

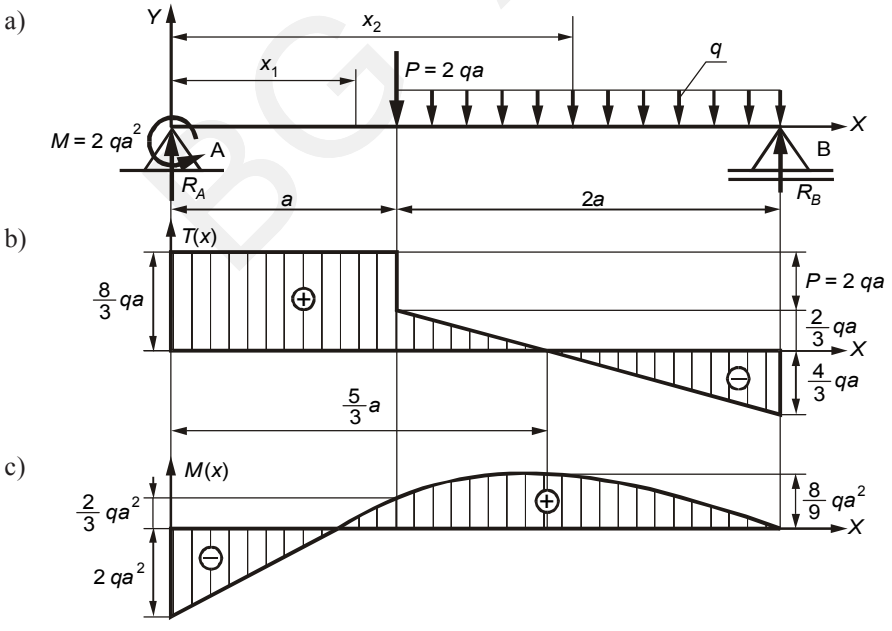
$$M_{(x3=l)} = -\frac{ql^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału wynosi

$$T_{(x3)} = -q\,\frac{l}{3} + R_B + R_C = -q\,\frac{l}{3} - ql + \frac{4}{3}\,ql = 0.$$

Zadanie 31

Wykonać wykresy sił tnących i momentów gnących dla belki przedstawionej na rysunku numer 2.31a.



Rys. 2.31. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy reakcje w punktach podparcia R_A i R_B z warunków równowagi wszystkich sił zewnętrznych, działających na belkę.

$$\sum M_A = -M + Pa + 4qa^2 - R_B 3a = 0,$$

$$R_B = \frac{4}{3} qa,$$

$$\sum M_B = -M - P2a - 2qa^2 + R_A 3a = 0,$$

$$R_A = \frac{8}{3} qa.$$

W belce wyodrębnimy dwa przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -M + R_A x_1 = -2qa^2 + \frac{8}{3} qax_1,$$

$$M_{(x1=0)} = -2qa^2,$$

$$M_{(x1=a)} = \frac{2}{3} qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = R_A = \frac{8}{3} qa,$$

$$T_{(x1=0)} = \frac{8}{3} qa,$$

$$T_{(x1=a)} = \frac{8}{3} qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -M + R_A x_2 - P(x_2 - a) - \frac{1}{2} q(x_2 - a)^2,$$

$$M_{(x2=a)} = \frac{2}{3} qa^2,$$

$$M_{(x2=3a)} = 0,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P - q(x_2 - a) = \frac{2}{3} qa - q(x_2 - a),$$

$$T_{(x2=a)} = \frac{2}{3} qa,$$

$$T_{(x2=3a)} = -\frac{4}{3} qa.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej w drugim przedziale zmienia znak, musi wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem, aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x2} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x2}

$$T_{(x2)} = \frac{2}{3} qa - q(x_2 - a) = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_2 = \frac{5}{3} a$. Uwzględniając tę wartość w funkcji M_{x2} otrzymamy

$$M_{\max} = \frac{8}{9} qal^2.$$

Zadanie 32

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.32a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.32b i 2.32c. Dane: $M_1 = 2qa^2$, $M_2 = qa^2$.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_1 + q \cdot 4a \cdot 3a - R_B \cdot 4a - M_2 = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{9}{4} qa.$$

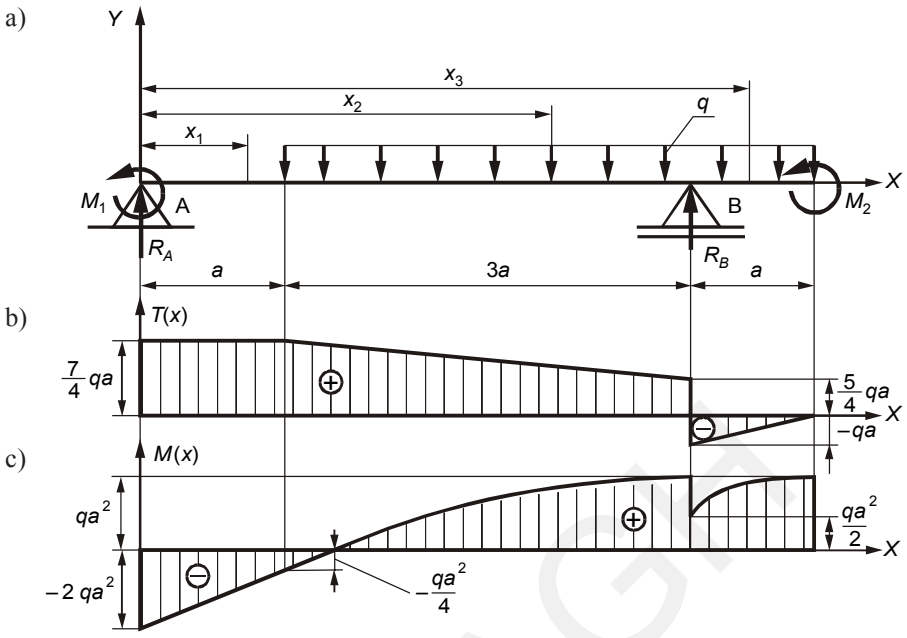
Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - 4qa + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{7}{4} qa.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.



Rys. 2.32. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -M + R_A \cdot x_1,$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = -2qa^2,$$

$$M_{(x1=a)} = -\frac{1}{4}qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1\,=\,0)} = \frac{7}{4}qa,$$

$$T_{(x1\,=\,a)} = \frac{7}{4}qa.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 4a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -M + R_A \cdot x_2 - q(x_2 - a)\frac{(x_2 - a)}{2},$$

$$M_{(x2)} = -M + R_A \cdot x_2 - q\frac{(x_2 - a)^2}{2}$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = -\frac{1}{4}qa^2,$$

$$M_{(x2=4a)} = qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - q(x_2 - a),$$

$$T_{(x2=a)} = \frac{7}{4}qa,$$

$$T_{(x2=4a)} = -\frac{5}{4}qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$4a \le x_3 \le 5a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = M_2 - q(5a - x_3)\frac{(5a - x_3)}{2},$$

$$M_{(x3)} = M_2 - q\frac{(5a - x_3)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3=4a)} = \frac{1}{2}qa^2,$$

$$M_{(x3=5a)} = qa_2,$$

BC AGH

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

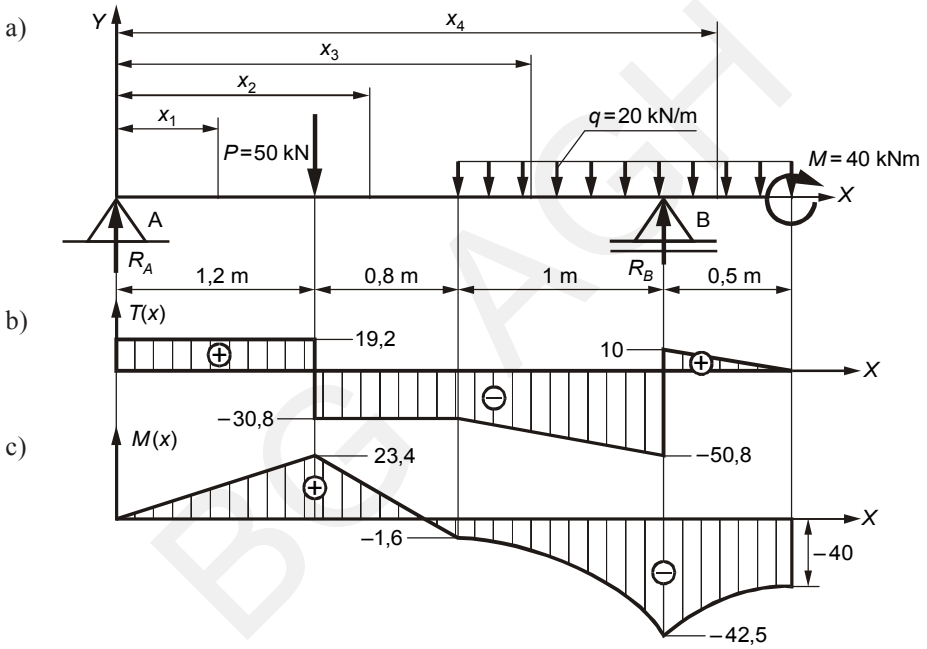
$$T_{(x3)} = -q(5a - x_3),$$

$$T_{(x3=4a)} = -qa,$$

$$T_{(x3=5a)} = 0.$$

Zadanie 33

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.33a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.33b i 2.33c.



Rys. 2.33. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = P \cdot 1{,}2 + q \cdot 1 \cdot 2{,}5 - R_B \cdot 3 + q \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}25 + M = 0,$$

skąd

$$R_B = 60{,}8 \text{ kN}.$$

BIBLIOTEKA

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - P - q \cdot 1{,}5 + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 19{,}2 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 1{,}2.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A \cdot x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=1{,}2)} = 23{,}04 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 19{,}2 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=1{,}2)} = 19{,}2 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$1{,}2 \le x_2 \le 2.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P(x_2 - 1{,}2),$$

dla:

$$M_{(x2=1{,}2)} = 23{,}04 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=2)} = -1{,}6 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2=1{,}2)} = -30{,}8 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=2)} = -30{,}8 \text{ kN}.$$

BC AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2 \le x_3 \le 3.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - 1{,}2) - q(x_3 - 2)\,\frac{(x_3 - 2)}{2},$$

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - 1{,}2) - q\,\frac{(x_3 - 2)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3=2)} = -\,1{,}6 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=3)} = -\,42{,}4 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - P - q(x_3 - 2),$$

$$T_{(x3=2)} = -\,30{,}8 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=3)} = -\,50{,}8 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$3 \le x_4 \le 3{,}5.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x4)} = R_A x_4 - P(x_4 - 1{,}2) - q(x_4 - 2)\,\frac{(x_4 - 2)}{2} + R_B(x_4 - 3),$$

$$M_{(x4)} = R_A x_4 - P(x_4 - 1{,}2) - q\,\frac{(x_4 - 2)^2}{2} + R_B(x_4 - 3),$$

dla:

$$M_{(x4=3)} = -\,42{,}4 \text{ kNm},$$

$$M_{(x4=3{,}5)} = -\,39{,}9 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = R_A - P - q(x_4 - 2) + R_B,$$

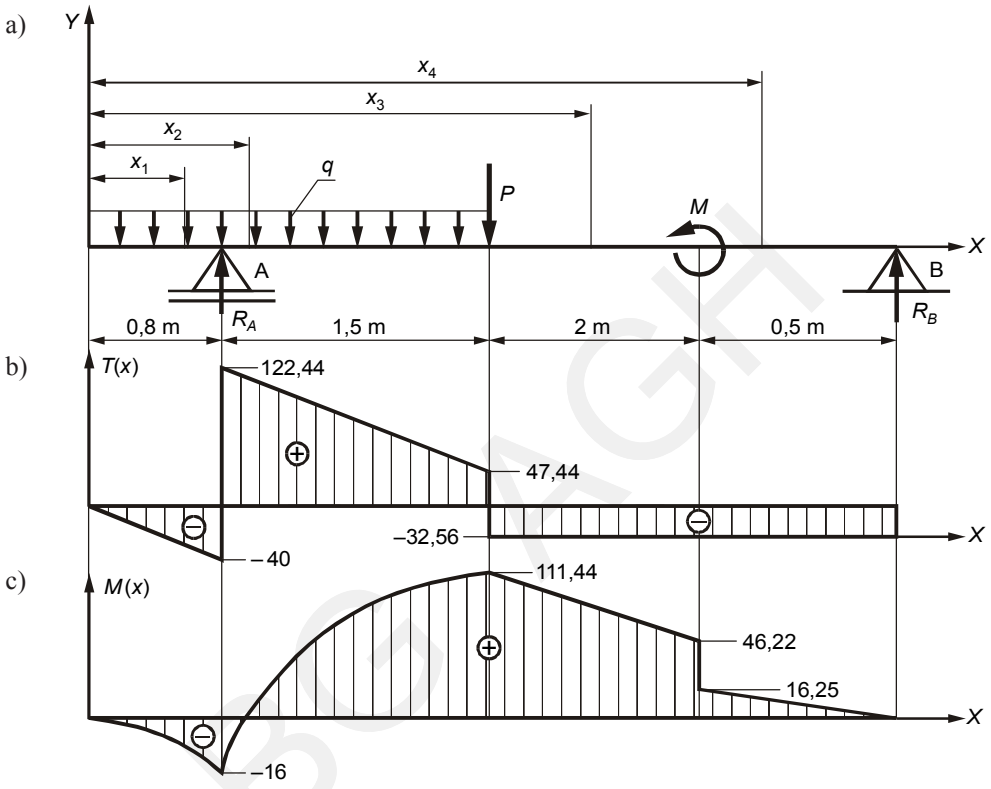
$$T_{(x4=3)} = 10 \text{ kN},$$

$$T_{(x4=3{,}5)} = 0.$$

BG AGH

Zadanie 34

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.34a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.34b i 2.34c. $P = 80$ kN, $q = 50$ kN/m, $M = 30$ kNm.



Rys. 2.34. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -q \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}4 + P \cdot 1{,}5 + q \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}75 - M - R_B \cdot 4 = 0,$$

skąd

$$R_B = 32{,}56 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - q \cdot 2{,}3 - P + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 162{,}44 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym. Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 0{,}8.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q \frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=0{,}8)} = -16 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=0{,}8)} = -40 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$0{,}8 \le x_2 \le 2{,}3.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -q \frac{x_2^2}{2} + R_A(x_2 - 0{,}8),$$

dla:

$$M_{(x2=0{,}8)} = -16 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=2{,}3)} = 111{,}41 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qx_2 + R_A,$$

$$T_{(x2=0{,}8)} = 122{,}44 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=2{,}3)} = 47{,}44 \text{ kN}.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2{,}3 \le x_3 \le 4{,}3.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -2{,}3 \cdot q(x_3 - 1{,}15) + R_A(x_3 - 0{,}8) - P(x_3 - 2{,}3),$$

dla:

$$M_{(x3 = 2{,}3)} = 111{,}41 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3 = 4{,}3)} = 46{,}29 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -2{,}3q + R_A - P,$$

$$T_{(x3 = 2{,}3)} = -32{,}56 \text{ kN},$$

$$T_{(x3 = 4{,}3)} = -32{,}56 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$4{,}3 \le x_4 \le 4{,}8. \quad \text{(rozwiązanie od prawej strony)}.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = R_B(4{,}8 - x_4),$$

dla:

$$M_{(x4 = 4{,}3)} = 16{,}28 \text{ kNm},$$

$$M_{(x4 = 4{,}8)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = -R_B,$$

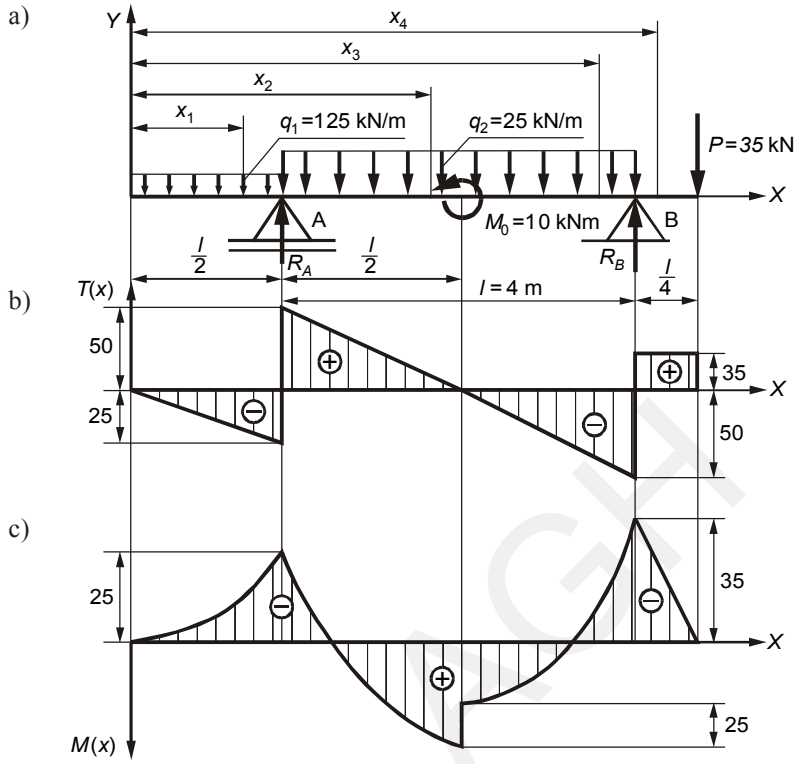
$$T_{(x4 = 4{,}3)} = -32{,}56 \text{ kN},$$

$$T_{(x4 = 4{,}8)} = -32{,}56 \text{ kN}.$$

Zadanie 35

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.35a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.35b i 2.35c.

BC AGH



Rys. 2.35. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -q_1 \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - M_0 + q_2 l \cdot \frac{l}{2} - R_B l + P \cdot \frac{5}{4} l = 0,$$

skąd

$$R_B = 85 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = -q \frac{l}{2} + R_A - 2ql + R_B - P = 0,$$

skąd

$$R_A = -R_B + 160 = 75 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q\,\frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = -25 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -q_1 x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l/2)} = -25 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -q_1\,\frac{l}{2}\,(x_2 - 1) + R_A(x_2 - 2) - q_2\,\frac{\left(x_2 - \frac{l}{2}\right)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = -25 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=l)} = 25 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -\frac{q_1 l}{2} + R_A - q_2\left(x_2 - \frac{l}{2}\right),$$

$$T_{(x2=l/2)} = 50 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=l)} = 0.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_3 \le \frac{3}{2} l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -q_1 \frac{l}{2}(x_3 - 1) + R_A(x_3 - 2) - q_2 \frac{\left(x_3 - \frac{l}{2}\right)^2}{2} - M,$$

dla:

$M_{(x3 = l)} = 15$ kNm,

$M_{(x3 = 3l/2)} = -35$ kNm,

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -\frac{q_1 l}{2} + R_A - q_2\left(x_3 - \frac{l}{2}\right),$$

$T_{(x3 = l)} = 0,$

$T_{(x3 = 3l/2)} = -50$ kN.

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$\frac{3l}{2} \le x_4 \le \frac{7l}{4}.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = -q_1 \frac{l}{2}(x_4 - 1) + R_A(x_4 - 2) - q_2 l(x_4 - 4) - \\ - M + R_B(x_4 - 6),$$

dla:

$M_{(x4 = 3l/2)} = -35$ kNm,

$M_{(x4 = 7l/4)} = 0,$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = -\frac{q_1 l}{2} + R_A - q_2 l + R_B,$$

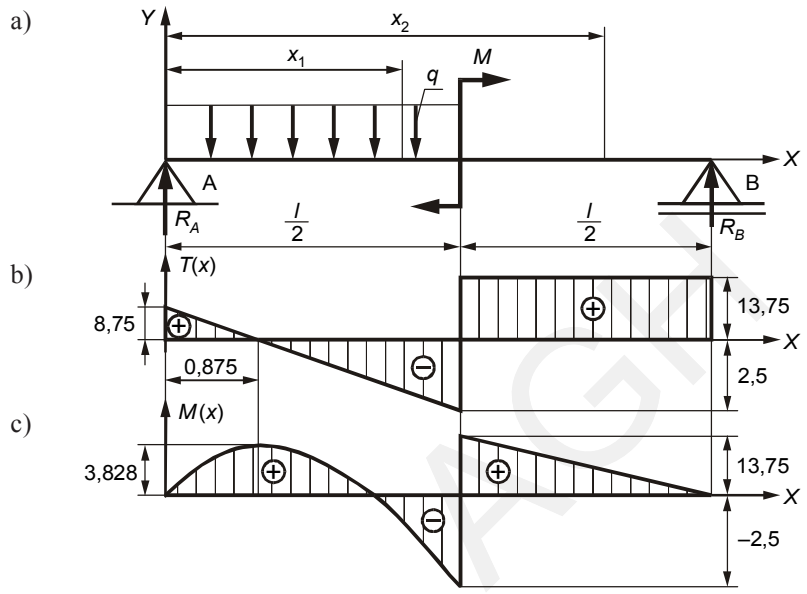
$T_{(x4 = 3l/2)} = 35$ kN,

$T_{(x4 = 7l/4)} = 35$ kN.

BG AGH

Zadanie 36

Belka o długości $l = 4$ m podparta przegubowo oboma końcami na podporach A i B jest obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym $q = 10$ kN/m oraz momentem zginającym $M = 25$ kNm. Sporządzić wykres momentów gnących i sił tnących dla belki przedstawionej na rysunku 2.36a.



Rys. 2.36. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy momentów względem punktu B. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot l + M - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3}{4} l = 0,$$

skąd

$$R_A = 8{,}75 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum M_A = -R_B \cdot l + M + \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0,$$

skąd

$$R_B = 11{,}250 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q\,\frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = -2{,}5 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = R_A = 8{,}75 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=l/2)} = -11{,}25 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l/2 \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A \cdot x_2 - \frac{ql}{2}\left(x_2 - \frac{l}{4}\right) + M,$$

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = 13{,}75 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - \frac{ql}{2} + M,$$

$$T_{(x2=l/2=l)} = 13{,}75 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

BG AGH

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - qx_1 = 0,$$

stąd

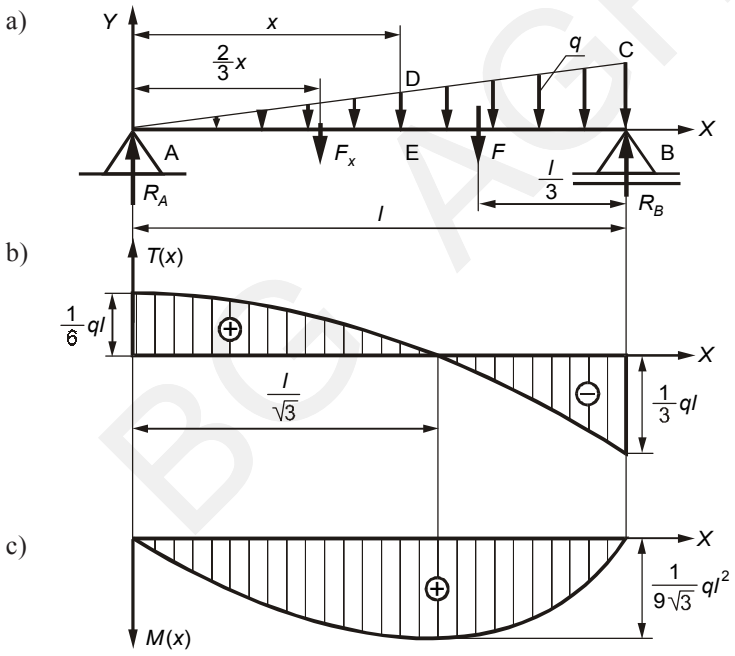
$$x_1 = 0{,}875 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_A x_1 - q\,\frac{x_1^2}{2} = 3{,}828 \text{ kNm}.$$

Zadanie 37

Wykonać wykresy sił poprzecznych i momentów zginających dla belki podpartej swobodnie obu końcami i obciążonej obciążeniem ciągłym zmieniającym się liniowo od zera na podporze A do wartości q na podporze B. Belkę przedstawia rysunek 2.37a.



Rys. 2.37. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Siły rozłożone w sposób ciągły zastępujemy wypadkową F przechodzącą przez środek trójkąta ABC.

$$F = \frac{1}{2}\,ql.$$

Następnie wyznaczamy reakcje podpór A i B

$$\sum M_B = R_A l - \frac{1}{2} ql \frac{2}{3} l = 0,$$

skąd:

$$R_A = \frac{1}{6} ql,$$

$$\sum M_A = R_B l - \frac{1}{2} ql \frac{2}{3} l = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{1}{3} ql.$$

W dowolnej odległości x od lewej podpory A natężenie obciążenia ciągłego wynosi $q_{(x)} = \frac{q \cdot x}{l}$ stąd siły rozłożone na długości x możemy zastąpić wypadkową $F_{(x)}$ przechodzącą przez środek ciężkości trójkąta AED

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot q_{(x)} \cdot x,$$

dla przekroju o odciętej x moment gnący wyrazi się w postaci równania

$$M_{(x)} = R_A x - F_{(x)} \frac{1}{3} x = \frac{1}{6} qlx - \frac{1}{6} \frac{qx^3}{l},$$

natomiast siła poprzeczna

$$T_{(x)} = R_A - F_{(x)} = \frac{1}{6} ql - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{l}.$$

Maksymalny moment gnący wystąpi w przekroju, dla którego:

$$\frac{dM_{(x)}}{dx} = T_{(x)} = 0,$$

$$\frac{1}{6} ql - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{l} = 0,$$

stąd wyliczamy

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

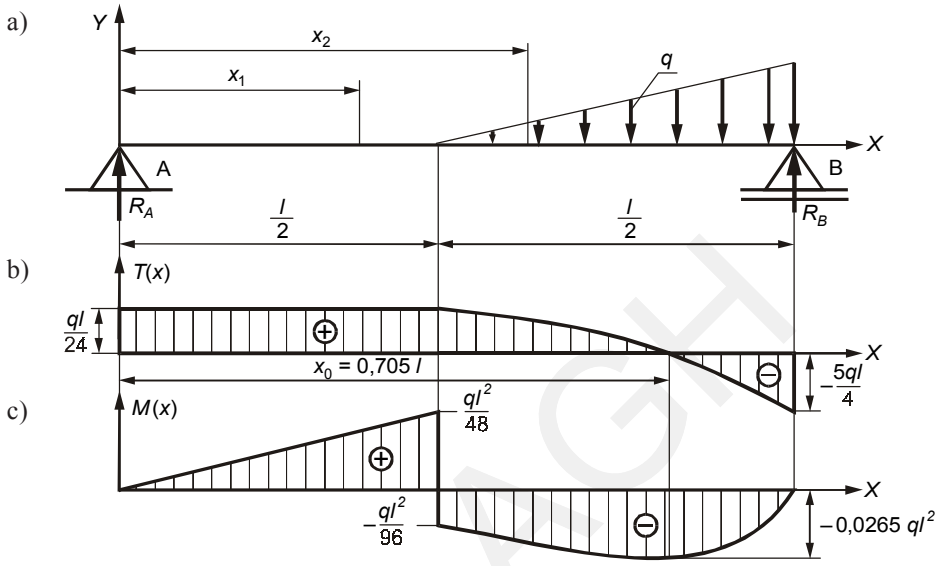
Natomiast gdy $x = x_0$, moment maksymalny wynosi

$$M_{\max} = M_{(x=x0)} = \frac{1}{6} qlx_0 - \frac{1}{6} \frac{qx^3}{l} = \frac{1}{9} \sqrt{3} ql^2.$$

BG AGH

Zadanie 38

Dla belki wolnopodpartej i obciążonej jak na rysunku 2.38a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.38b i 2.38c.



Rys. 2.38. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{1}{24} ql.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - \frac{1}{2} q \frac{l}{2} + R_B = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{5}{24} ql.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A\, x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = \frac{1}{48}\, ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A\ ,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{1}{24}\, ql,$$

$$T_{(x1=l/2)} = \frac{1}{24}\, ql,$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) q_{(X)}\, \frac{1}{3}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right),$$

$$M_{(x2)} = q\left(-\frac{5}{24}\, l x_2 - \frac{x_2^3}{3l} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{l_2^2}{24}\right),$$

gdzie

$$q_{(x)} = \frac{2qx_2}{l} - q,$$

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = -\frac{1}{96}\, ql^2,$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = q\left(-\frac{5}{24}\,l - \frac{x_2^2}{l} + x_2\right),$$

$$T_{(x2=l/2)} = \frac{1}{24}\,ql,$$

$$T_{(x2=l)} = -\frac{5}{24}\,ql.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = q\left(-\frac{5}{24}\,l - \frac{x_2^2}{l} + x_2\right) = 0,$$

stąd

$$x_0 = 0{,}705l.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = R_A x_2 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) q_{(X)} \frac{1}{3}\left(x_2 - \frac{l}{2}\right) = 0{,}0265ql^2.$$

Zadanie 39

Podać wzory i wykresy sił tnących i momentów gnących dla belki AB podpartej swobodnie w obu końcach i obciążonej na lewej połowie obciążeniem ciągłym, zmieniającym się liniowo od zera na podporze A do natężenia q w środku długości belki, jak pokazano na rysunku 2.39a.

Rozwiązanie

Najpierw wyznaczamy reakcje w punktach podparcia R_A i R_B z warunków równowagi wszystkich sił zewnętrznych, działających na belkę. Przy wyznaczaniu R_A i R_B, możemy wszystkie siły rozłożone zastąpić wypadkową, której wartość określona jest polem trójkąta ADC

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2}\, q = \frac{ql}{4},$$

i która przechodzi przez jego środek ciężkości, a więc w odległości $\frac{2}{3}\,\frac{l}{2}$ od punktu A i $\frac{1}{3}\,\frac{l}{2}$ od C, wówczas

$$\sum M_B = R_A l - q\frac{l}{4}\left(\frac{l}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{l}{2}\right) = 0,$$

skąd

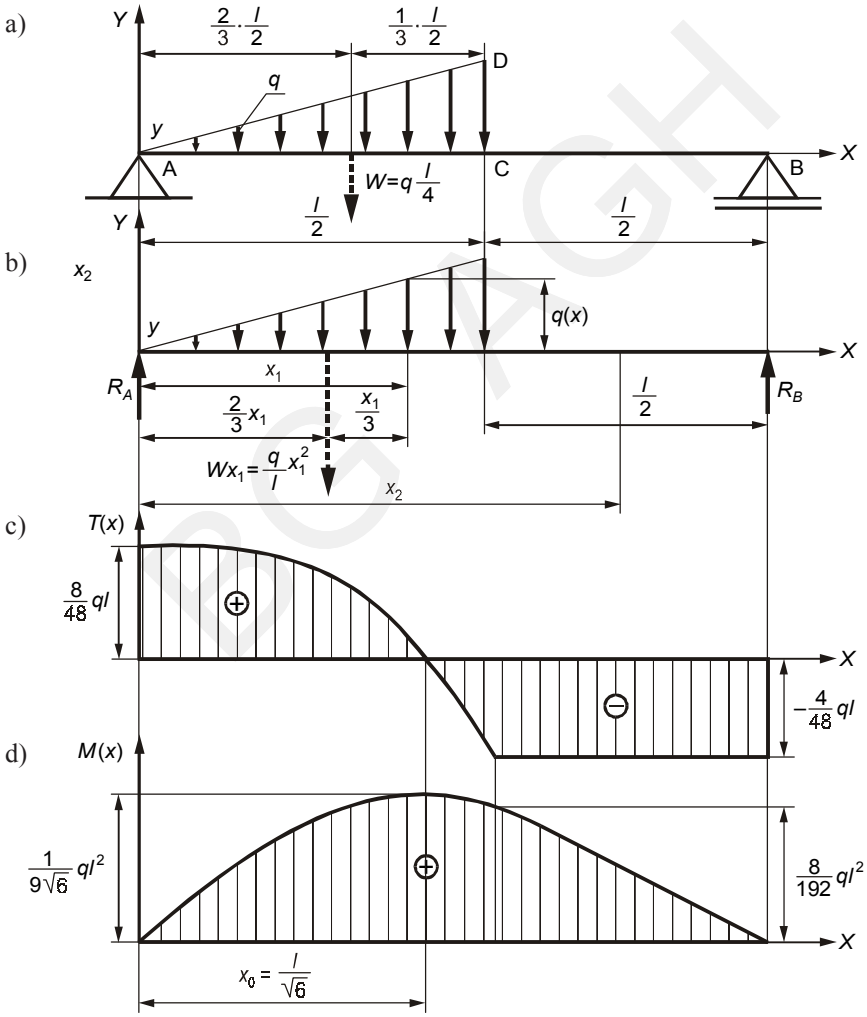
$$R_A = \frac{ql}{6},$$

suma rzutów sił na oś Y wynosi

$$\sum P_y = R_A - \frac{ql}{4} + R_B = \frac{ql}{6} - \frac{ql}{4} + R_B = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{ql}{12}.$$



Rys. 2.39. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

AGH

Przy wyznaczaniu T_{x1} i M_{x1} w dowolnie obranym przekroju o odciętej x_1 nie możemy jak wyżej zastąpić wszystkich rozłożonych sił jedną wypadkową W, gdyż teraz należy wziąć tylko siły działające na odcinku x_1 lub tylko na odcinku $(l - x_1)$. Natomiast możemy zastąpić jedną wypadkową W_x siły rozłożone na odcinku x_1. Natężenie q_x tych sił znajdziemy z podobieństwa trójkątów:

$$\frac{q_{(x1)}}{q} = \frac{x_1}{\frac{l}{2}}, \qquad q_{(x1)} = 2q\left(\frac{x_1}{l}\right),$$

a więc wypadkowa W_{x1} jest równa

$$W_{x1} = \frac{q_{(x1)}x_1}{2} = \frac{2qx_1x_1}{2l} = x_1^2\left(\frac{q}{l}\right),$$

i przechodzi przez środek ciężkości trójkąta, a więc w odległości $\frac{2}{3}x_1$ od A i $\frac{1}{3}x_1$ od końca odcinka x_1.

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - W_{x1}\left(\frac{x_1}{3}\right) = \frac{ql}{6}x_1 - x_1^2\left(\frac{q}{l}\right)\left(\frac{x_1}{3}\right) = \frac{q}{6l}\left(l^2x_1 - 2x_1^3\right),$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = \frac{8}{192}ql^2 = \frac{1}{24}ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = R_A - W_{x1} = \frac{ql}{6} - x_1^2\frac{q}{l} = \frac{q}{6l}\left(l^2 - 6x_1^2\right),$$

$$T_{(x1=0)} = \frac{8}{48}ql = \frac{1}{6}ql,$$

$$T_{(x1=l/2)} = -\frac{4}{48}ql = -\frac{1}{12}ql.$$

BG AGH

Dla wyznaczenia sił tnących i momentów gnących w dowolnie obranym przekroju w drugiej części belki, rozpatrzymy siły działające na prawą część belki oddzieloną tym przekrojem.

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_B(l - x_2) = \frac{ql}{12}(l - x_2),$$

$$M_{(x2=l/2)} = \frac{8}{192} ql^2 = \frac{1}{24} ql^2,$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -R_B = -\frac{ql}{12}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - W_{(x1)} = \frac{ql}{6} - x_1^2 \frac{q}{l} = \frac{ql}{6}\left(l^2 - 6x_1^2\right) = 0,$$

stąd

$$x_0 = \frac{l}{\sqrt{6}} \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

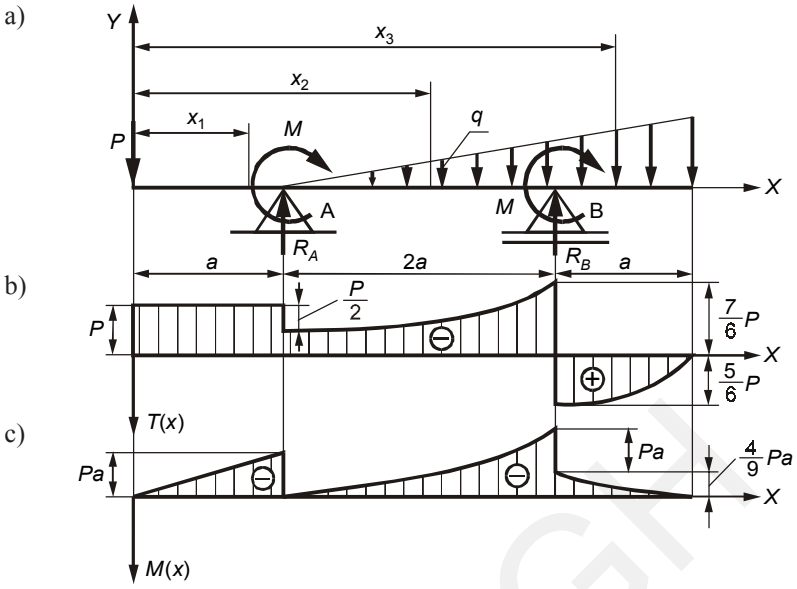
$$M_{(x1=x0)} = \frac{q}{6l}\left(l^2 x_1 - 2x_1^3\right) = \frac{1}{9\sqrt{6}} ql^2.$$

Zadanie 40

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki obciążonej siłą skupianą $P = qa$, dwoma momentami skupionymi $M = Pa$ i zmieniającym się liniowo obciążeniem ciągłym $q = P/a$, jak pokazano na rysunku 2.40a.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy momentów względem punktu B. Zwroty obu reakcji zakładamy do góry.



Rys. 2.40. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wtedy

$$\sum M_A = Pa - M - M + R_B 2a - 3qa^2 = 0,$$

skąd

$$R_B = 2P,$$

$$\sum M_B = 3Pa - R_A\, 2a - M - M = 0,$$

skąd

$$R_A = \frac{P}{2}.$$

Znaki dodatnie dowodzą, że rzeczywiste zwroty reakcji R_A i R_B są poprawnie przyjęte.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -Px_1,$$

dla:

$$M_{(x1\,=\,0)} = 0,$$

$$M_{(x1\,=\,a)} = -Pa,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -P,$$

dla:

$$T_{(x1=0=a)} = -P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A(x_2 - a) + M - \frac{1}{2}\, q_{(x)}(x_2 - a) \cdot \frac{1}{3}\,(x_2 - a),$$

gdzie

$$q_{(x)} = \frac{q(x_2 - a)}{3a},$$

czyli:

$$M_{(x2)} = -Px_2 + R_A(x_2 - a) + M - q\,\frac{(x_2 - a)^3}{18a},$$

$$M_{(x2=a)} = 0,$$

$$M_{(x2=3a)} = -\frac{13Pa}{9},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -P + R_A - \frac{q(x_2 - a)^2}{6a},$$

$$T_{(x2=a)} = -\frac{P}{2},$$

$$T_{(x2=3a)} = -\frac{7P}{6}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$3a \le x_3 \le 4a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -Px_3 + R_A(x_3 - a) + R_B(x_3 - 3a) -$$

$$-\frac{1}{2}\, q_{(x)}(x_3 - a) \cdot \frac{1}{3}\,(x_3 - a) + M + M,$$

gdzie

$$q_{(x)} = \frac{q(x_3 - a)}{3a},$$

BG AGH

czyli

$$M_{(x3)} = -Px_3 + R_A(x_3 - a) + R_B(x_3 - 3a) - q\,\frac{(x_3 - a)^3}{18a} + 2M,$$

$$M_{(x3=3a)} = -\frac{4Pa}{9},$$

$$M_{(x3=4a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x3)} = -P + R_A + R_B - \frac{q(x_3 - a)^2}{6a},$$

$$T_{(x3=3a)} = \frac{5P}{6},$$

$$T_{(x3=4a)} = 0.$$

Zadanie 41

Dla belki obciążonej jak na rysunku 2.41a wyznaczyć reakcje podpór oraz sporządzić wykresy sił tnących i momentów gnących dla: $P_1 = 40$ kN, $P_2 = 50$ kN, $P_3 = 30$ kN, $q_1 = 30$ kN/m, $q_2 = 10$ kN/m, $q_3 = 40$ kN/m, $M_1 = 120$ kNm, $M_2 = 150$ kNm.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy pod uwagę sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy momentów względem punktu A. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot 10 + P_1 \cdot 14 - M_1 - q_1 \cdot 6 \cdot 11 - P_2 \cdot 8 + M_2 -$$
$$- q_2 \cdot 6 \cdot 3 - \frac{(q_3 - q_2)6}{2} \cdot 2 + \frac{q_3 \cdot 3}{2} \cdot 1 + P_3 \cdot 3 = 0,$$

skąd

$$R_A = 200 \text{ kN},$$

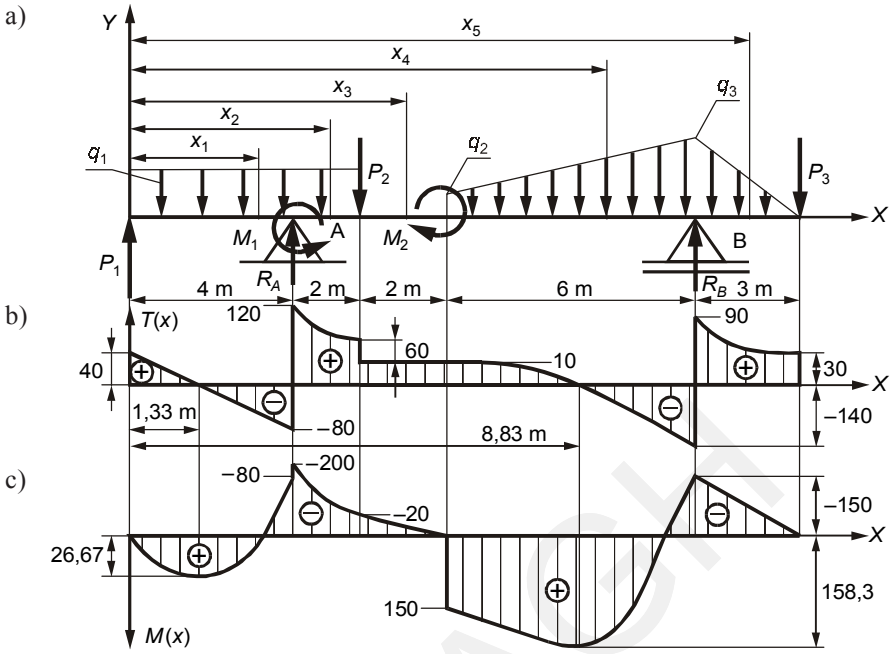
$$\sum M_A = -R_B \cdot 10 + P_3 \cdot 13 + \frac{q_3 \cdot 3}{2} \cdot 11 + \frac{(q_3 - q_2) \cdot 6}{2} \cdot 8 +$$
$$+ q_2 \cdot 6 \cdot 7 + M_2 + P_2 \cdot 2 - q_1 \cdot 6 \cdot 1 - M_1 + P_1 \cdot 4 = 0,$$

skąd

$$R_B = 230 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_B jest zgodny z założonym.

BG AGH



Rys. 2.41. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce pięć przedziałów.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 4.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = P_1 x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=4)} = -80 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = P_1 - q_1 x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 40 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=4)} = -80 \text{ kN}.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$4 \le x_2 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = P_1 \cdot x_2 + R_A(x_2 - 4) - M_1 - \frac{q_1 \cdot x_2^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=4)} = -200 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=6)} = -20 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = P_1 + R_A - q_1 x_2,$$

$$T_{(x2=4)} = 120 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=6)} = 60 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$6 \le x_3 \le 8.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = P_1 \cdot x_3 + R_A(x_3 - 4) - M_1 - q_1 \cdot 6(x_3 - 3) - P_2(x_3 - 6),$$

dla:

$$M_{(x3=6)} = -20 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=8)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = P_1 + R_A - 6q_1 - P_2,$$

$$T_{(x3=6)} = 10 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=8)} = 10 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$8 \le x_4 \le 14.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = P_1 \cdot x_4 - M_1 - 6q_1(x_4 - 3) + R_A(x_4 - 4) - P_2(x_4 - 6) + \\ + M_2 - \frac{q_2(x_4 - 8)^2}{2} - \frac{(q_3 - q_2) \cdot (x_4 - 8)^3}{6 \cdot 6},$$

dla:

$M_{(x4 = 8)} = 150$ kNm,

$M_{(x4 = 14)} = -150$ kNm,

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = P_1 + R_A - 6q_1 - P_2 - q_2(x_4 - 8) - \frac{(q_3 - q_2) \cdot (x_4 - 8)^2}{2 \cdot 6},$$

$T_{(x4 = 8)} = 10$ kN,

$T_{(x4 = 14)} = -140$ kN.

5) Piąty przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_5 \le 3.$$

Ogólne równanie momentów dla piątego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x5)} = -\left(P_3 \cdot x_5 + \frac{q_3 \cdot x_5^3}{6 \cdot 3} \right),$$

dla:

$M_{(x5 = 0)} = 0$,

$M_{(x5 = 3)} = -150$ kNm,

natomiast siła tnąca dla piątego przedziału:

$$T_{x5} = P_3 + \frac{q_3 \cdot x_5^2}{2 \cdot 3},$$

$T_{(x5 = 0)} = 30$ kN,

$T_{(x5 = 3)} = 90$ kN.

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym oraz w czwartym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

BG AGH

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = P_1 - q_1 x_1 = 0,$$

stąd

$$x_{0\ \text{dla}\ 1} = 1{,}33\ \text{m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1 = x0)} = P_1 x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2} = 26{,}26\ \text{kNm}.$$

Taki sam schemat przyjmujemy dla przedziału czwartego i tak

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x4)} = P_1 + R_A - 6q_1 - P_2 - q_2(x_4 - 8) - \\ - \frac{(q_3 - q_2)\cdot(x_4 - 8)^2}{2 \cdot 6},$$

stąd

$$x_{0\ \text{dla}\ 4} = 8{,}83\ \text{m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x4 = x0)} = 158{,}30\ \text{kNm}.$$

Zadanie 42

Belka AD, pokazana na rysunku 2.42a, jest podparta przegubowo na podporach B i C i obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym q oraz momentem zginającym $M = \frac{ql^2}{4}$. Sprawdzić poprawność wykonania wykresów momentów gnących i sił tnących.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie C, bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś Y. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = -\frac{ql}{2}\cdot\frac{l}{4} - R_C \cdot l + M = 0,$$

skąd

$$R_C = \frac{ql}{8}.$$

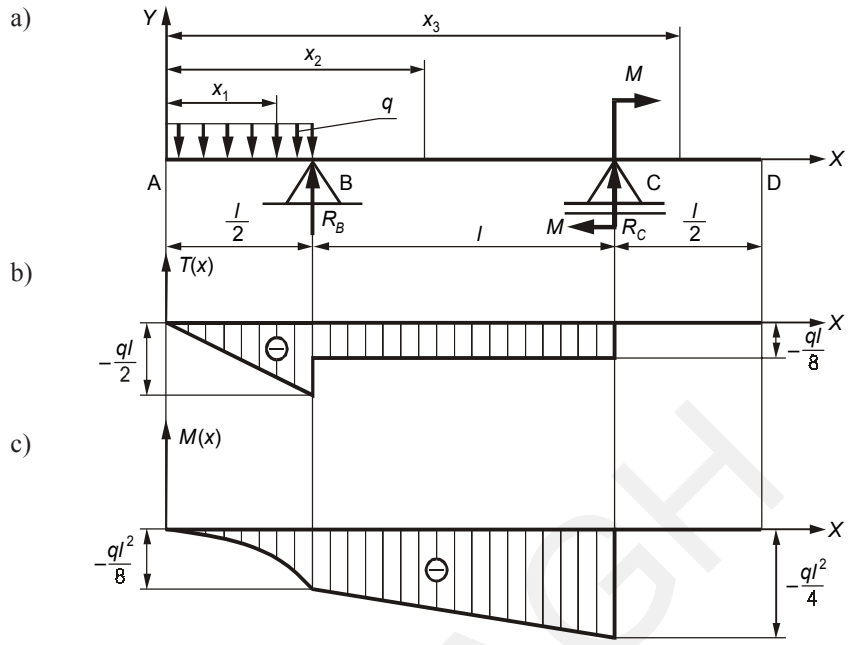
Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = -\frac{ql}{2} + R_B + R_C = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{3}{8}ql.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A i R_C jest zgodny z założonym.



Rys. 2.42. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q\,\frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = -\frac{ql^2}{8},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l/2)} = -\frac{ql}{2}.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le \frac{3}{2} l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -\frac{ql}{2}\left(x_2 - \frac{l}{4}\right) + R_B\left(x_2 - \frac{l}{2}\right),$$

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = -\frac{ql^2}{8},$$

$$M_{(x2=3l/2)} = -\frac{1}{4} ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -\frac{ql}{2} + R_B,$$

$$T_{(x2=l/2)} = -\frac{1}{8} ql,$$

$$T_{(x2=3l/2)} = -\frac{1}{8} ql.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$\frac{3}{2} l \le x_3 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -\frac{ql}{2}\left(x_3 - \frac{l}{4}\right) + R_B\left(x_3 - \frac{l}{2}\right) + R_C\left(x_3 - \frac{3}{2} l\right) + M,$$

dla:

$$M_{(x3 = 3l/2)} = 0,$$

$$M_{(x3 = 2l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -\frac{ql}{2} + R_B + R_C,$$

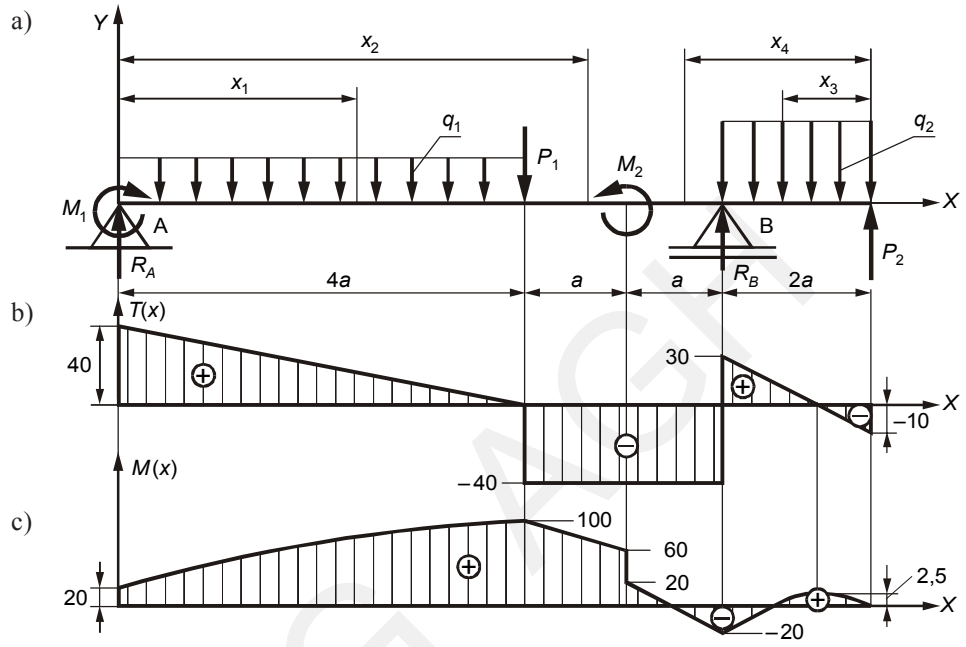
$$T_{(x3 = 3l/2)} = 0,$$

$$T_{(x3 = 2l)} = 0.$$

BG AGH

Zadanie 43

Belka ABC obciążona jest w sposób ciągły jak na rysunku 2.43a. Siły zewnętrzne są następujące: $M_1 = 20$ kNm, $M_2 = 40$ kNm, $P_1 = 40$ kN, $P_2 = 10$ kN, $a = 1$ m i obciążenia rozłożone w sposób ciągły $q_1 = 10$ kN/m, $q_2 = 20$ kN/m. Wykonać wykresy siły tnącej i momentu zginającego.



Rys. 2.43. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Obliczenia rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji podporowych z równań równowagi dla całej belki. Równania te są następujące

$$\sum M_B = -R_A \cdot 6a - M_1 + q_1 \cdot 4a \cdot 4a + P_1 \cdot 2a + M_2 + \\ + P_2 \cdot 2a - q_2 \cdot 2a \cdot a = 0,$$

skąd:

$$R_A = 40 \text{ kN},$$

$$\sum P_y = R_A + R_B - q_1 \cdot 4a - P_1 - q_2 \cdot 2a \cdot a = 0,$$

skąd

$$R_B = 70 \text{ kN}.$$

BG AGH

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 4a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q_1 \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + M_1,$$

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q_1 \frac{{x_1}^2}{2} + M_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 20 \text{ kNm},$$

$$M_{(x1=4a)} = -100 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q_1 \cdot x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 40 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=4a)} = 0.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$4a \le x_2 \le 5a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A \cdot x_2 - q_1 \cdot 4a \cdot (x_2 - 2a) - P_1 \cdot (x_2 - 4a) + M_1,$$

dla:

$$M_{(x2=4a)} = 100 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=5a)} = 60 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - q_1 \cdot 4a - P_1,$$

$$T_{(x2=4a)} = -40 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=5a)} = -40 \text{ kN}.$$

BG AGH

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_3 \le 2a \quad \text{(rozwiązanie od końca belki).}$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = P_2 \cdot x_2 - \frac{1}{2} q_2 \cdot x_3^2,$$

dla:

$$M_{(x3=0)} = 0,$$

$$M_{(x3=2a)} = -20 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -P_2 + q_2 \cdot x_3,$$

$$T_{(x3=0)} = -10 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=2a)} = 30 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_4 \le 3a \quad \text{(rozwiązanie od końca belki).}$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = P_2 \cdot x_4 + q_2 \cdot 2a \cdot (x_4 - a) + R_B(x_4 - 2a),$$

dla:

$$M_{(x4=2a)} = -20 \text{ kNm},$$

$$M_{(x4=3a)} = 20 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = -P_2 + q_2 \cdot 2a - R_B,$$

$$T_{(x4=2a)} = -40 \text{ kN},$$

$$T_{(x4=3a)} = -40 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w trzecim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą trzeciego przedziału do zera.

BG AGH

Ponieważ

$$\frac{dM_{x3}}{dx} = T_{(x3)} = -P_2 + q_2 \cdot x_3 = 0,$$

stąd

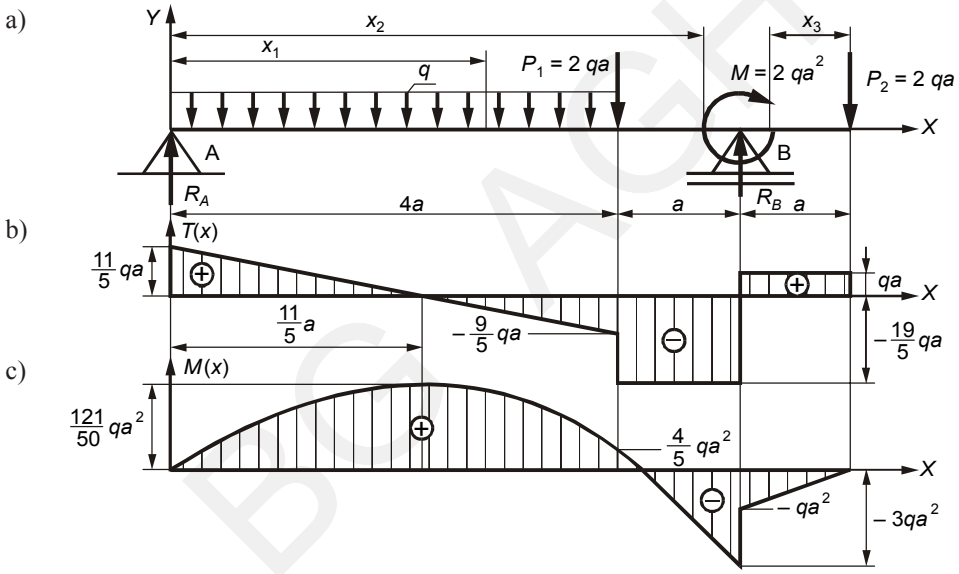
$$x_0 = 0{,}5 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x3=x0)} = P_2 \cdot x_2 - \frac{1}{2} q_2 \cdot x_3^2 = 7{,}5 \text{ kNm}.$$

Zadanie 44

Dla swobodnie podpartej belki przedstawionej na rysunku 2.44a wykonać wykresy siły tnącej $T_{(x)}$ i momentu gnącego $M_{(x)}$.



Rys. 2.44. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Obliczenia rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji podporowych z równań równowagi dla całej belki. Równania te są następujące

$$\sum M_A = -q \cdot 2a \cdot 4a - 2qa \cdot 4a - 2qa^2 + R_B \cdot 5a - qa \cdot 6a = 0,$$

skąd:

$$R_B = \frac{24}{5}\ qa,$$

$$\sum P_y = R_A + R_B - q \cdot 4a - 2qa - qa = 0,$$

BC AGH

skąd

$$R_A = \frac{11}{5}\, qa.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 4a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} + M_1,$$

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q_1 \cdot \frac{x_1^2}{2} + M_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=4a)} = \frac{4}{5}\, qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - q \cdot x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = \frac{11}{5}\, qa,$$

$$T_{(x1=4a)} = -\frac{9}{5}\, qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$4a \le x_2 \le 5a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A \cdot x_2 - q \cdot 4a\,(x_2 - 2a) - P_1(x_2 - 4a),$$

dla:

$$M_{(x2=4a)} = \frac{4}{5}\, qa^2,$$

$$M_{(x2=5a)} = -3qa_2,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - q \cdot 4a - P_1,$$

$$T_{(x2=4a)} = -\frac{19}{5}\, qa,$$

$$T_{(x2=5a)} = -\frac{19}{5}\, qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_3 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -P_2 x_3,$$

dla:

$$M_{(x3=0)} = -qa_2,$$

$$M_{(x3=a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T_{(x3)} = P_2 = qa.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - q \cdot x_1 = 0,$$

stąd

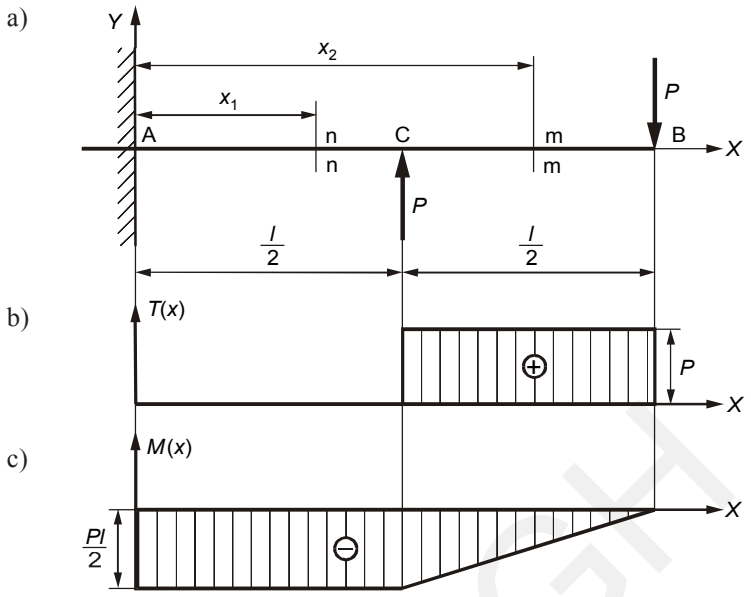
$$x_0 = \frac{11}{5}\, a.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_A \cdot x_1 - q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = \frac{121}{50}\, qa_2.$$

Zadanie 45

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB jednym końcem utwierdzonej i obciążonej dwiema równymi sobie co do wartości siłami P, jak pokazano na rysunku 2.45a.



Rys. 2.45. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Koniec B belki jest swobodny – wygodniej jest więc rozpatrywać ją od strony prawej, ponieważ nie trzeba w takiej sytuacji wyznaczać reakcji i momentu utwierdzenia. Wyrażenia na moment zginający i na siłę tnącą piszemy dwukrotnie osobno dla każdego z przedziałów AC i CB.

Najpierw rozpatrujemy przekrój m–m o odciętej x_1. Moment zginający w tym przekroju wygląda następująco: siła P wygina belkę wypukłością do góry wobec czego moment jest ujemny.

Odcięta x_1 jest w pierwszej potędze, zatem wartość momentu zmienia się liniowo wzdłuż przedziału CB, x_1 może przybierać wartości od $l/2$ do l:

$$M_{(x1)} = -P\,(l - x_1),$$

$$\text{przy } x_1 = \frac{l}{2} \qquad M_{(x1)} = -\frac{Pl}{2},$$

$$\text{przy } x_1 = l \qquad M_{(x1)} = 0.$$

Siła tnąca w przekroju m–m:

$$T_{(x1)} = P,$$

i ma wartość stałą wzdłuż przedziału CB.

PG AGH

Następnie rozpatrujemy przekrój n–n o odciętej x_2. Moment zginający w tym przekroju

$$M_{(x2)} = -P(l - x_2) + P\left(\frac{l}{2} - x_2\right) = -\frac{Pl}{2}.$$

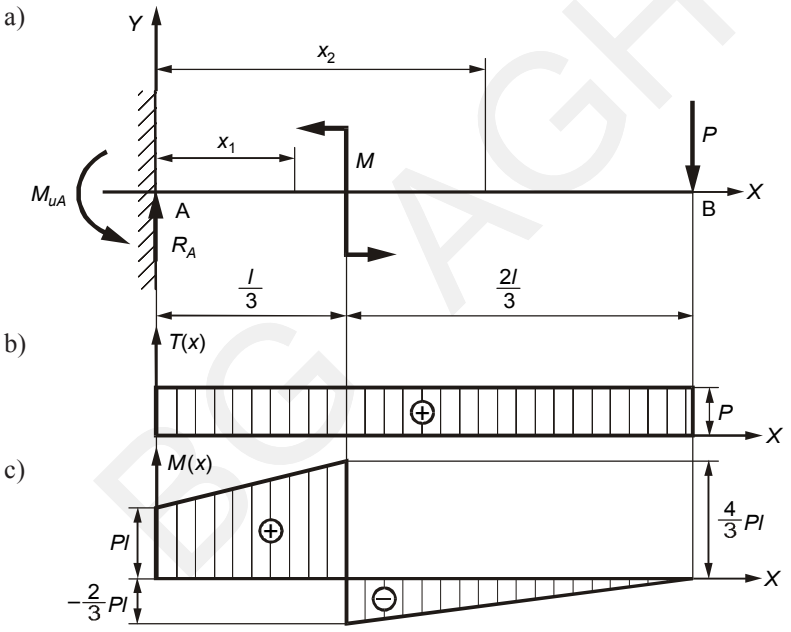
Moment zginający nie zależy od zmiennej x, więc posiada stałą wartość wzdłuż przedziału AC belki.

Siła tnąca w przekroju n–n

$$T_{(x2)} = P - P = 0.$$

Zadanie 46

Wykonać wykres momentów zginających i sił tnących dla belki AB obciążonej siłą skupioną P i parą sił o momencie $M = 2Pl$, jak pokazano na rysunku 2.46a.



Rys. 2.46. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, korzystamy z równania na sumę momentów względem punktu A oraz z równania sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwrot reakcji R_A jest skierowany do góry. Ponieważ belka jest utwierdzona, musi działać moment utwierdzenia w punkcie A; zakładamy, że moment M_{uA} działa w dół.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_{uA} - M + Pl = 0,$$

skąd

$$M_{uA} = -Pl.$$

Z sumy rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - P = 0,$$

skąd

$$R_A = P.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest taki jak założyliśmy. Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{3}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -M_{uA} + R_A x_1 = Pl + P,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = Pl,$$

$$M_{(x1=l/3)} = \frac{4Pl}{3},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = P,$$

$$T_{(x1=l/3)} = P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{3} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -M_{uA} + R_A x_2 - M,$$

dla:

$$M_{(x2=l/3)} = -\frac{2Pl}{3},$$

$$M_{(x2=l)} = 0,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

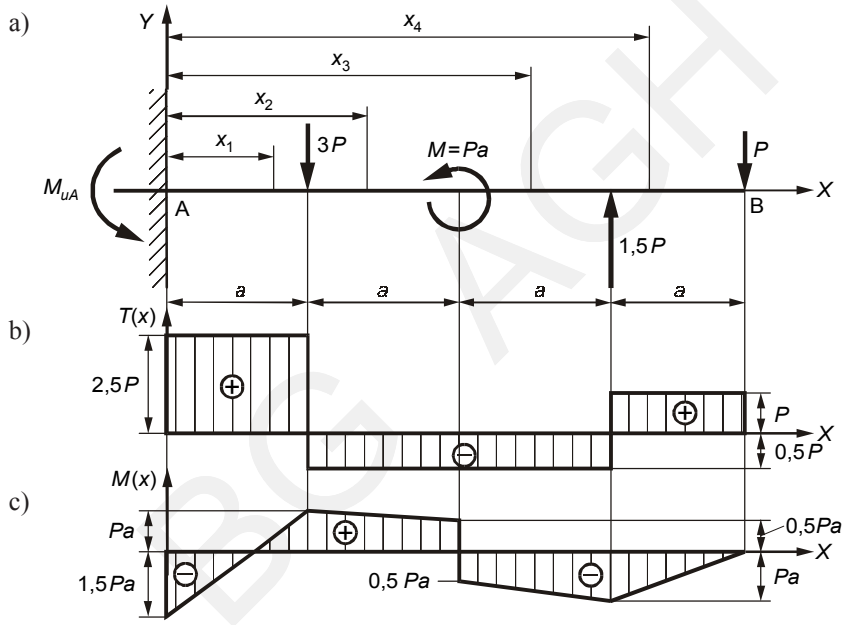
$$T_{(x2)} = R_A = P,$$

$$T_{(x2 = l/3)} = P,$$

$$T_{(x2 = l)} = P.$$

Zadanie 47

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.47a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.47b i 2.47c.



Rys. 2.47. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć moment utwierdzenia w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y*. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_{uA} + 3P \cdot a - M - 1{,}5P \cdot 3a + P \cdot 4a = 0.$$

skąd

$$M_{uA} = 1{,}5Pa.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - 3P + 1{,}5P - P = 0,$$

skąd

$$R_A = 2{,}5P.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym. Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - M_{uA},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = -1{,}5Pa,$$

$$M_{(x1=a)} = Pa,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 2{,}5P,$$

$$T_{(x1=a)} = 2{,}5P.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A\, x_2 - M_{uA} - 3P(x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = Pa,$$

$$M_{(x2=2a)} = 0{,}5Pa,$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - 3P,$$

$$T_{(x2=a)} = -0{,}5P,$$

$$T_{(x2=2a)} = -0{,}5P.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - M_{uA} - 3P(x_3 - a) - M,$$

dla:

$$M_{(x3=2a)} = -0{,}5Pa,$$

$$M_{(x3=3a)} = -Pa,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - 3P,$$

$$T_{(x3=2a)} = -0{,}5P,$$

$$T_{(x3=3a)} = -0{,}5P.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$3a \le x_4 \le 4a$ (rozwiązywany od prawej strony).

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = -P(4a - x_4),$$

dla:

$$M_{(x4=3a)} = -Pa,$$

$$M_{(x4=4a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = P,$$

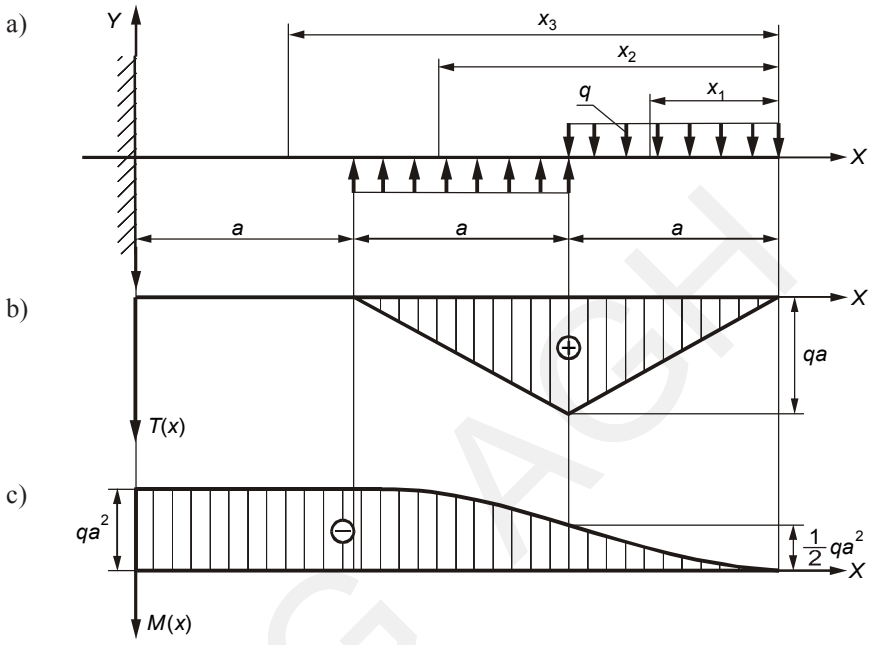
$$T_{(x4=3a)} = P,$$

$$T_{(x4=4a)} = P.$$

BG AGH

Zadanie 48

Belka przedstawiona na rysunku 2.48a, obciążona została obciążeniem ciągłym o natężeniu $q_1 = q$. Podać analityczne funkcje sił poprzecznych i momentów zginających, sporządzić ich wykresy oraz wyznaczyć maksymalną wartość siły poprzecznej i momentu zginającego.



Rys. 2.48. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

W belce wyodrębnimy trzy przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = -\frac{qx_1^2}{2},$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = qx_1,$$

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=a)} = qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -qa\left(x_2 - \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}q(x_2 - a)^2,$$

$$M_{(x2=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

$$M_{(x2=2a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = qa - q(x_2 - a) = 2qa - qx_2,$$

$$T_{(x2=a)} = qa,$$

$$T_{(x2=2a)} = 0.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -qa\left(x_3 - \frac{1}{2}a\right) + qa\left(x_3 - \frac{3}{2}a\right) = -qa^2,$$

$$M_{(x3=2a)} = -qa^2,$$

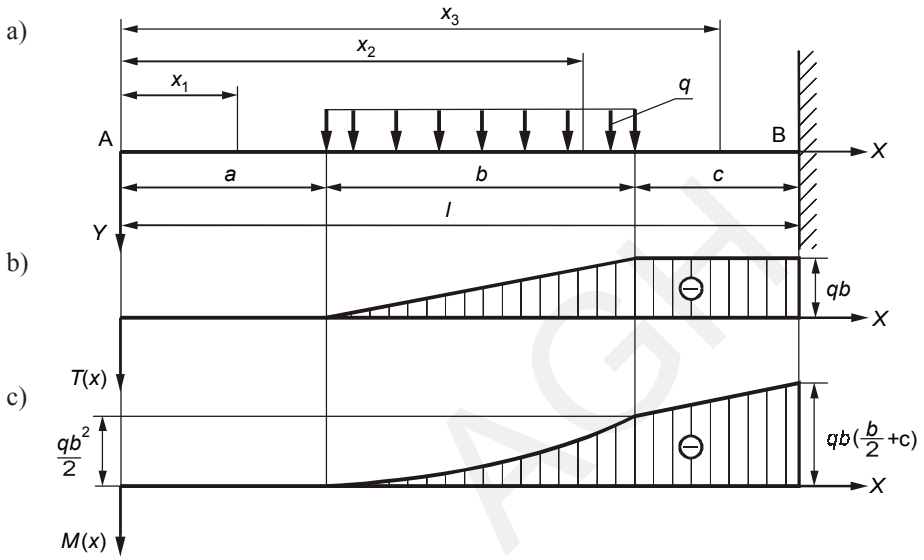
$$M_{(x3=3a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T_{(x3)} = qa - qa = 0.$$

Zadanie 49

Podać analityczne funkcje sił poprzecznych i momentów zginających dla belki przedstawionej na rysunku 2.49a oraz sporządzić ich wykresy. Belka utwierdzona jest z jednej strony i obciążona na odcinku o długości b obciążeniem ciągłym o natężeniu q. Dana jest długość belki l.



Rys. 2.49. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

W belce wyodrębnimy trzy przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = 0.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le a + b.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -\frac{1}{2} q (x_2 - a)^2,$$

$$M_{(x2 = a)} = 0,$$

$$M_{(x2 = a + b)} = -\frac{qb^2}{2},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = q(x_2 - a),$$

$$T_{(x2 = a)} = 0,$$

$$T_{(x2 = a + b)} = qb.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$a + b \le x_3 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = -qb\left[x_3 - \left(a + \frac{1}{2} b \right) \right],$$

$$M_{(x3 = a + b)} = -\frac{qb^2}{2},$$

$$M_{(x3 = l)} = -qb\left(\frac{b}{2} + c \right),$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T_{(x3)} = -qb.$$

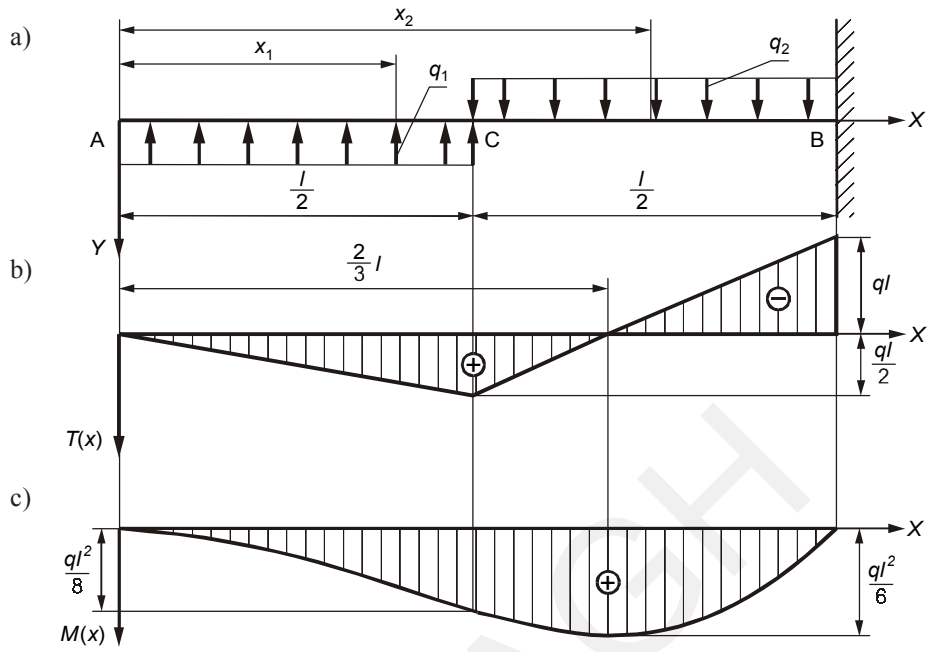
Zadanie 50

Belka jest jednym końcem utwierdzona i obciążona jak na przedstawionym rysunku 2.50a. Podać analityczne funkcje sił poprzecznych i momentów zginających oraz sporządzić ich wykresy.

Rozwiązanie

W belce wyodrębnimy dwa przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

BG AGH



Rys. 2.50. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x_1)} = \frac{qx_1^2}{2},$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l/2)} = \frac{1}{8} ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = qx_1,$$

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l/2)} = \frac{1}{2} ql.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = \frac{1}{2} ql\left(x_2 - \frac{1}{4} l \right) - \frac{3}{2} q\left(x_2 - \frac{1}{2} l \right)^2,$$

$$M_{(x2 = l/2)} = \frac{1}{8} ql^2,$$

$$M_{(x2 = l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = \frac{1}{2} ql - 3q\left(x_2 - \frac{1}{2} l \right),$$

$$T_{(x2 = l/2)} = \frac{1}{2} ql,$$

$$T_{(x2 = l)} = - ql.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej w drugim przedziale zmienia znak, musi wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem, aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x2} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x2}

$$T_{(x2)} = \frac{1}{2} ql - 3q\left(x_2 - \frac{1}{2} l \right) = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_2 = \frac{2}{3} l$. Uwzględniając tę wartość w funkcji M_{x2} otrzymamy

$$M_{(x2)} = \frac{1}{2} ql\left(\frac{2}{3} l - \frac{1}{4} l \right) - \frac{3}{2} q\left(\frac{2}{3} l - \frac{1}{2} l \right)^2 = \frac{1}{6} ql^2.$$

Zadanie 51

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.51a wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.51b i 2.51c.

Rozwiązanie

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -\frac{qx_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

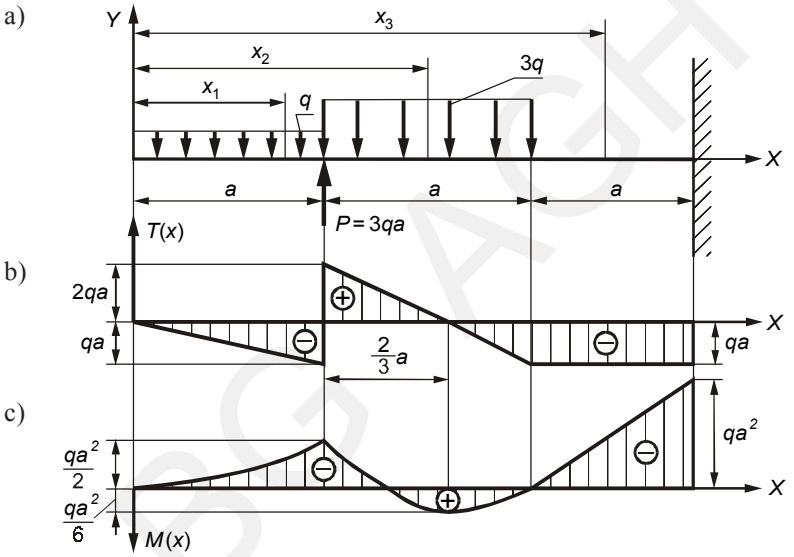
natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=a)} = qa.$$



Rys. 2.51. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = -qa\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + P(x_2 - a) - 3q(x_2 - a)\frac{(x_2 - a)}{2},$$

$$M_{(x2)} = -qa\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + P(x_2 - a) - 3q\frac{(x_2 - a)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=a)} = -\frac{qa^2}{2},$$

$$M_{(x2=2a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -qa + P - 3q(x_2 - a),$$

$$T_{(x2=a)} = 2qa,$$

$$T_{(x2=2a)} = -qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -qa\left(x_3 - \frac{a}{2}\right) + P(x_3 - a) - 3qa\left(x_3 - \frac{3}{2}\,a\right),$$

dla:

$$M_{(x3=2a)} = 0,$$

$$M_{(x3=3a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x3)} = -qa + P - 3qa,$$

$$T_{(x3=2a)} = -qa,$$

$$T_{(x3=3a)} = -qa.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = -qa + P - 3q(x_2 - a) = 0,$$

stąd

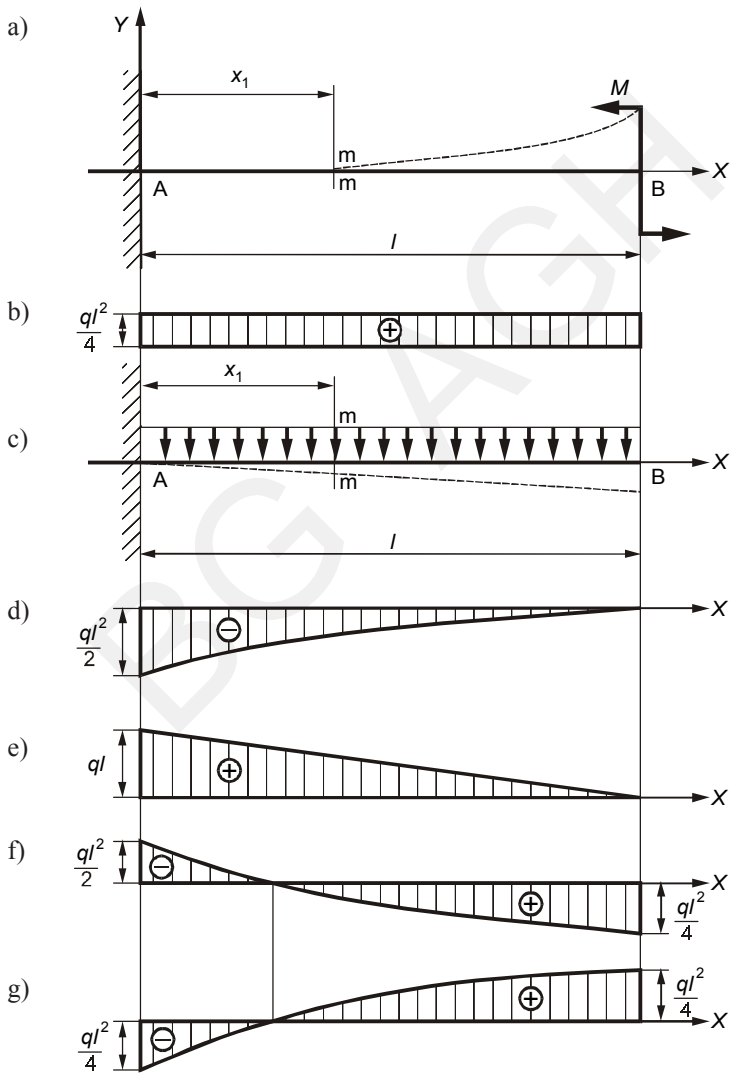
$$x_0 = \frac{5}{3}\,a.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = -qa\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + P(x_2 - a) - 3q(x_2 - a)\,\frac{(x_2 - a)}{2} = -\frac{1}{6}\,qa^2.$$

Zadanie 52

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB przedstawionej na rysunku 2.52a metodą superpozycji.



Rys. 2.52. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

DG AGH

Rozwiązanie

Rozpatrujemy belkę obciążoną tylko parą sił o momencie $M = \frac{ql^2}{4}$.

Moment zginający w przekroju m–m wynosi

$$M_{(x)} = M = \frac{ql^2}{4}.$$

Moment ten nie zależy od odciętej x, ma więc wartość stałą wzdłuż całej belki (rys. 2.52b). Znak momentu zginającego jest tu dodatni, belka bowiem pod działaniem pary sił o momencie M wygina się wypukłością do dołu (linia kreskowana).

Ponieważ siła tnąca w przekroju m–m wynosi

$$T_{(x)} = 0,$$

zatem nie będzie wykresu sił tnących przy obciążeniu belki parą sił.

Następnie rozpatrzymy belkę obciążoną tylko obciążeniem ciągłym q (rysunek 2.52c). Moment zginający w przekroju m–m wynosi

$$M_{(x)} = -q\,(l-x)\,\frac{l-x}{2} = -q\,\frac{(l-x)^2}{2},$$

x jest tu w drugiej potędze, wykres momentów będzie więc ograniczony parabolą. Moment M_x jest ujemny, ponieważ belka pod działaniem obciążenia ciągłego wygnie się wypukłością do góry (linia kreskowana); odcięta x może tu przybierać wartości od 0 do l.

I tak dla:

$$x = 0, \qquad M_{(x)} = -\frac{ql^2}{2},$$

$$x = l, \qquad M_{(x)} = 0.$$

Siła tnąca w przekroju m–m wynosi

$$T_{(x)} = q(l-x),$$

x jest w pierwszej potędze, zatem siła tnąca zmienia się liniowo wzdłuż belki

$$x = 0, \qquad T_{(x)} = ql,$$

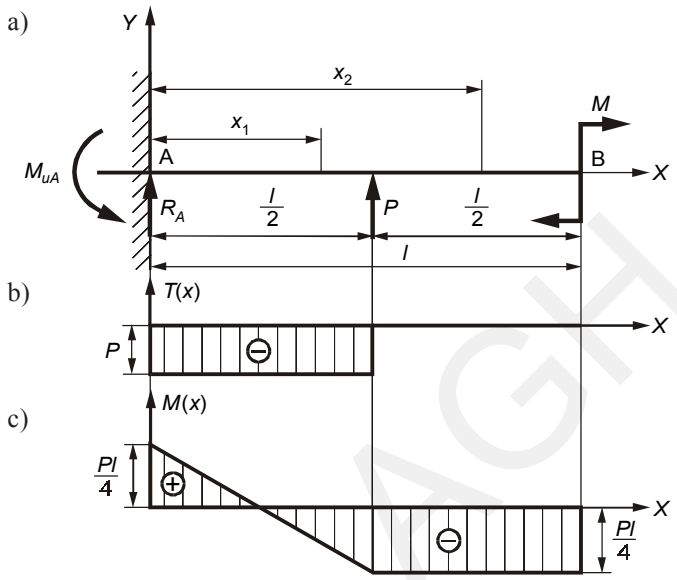
$$x = l, \qquad T_{(x)} = 0.$$

Wykres sił tnących jest pokazany na rysunku 2.52e. Sumaryczny wykres momentów pokazany na rysunku 2.52f został otrzymany po nałożeniu na siebie rysunków 2.52b i 2.52d.

BG AGH

Zadanie 53

Wykonać wykresy momentów zginających i sił tnących dla belki AB utwierdzonej jednym końcem i obciążonej siłą skupioną P oraz parą sił o momencie $M = \frac{Pl}{4}$ jak jest pokazane na rysunku 2.53a.



Rys. 2.53. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A bierzemy sumę momentów względem punktu A. Zwrot reakcji R_A zakładamy do góry. Ponieważ belka jest utwierdzona, musi działać moment utwierdzenia w punkcie A; zakładamy, że moment M_{uA} działa w dół.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_{uA} - P\,\frac{l}{2} + M = 0,$$

skąd

$$M_{uA} = -\frac{Pl}{4}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY otrzymamy

$$\sum P_y = R_A + P = 0,$$

skąd

$$R_A = -P.$$

Znak ujemny dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest przeciwny niż założono.

EG AGH

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{l}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -M_{uA} + R_A x_1 = \frac{Pl}{4} - Px_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = \frac{Pl}{4},$$

$$M_{(x1=l/2)} = -\frac{Pl}{4},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = -P,$$

$$T_{(x1=l/2)} = -P.$$

Odciętą dla której moment gnący jest równy zeru, obliczamy z warunku

$$M_{(x1)} = -M_{uA} + R_A x_1 = \frac{Pl}{4} - Px_1,$$

stąd

$$x_0 = \frac{l}{4}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{l}{2} \le x_2 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -M_{uA} + R_A x_2 + P\left(x_2 - \frac{l}{2}\right),$$

dla:

$$M_{(x2=l/2)} = -\frac{Pl}{4},$$

$$M_{(x2=l)} = -\frac{Pl}{4},$$

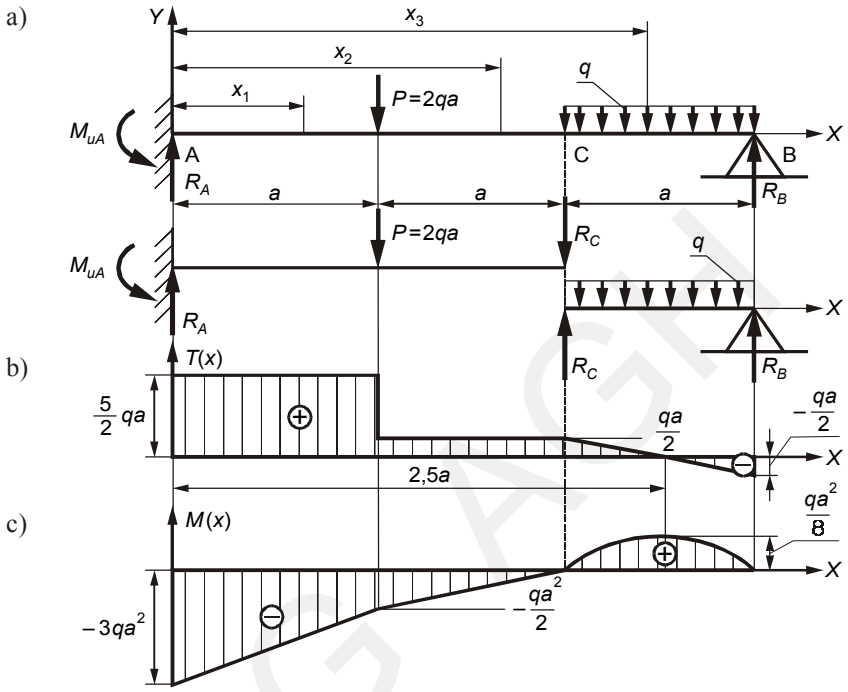
natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału

$$T_{(x2)} = R_A + P = -P + P = 0.$$

BG AGH

Zadanie 54

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.54a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.54b i 2.54c.



Rys. 2.54. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Ponieważ w belce tej znajduje się przegub w punkcie C, musimy rozpatrzyć dwa przypadki: dla belki AC oraz CB. Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie B bierzemy sumę momentów względem punktu C dla belki CB, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y* dla belki AB. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_c = -R_B \cdot a - qa \cdot \frac{a}{2} = 0,$$

skąd

$$R_B = \frac{qa}{2}.$$

BG AGH

Korzystając z sumy rzutów sił na oś OY dla belki CB otrzymamy

$$\sum P_y = R_C - qa + R_B = 0,$$

skąd

$$R_C = -\frac{qa}{2}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś OY dla belki AB otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - P - qa + R_B = 0,$$

skąd

$$R_A = 2{,}5qa.$$

Następnie z sumy momentów względem punktu C także dla belki AC wyliczamy M_{uA}

$$\sum M_c = -M_{uA} + R_A 2a - Pa + \frac{qa^2}{2} - R_B a = 0,$$

skąd

$$M_{uA} = 3qa^2.$$

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = - M_{uA} + R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1 = 0)} = - 3qa^2,$$

$$M_{(x1 = a)} = - 0{,}5qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1 = 0)} = 2{,}5qa,$$

$$T_{(x1 = a)} = 2{,}5qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$a \le x_2 \le 2a.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = - M_{uA} + R_A\, x_2 - P(x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2 = a)} = - 0{,}5qa,$$

$$M_{(x2 = 2a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2 = a)} = 0{,}5qa,$$

$$T_{(x2 = 2a)} = 0{,}5qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_3 \le 3a \quad \text{(rozwiązujemy od prawej strony).}$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x3)} = R_B(3a - x_3) - q(3a - x_3)\frac{(3a - x_3)}{2},$$

$$M_{(x3)} = R_B(3a - x_3) - q\frac{(3a - x_3)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3 = 2a)} = 0,$$

$$M_{(x3 = 3a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = -R_B + q(3a - x_3),$$

$$T_{(x3 = 2a)} = \frac{qa}{2},$$

$$T_{(x3 = 3a)} = -\frac{qa}{2}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w trzecim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą trzeciego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x3}}{dx} = T_{(x3)} = -R_B + q(3a - x_3) = 0,$$

BG AGH

stąd

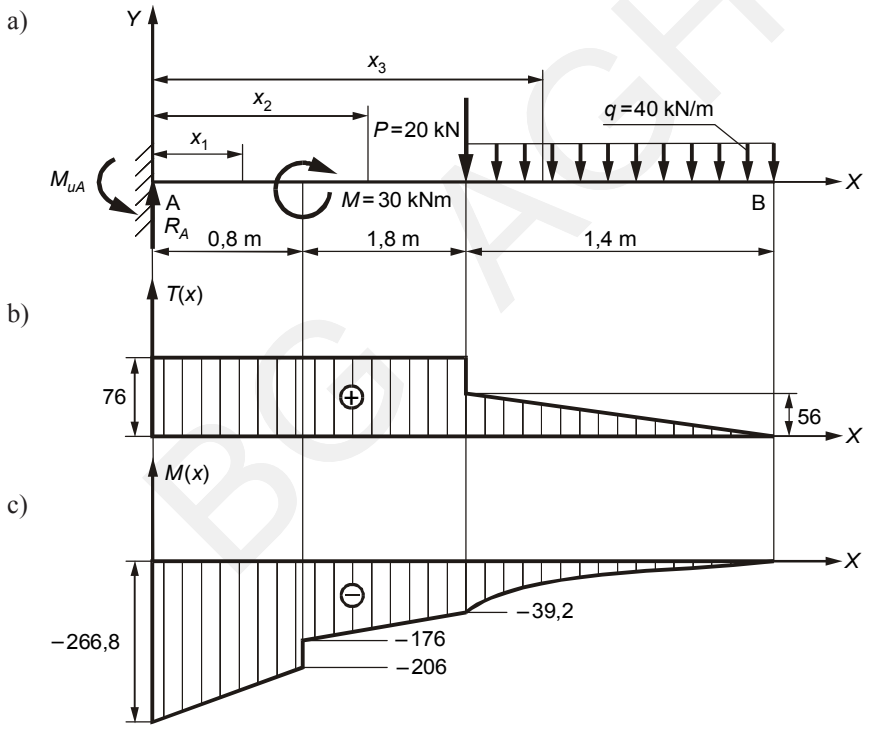
$$x_0 = 2{,}5a.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x3=x0)} = R_B(3a - x_3) - q(3a - x_3)\frac{(3a - x_3)}{2} = \frac{1}{8}qa^2.$$

Zadanie 55

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.55a wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.55b i 2.55c.



Rys. 2.55. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć moment utwierdzenia w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu A, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A korzystamy z sumy rzutów sił na oś OY. Zakładamy, że zwrot reakcji skierowany jest do góry.

Wtedy

$$\sum M_A = -M_{uA} + M + P \cdot 2{,}6 + q \cdot 1{,}4 \cdot 3{,}3 = 0,$$

skąd

$$M_{uA} = 266{,}8 \text{ kNm}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś O*Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A - P - q \cdot 1{,}4 = 0,$$

skąd

$$R_A = -76 \text{ kN}.$$

Znak ujemny dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji RA jest przeciwny do założonego.

Wydzielamy w belce trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 0{,}8.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -M_{uA} + R_A \cdot x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = -266{,}8 \text{ kNm},$$

$$M_{(x1=0{,}8)} = -206 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 76 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=0{,}8)} = 76 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$0{,}8 \le x_2 \le 2{,}6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -M_{uA} + R_A \cdot x_2 + M,$$

dla:

$$M_{(x2=0{,}8)} = -176 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=2{,}6)} = -39{,}2 \text{ kNm},$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału

$$T_{(x2)} = R_A,$$

$$T_{(x2=0,8)} = 76 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=2,6)} = 76 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2{,}6 \le x_3 \le 4 \quad \text{(rozwiązanie od prawej strony)}.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -q(4-x_3)\frac{(4-x_3)}{2} = -q\frac{(4-x_3)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x3=2,6)} = -39{,}2 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=4)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{x3} = q(4-x_3),$$

$$T_{(x3=2,6)} = 56 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=4)} = 0.$$

Zadanie 56

Dla belki wspornikowej przedstawionej na rysunku 2.56a wykonać wykresy siły tnącej $T(x)$ i momentu gnącego $M(x)$.

Rozwiązanie

Obliczenia rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji podporowych z równań równowagi dla całej belki. Równania te są następujące

$$\sum M_B = q \cdot 2a \cdot 4a - M - Pa + M_{UB} = 0,$$

skąd

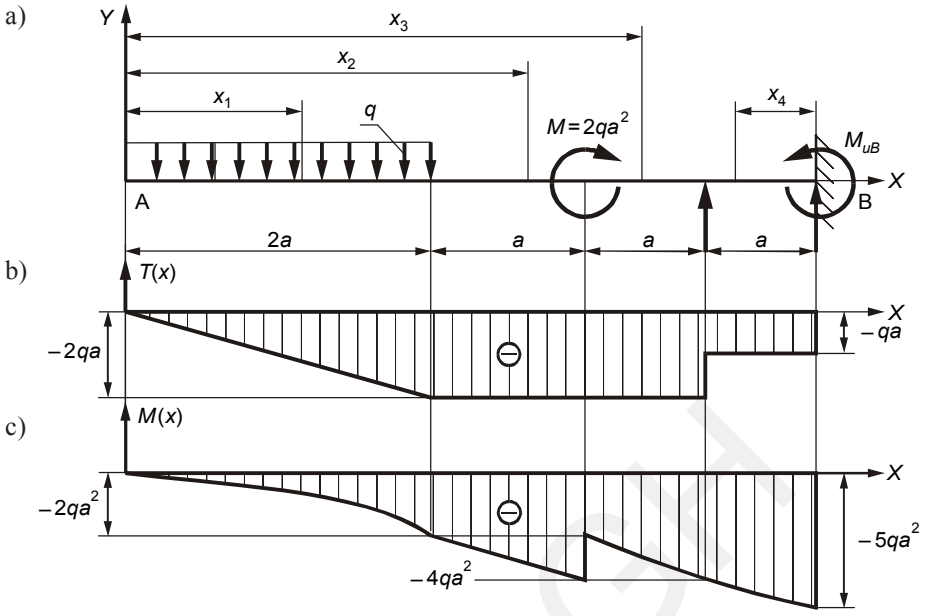
$$M_{UB} = -5qa^2,$$

$$\sum P_y = -2qa + P + R_B = 0,$$

skąd

$$R_B = qa.$$

BG AGH



Rys. 2.56. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -q \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -\frac{qx_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2a)} = -2qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -q \cdot x_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=2a)} = 2qa.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_2 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = -2q \cdot a \cdot (x_2 - a),$$

dla:

$$M_{(x2=2a)} = -2qa^2,$$

$$M_{(x2=3a)} = -4qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału

$$T_{(x2)} = -2qa.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_3 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = -2q \cdot a \cdot (x_3 - a) + M,$$

dla:

$$M_{(x3=0)} = -2qa^2,$$

$$M_{(x3=2a)} = -4qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału

$$T_{(x3)} = -2qa.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_4 \le 3a$$ (rozwiązanie od końca belki).

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x4)} = R_B x_4 + M_B,$$

dla:

$$M_{(x4=2a)} = -4qa^2,$$

$$M_{(x4=3a)} = -5qa^2,$$

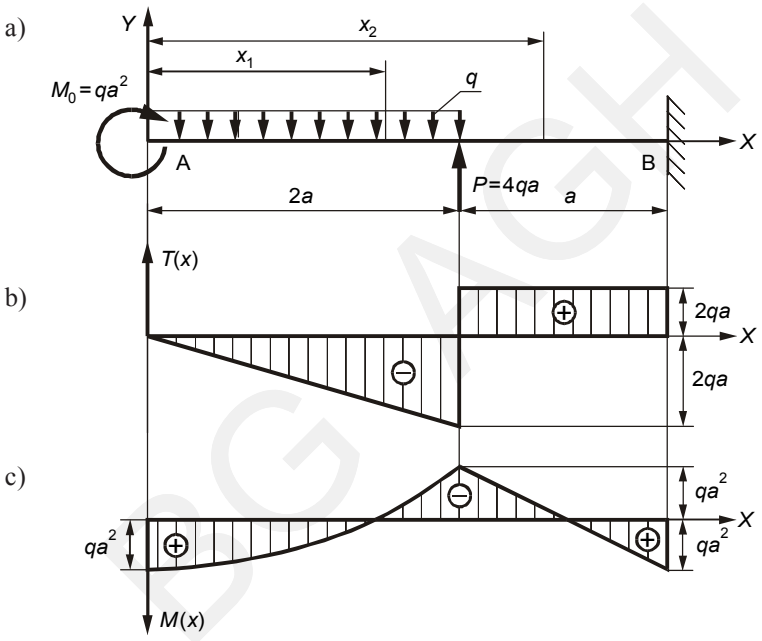
BG AGH

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = -R_B,$$
$$T_{(x4=2a)} = -qa,$$
$$T_{(x4=3a)} = -qa.$$

Zadanie 57

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.57a wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.57b i 2.57c.



Rys. 2.57. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2a.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = M - q\,\frac{x_1^2}{2},$$

PG AGH

dla:

$$M_{(x1=0)} = qa^2,$$

$$M_{(x1=2a)} = -qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=2a)} = -2qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_2 \le 3a.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = M - 2qa(x_2 - a) + 4qa(x_2 - 2a),$$

dla:

$$M_{(x2=2a)} = -qa^2,$$

$$M_{(x2=3a)} = qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -2qa + 4qa = 2qa,$$

$$T_{(x2=2a)} = 2qa,$$

$$T_{(x2=3a)} = 2qa.$$

Zadanie 58

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.58a wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.58b i 2.58c.

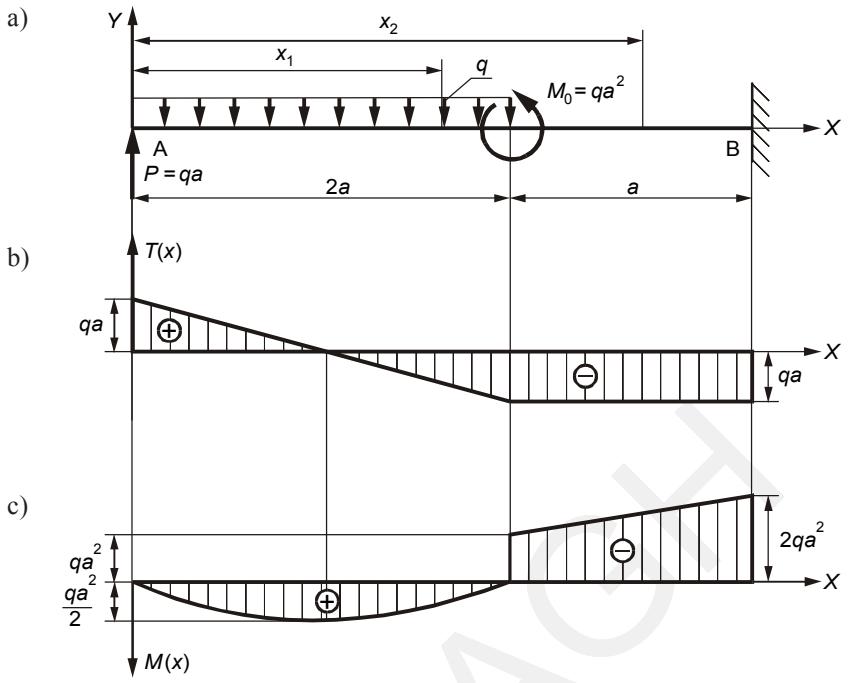
Rozwiązanie

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2a.$$

BG AGH



Rys. 2.58. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = Px_1 - q\frac{x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2a)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = P - qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = P,$$

$$T_{(x1=2a)} = -qa.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2a \le x_2 \le 3a.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = Px_2 - 2qa(x_2 - a) - M,$$

dla:

$$M_{(x2=2a)} = -qa^2,$$

$$M_{(x2=3a)} = -2qa^2,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

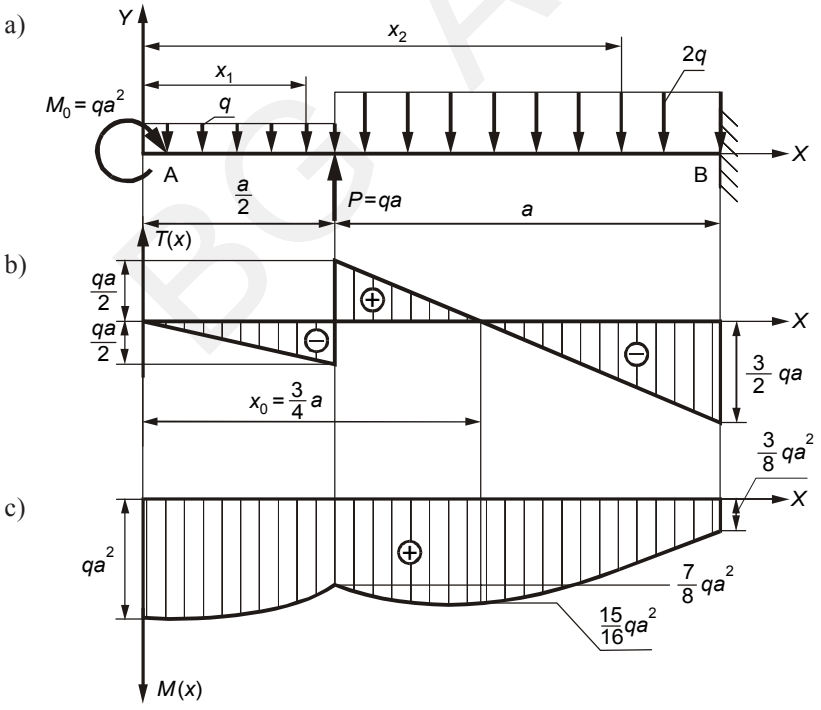
$$T_{(x2)} = P - 2qa,$$

$$T_{(x2=2a)} = 2qa,$$

$$T_{(x2=3a)} = -qa.$$

Zadanie 59

Dla belki utwierdzonej i obciążonej jak na rysunku 2.59a, wyprowadzić wzory na siły tnące i momenty gnące, i według tych wzorów sprawdzić wykresy podane na rysunkach 2.59b i 2.59c.



Rys. 2.59. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BC AGH

Rozwiązanie
Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le \frac{a}{2}.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = M - \frac{qx_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = qa^2,$$

$$M_{(x1=a/2)} = \frac{7qa^2}{8},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=a/2)} = \frac{qa}{2}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$\frac{a}{2} \le x_2 \le \frac{3a}{2}\, l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = M - q\,\frac{a}{2}\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + P\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) - 2q\,\frac{\left(x_2 - \frac{a}{2}\right)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x2=a/2)} = \frac{7qa^2}{8},$$

$$M_{(x2=3a/2)} = \frac{3qa^2}{8},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = -\frac{qa}{2} + P - 2q\left(x_2 - \frac{a}{2}\right),$$

BG AGH

$$T_{(x2=a/2)} = \frac{qa}{2},$$

$$T_{(x2=3a/2)} = \frac{3qa}{2}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment ten znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = -\frac{qa}{2} + P - 2q\left(x_2 - \frac{a}{2}\right) = 0,$$

stąd

$$x_0 = \frac{3}{4}a.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = M - q\,\frac{a}{2}\left(x_2 - \frac{a}{4}\right) + P\left(x_2 - \frac{a}{4}\right) - 2q\,\frac{\left(x_2 - \frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{15}{16}\,qa^2.$$

Zadanie 60

Wykonać wykresy sił tnących i momentów gnących dla belki przedstawionej na rysunku 2.60a.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcje podporowe, rozłączamy w myśli belkę w przegubie B. Otrzymujemy dwa samodzielne układy.

W pierwszej części belki reakcje są sobie równe i wynoszą

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\,ql.$$

Dla drugiej części belki obliczamy sumy momentów względem punktów C i D:

$$\sum M_c = R_B l + \frac{1}{2}\,ql^2 - R_D 2l = 0,$$

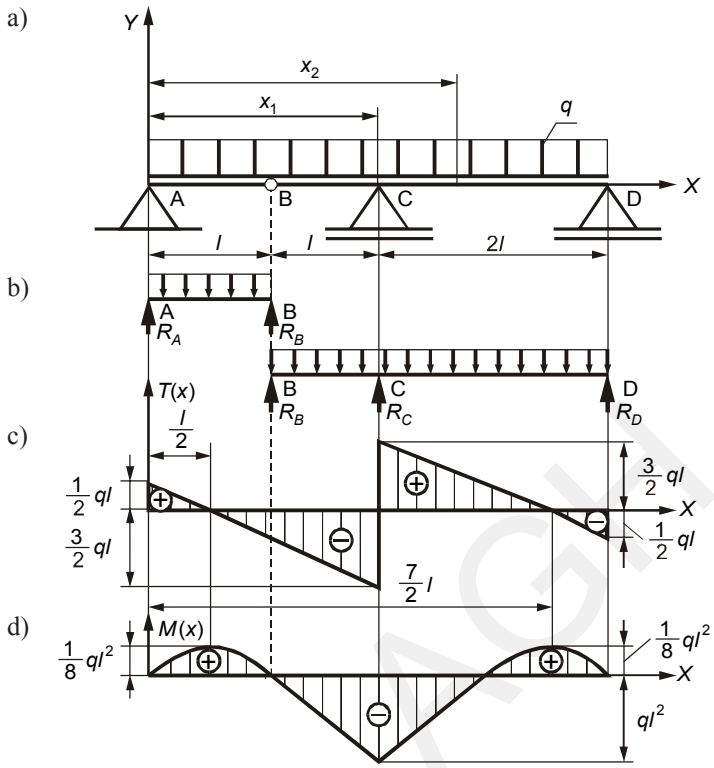
$$R_D = \frac{1}{2}\,ql,$$

$$\sum M_D = R_B 3l + R_C 2l - 3ql\left(\frac{3}{2}\,l\right) = 0,$$

$$R_C = 3ql.$$

Znając reakcje można wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających. Należy podkreślić, że przegub nie stanowi granicy przedziałów zmienności siły tnącej i momentu gnącego.

BC AGH



Rys. 2.60. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

W belce wyodrębnimy dwa przedziały zmienności sił poprzecznych i momentów zginających.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q x_1 \frac{x_1}{2} = \frac{1}{2} q l x_1 - \frac{1}{2} q x_1^2,$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=2l)} = -ql^2,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = \frac{1}{2} ql - qx_1,$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$2l \le x_2 \le 4l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać:

$$M_{(x2)} = R_A x_2 + R_C (x_2 - 2l) - q x_2 \frac{x_2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} q l x_1 + 3ql (x_2 - 2l) - \frac{1}{2} q x_2^2,$$

$$M_{(x2=2l)} = -ql^2,$$

$$M_{(x2=4l)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A + R_C - q x_2 = \frac{1}{2} ql + 3ql - q x_2,$$

$$T_{(x2=2l)} = \frac{3}{2} ql,$$

$$T_{(x2=4l)} = -\frac{1}{2} ql.$$

W związku z tym, że funkcja siły poprzecznej w pierwszym przedziale zmienia znak, musi wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x1} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x1}

$$T_{(x1)} = \frac{1}{2} ql - q x_1 = 0.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_1 = l/2$. Uwzględniając tę wartość w funkcji M_{x1} otrzymamy

$$M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2.$$

Również funkcja siły poprzecznej w drugim przedziale zmienia znak. Musi więc wystąpić w nim ekstremum momentu gnącego. A zatem aby określić przekrój, w którym funkcja M_{x2} osiągnie ekstremum, musimy przyrównać do zera funkcję T_{x2}

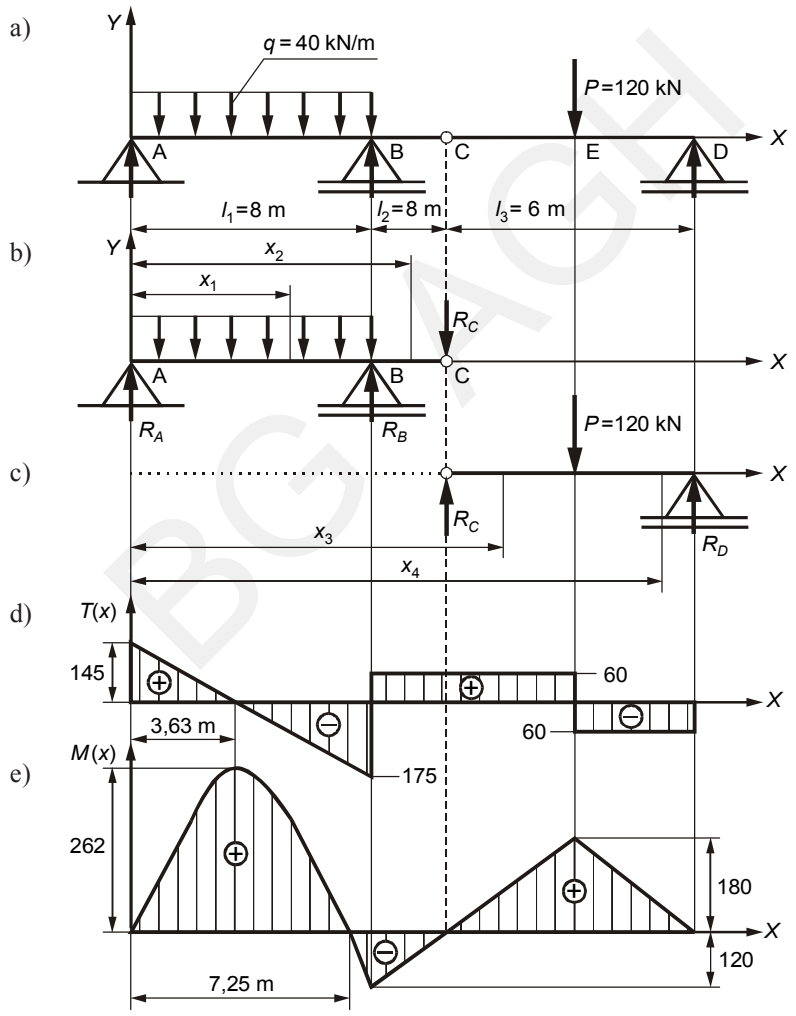
$$T_{x2} = R_A + R_C - q x_2 = \frac{1}{2} ql + 3ql - q x_2.$$

Z równania tego wynika, że ekstremum wystąpi dla $x_2 = 7l/2$. Uwzględniając tę wartość w funkcji M_{x2} otrzymamy

$$M_{\max} = \frac{1}{8} ql^2.$$

Zadanie 61

Wykonać wykresy sił poprzecznych i momentów gnących dla układu dwóch belek poziomych ABC i CD połączonych przegubowo w punkcie C i obciążonych jak na rysunku 2.61a.



Rys. 2.61. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości reakcji w punktach A, B, D przecinamy myślowo belkę w punkcie C (w miejscu przegubu). Wartość reakcji w punkcie C wyznaczamy z sumy momentów sił względem punktu D, natomiast wartość reakcji w punkcie D z sumy momentów sił względem punktu D – oba przypadki rozpatrujemy tylko i wyłącznie dla belki CFD. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_D = R_C l_3 - 12 \cdot \frac{1}{2} l_3 = 0,$$

skąd:

$$R_C = 60 \text{ kN},$$

$$\sum M_C = F \cdot \frac{l_3}{2} - R_D \cdot l_3 = 0,$$

skąd

$$R_D = 60 \text{ kN}.$$

Wartość reakcji w punkcie A wyznaczamy z sumy momentów sił względem punktu B, natomiast wartość reakcji w punkcie B z sumy rzutów sił na oś Y – oba przypadki rozpatrujemy tylko i wyłącznie dla belki ABC. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A l_1 - q l_1 \cdot \frac{l_1}{2} + R_C l_2 = 0,$$

skąd:

$$R_A = 145 \text{ kN},$$

$$\sum P_y = R_A - q l_1 + R_B - R_C = 0,$$

skąd

$$R_B = 235 \text{ kN}.$$

Znak dodatni reakcji dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji jest zgodny z założonym.

Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 8.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - q x_1 \frac{1}{2} x_1 = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=8)} = 120 \text{ kNm},$$

BG AGH

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - qx_1,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 145 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=8)} = -175 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$8 \le x_2 \le 13.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - ql_1(x_2 - 4) + R_B(x_2 - l_1),$$

dla:

$$M_{(x2=8)} = -120 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=13)} = 180 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - ql_1 + R_B,$$

$$T_{(x2=8)} = 60 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=13)} = 60 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$13 \le x_3 \le 16.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - ql_1(x_3 - 4) + R_B(x_3 - l_1) - F(x_3 - 13),$$

dla:

$$M_{(x3=13)} = 180 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=16)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - ql_1 + R_B - \text{F},$$

$$T_{(x3=13)} = -60 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=16)} = -60 \text{ kN}.$$

BG AGH

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - qx_1 = 0,$$

stąd

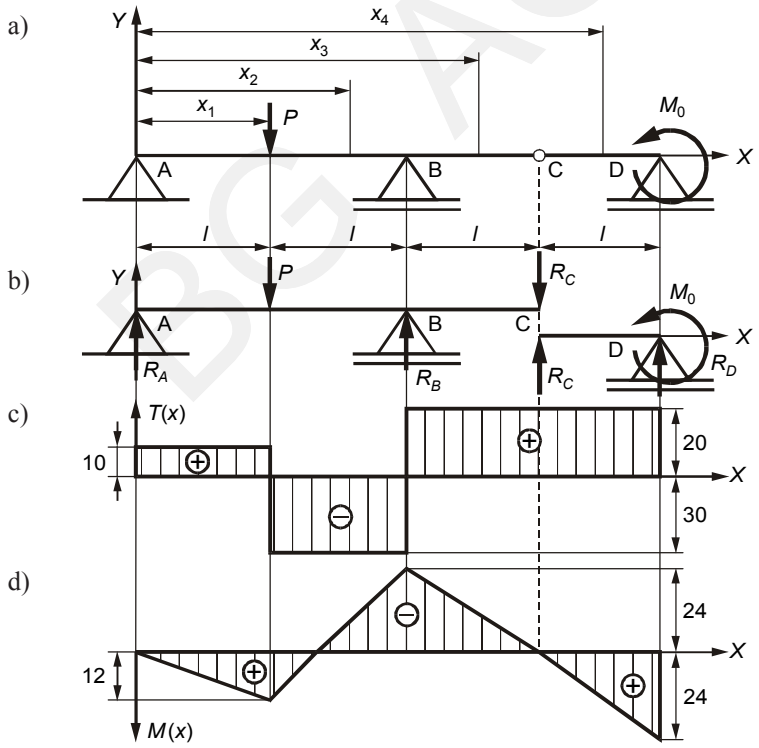
$$x_0 = 3{,}63 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_A x_1 - \frac{qx_1^2}{2} = 262 \text{ kNm}.$$

Zadanie 62

Wyznaczyć wykres sił poprzecznych i momentów gnących dla układu dwóch belek poziomych ABC i CD, połączonych przegubowo w punkcie C i obciążonych jak na rysunku 2.62a. Dane = 1,2 m, P = 40 kN, M_0 = 24 kNm.



Rys. 2.62. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

BG AGH

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości reakcji w punktach A, B, D przecinamy myślowo belkę w punkcie C (w miejscu przegubu). Wartość reakcji w punkcie C wyznaczamy z sumy momentów sił względem punktu D dla belki CD. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_D = -R_C \cdot l - M_0 = 0,$$

skąd

$$R_C = 20 \text{ kN}.$$

Natomiast z sumy rzutów sił na oś O*Y* dla belki CD otrzymujemy

$$\sum P_y = R_C + R_D = 0,$$

skąd

$$R_D = -20 \text{ kN}.$$

Z warunków równowagi belki ABC wyznaczamy wartości R_A i R_B, wówczas

$$\sum M_B = R_A \cdot 2l - 2l + R_C l = 0,$$

skąd:

$$R_A = 10 \text{ kN}.$$

$$\sum M_A = R_B \cdot 2l - Pl - R_C \cdot 3 = 0,$$

skąd:

$$R_B = 50 \text{ kN}.$$

W całej belce możemy wyodrębnić trzy przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le l.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = 12 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału:

$$T_{(x1)} = R_A,$$

$$T_{(x1=0)} = 10 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=l)} = 10 \text{ kN}.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$l \le x_2 \le 2l.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - P(x_2 - l),$$

dla:

$$M_{(x2 = l)} = 12 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2 = 2l)} = -24 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - P,$$

$$T_{(x2 = l)} = -30 \text{ kN},$$

$$T_{(x2 = 2l)} = -30 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$2l \le x_3 \le 4l.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - P(x_3 - l) + R_B(x_3 - 2l),$$

dla:

$$M_{(x3 = 2l)} = -24 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3 = 4l)} = 24 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - P + R_B,$$

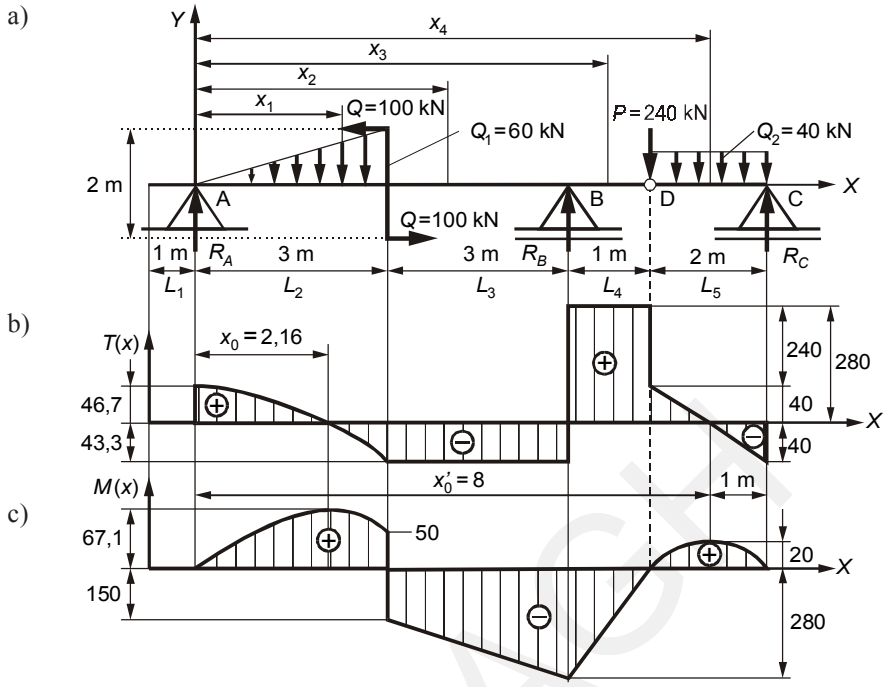
$$T_{(x3 = 2l)} = 20 \text{ kN},$$

$$T_{(x3 = 4l)} = 20 \text{ kN}.$$

Zadanie 63

Wykonać wykresy sił poprzecznych i momentów gnących dla układu dwóch belek poziomych AEBD i DC połączonych przegubowo w punkcie C i obciążonych jak na rysunku 2.63a.

BG AGH



Rys. 2.63. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie C, bierzemy pod uwagę sumę momentów względem punktu D dla belki DC, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie A, B korzystamy z sumy rzutów sił na oś *Y* oraz sumy momentów względem punktu A dla belki AEBDC (te obliczenia przeprowadzamy już dla całego układu). Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_D = -R_C \cdot l_5 + q_2 \cdot l_5 \cdot \frac{1}{2} \cdot l_5 = 0,$$

skąd

$$R_C = 40 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś *Y* otrzymamy:

$$\sum P_y = R_A - \frac{1}{2} l_2 q_1 + R_B - P - q_2 l_5 + R_C = 0,$$

$$\sum M_A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot l_2 - Q \cdot 2 - R_B(l_2 + l_3) + P(l_2 + l_2 + l_4) +$$

$$+ q_2 \cdot l_5 \cdot \left(l_2 + l_3 + l_4 + \frac{1}{2} l_5 \right) - R_C(l_2 + l_3 + l_4 + l_5) = 0,$$

BC AGH

skąd:

$$R_B = 323{,}3 \text{ kN},$$

$$R_A = 46{,}7 \text{ kN}.$$

Znak dodatni dowodzi, że rzeczywisty zwrot reakcji R_A jest zgodny z założonym. Wydzielamy w belce cztery przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 3.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - \frac{1}{2} q_{(z)} x_1 \frac{1}{3} x_1,$$

a ponieważ

$$\frac{q_1}{l_2} = \frac{q_{(x)}}{x_1},$$

to

$$M_{(x1)} = R_1 x_1 - \frac{1}{3} x_1^3,$$

dla

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=3)} = 50 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - x_1^2,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 46{,}7 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=3)} = -43{,}3 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$3 \le x_2 \le 6.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A x_2 - \frac{1}{2} q_1 l_2 \left(x_2 - \frac{2}{3} l_2 \right) - Q \cdot 2,$$

dla:

$$M_{(x2=3)} = -150 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=6)} = -280 \text{ kNm},$$

BC AGH

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - 9,$$

$$T_{(x2=3)} = -43{,}3 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=6)} = -43{,}3 \text{ kN}.$$

3) Trzeci przedział będzie się zmieniał

$$6 \le x_3 \le 7.$$

Ogólne równanie momentów dla trzeciego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x3)} = R_A x_3 - \frac{1}{2} q_1 l_2 \left(x_3 - \frac{2}{3} l_2 \right) - Q \cdot 2 + R_B (x_3 - l_2 + l_3),$$

dla:

$$M_{(x3=6)} = -280 \text{ kNm},$$

$$M_{(x3=7)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla trzeciego przedziału:

$$T_{(x3)} = R_A - 9 + R_B,$$

$$T_{(x3=6)} = 280 \text{ kN},$$

$$T_{(x3=7)} = 280 \text{ kN}.$$

4) Czwarty przedział będzie się zmieniał

$$7 \le x_4 \le 9.$$

Ogólne równanie momentów dla czwartego przedziału będzie miało postać

$$M_{(X4)} = R_A x_4 - \frac{1}{2} q_1 l_2 \left(x_4 - \frac{2}{3} l_2 \right) - Q \cdot 2 + R_B (x_4 - l_2 + l_3) -$$

$$- P(x_4 - l_2 + l_3 + l_4) - q \frac{(x_4 - l_2 + l_3 + l_3)^2}{2},$$

dla:

$$M_{(x4=7)} = 0,$$

$$M_{(x4=9)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla czwartego przedziału:

$$T_{(x4)} = R_A - 9 + R_B - q_2(x_4 - l_2 + l_3 + l_4),$$

$$T_{(x4=7)} = 40 \text{ kN},$$

$$T_{(x4=9)} = -40 \text{ kN}.$$

BG AGH

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym oraz w czwartym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x1}}{dx} = T_{(x1)} = R_A - x_1^2 = 0,$$

stąd

$$x_0 = 2{,}16 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x1=x0)} = R_1 x_1 - \frac{1}{3} x_1^3 = 67{,}3 \text{ kNm},$$

Taki sam schemat przyjmujemy dla przedziału czwartego i tak

$$\frac{dM_{x4}}{dx} = T_{(x4)} = R_A - 9 + R_B - q_2(x_4 - l_2 + l_3 + l_4),$$

stąd

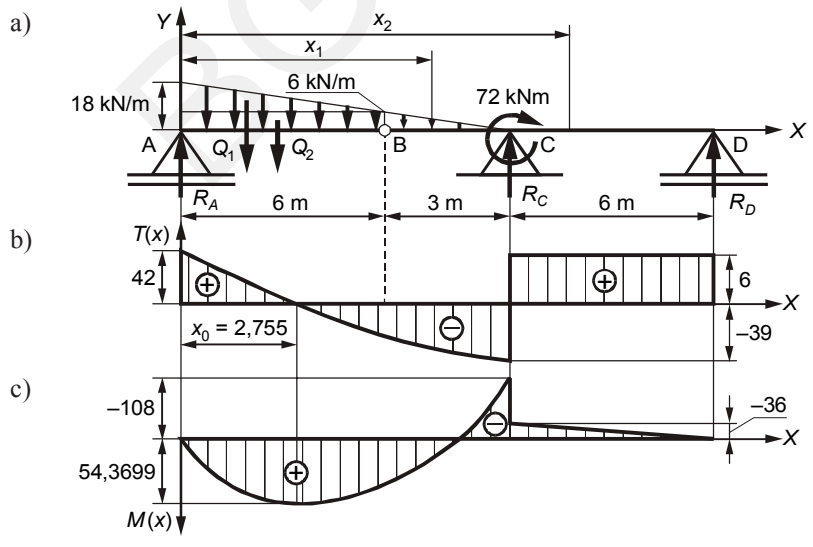
$$x_0' = 8 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x4=x0)} = 20 \text{ kNm}.$$

Zadanie 64

Dla belki obciążonej jak na rysunku 2.64a wyznaczyć reakcje podpór oraz sporządzić wykresy sił tnących i momentów gnących.



Rys. 2.64. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

PG AGH

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A, bierzemy sumę momentów względem punktu B dla belki AB, przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie D korzystamy z sumy momentów względem punktu C dla całego układu, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie C korzystamy z sumy rzutów sił na oś O*Y* dla całego układu. Zakładamy, że zwroty reakcji skierowane są do góry.

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot 6 - Q_2 \cdot 3 - Q_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 0,$$

gdzie:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36 \text{ kN},$$

$$Q_2 = 6 \cdot 6 = 36 \text{ kN},$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9 \text{ kN},$$

skąd:

$$R_A = 42 \text{ kN},$$

$$\sum P_y = R_A - Q + R_B = 0,$$

skąd:

$$R_B = 30 \text{ kN},$$

$$\sum M_C = R_A \cdot 9 - Q \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + 72 - R_D \cdot 6 = 0,$$

skąd

$$R_D = -6 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś *Y* otrzymamy

$$\sum P_y = R_A + Q + R_C + R_D = 0,$$

skąd

$$R_C = -45 \text{ kN}.$$

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 9.$$

BG AGH

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = R_A \cdot x_1 - x_1 \cdot \frac{x_1}{2} \cdot q_{x1} - \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot (18 - q_{x1}) \cdot \frac{2}{3} x_1,$$

a ponieważ:

$$\frac{18}{9} = \frac{q_{(x1)}}{(9 - x_1)} \Rightarrow \quad q_{(x1)} = 18 - 2x_1,$$

$$M_{(x1)} = R_A x_1 - 9x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3,$$

dla:

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=9)} = -\ 108 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = R_A - 18x_1 + x_1^2,$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 42 \text{ kN},$$

$$T_{(x1=9)} = -\ 39 \text{ kN}.$$

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$9 \le x_2 \le 15.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A \cdot x_2 - Q \cdot (x_2 - 3) + M + R_C (x_2 - 9),$$

dla:

$$M_{(x2=9)} = -\ 36 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=15)} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - 36,$$

$$T_{(x2=9)} = 6 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=15)} = 6 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w pierwszym przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą pierwszego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_1}{dx} = T_{(x1)} = R_A - 18x + x^2 = 0,$$

stąd

$$x_0 = 2{,}755 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

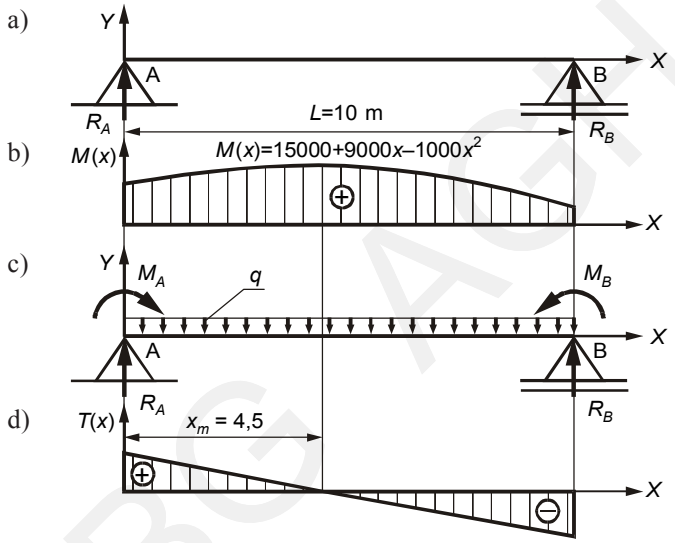
$$M_{(x1=x0)} = R_A x_1 - 9x_1^2 + \frac{1}{3} x_1^3 = 54{,}3699 \text{ kNm}.$$

Zadanie 65

Dla belki swobodnie podpartej o rozpiętości l = 10 m, jak na rysunku 2.65a, podany jest wykres $M_{(x)}$ (rys. 2.65b) określony równaniem

$$M_{(x)} = 15\,000 + 9000x - 1000x^2.$$

Wyznaczyć kształt wykresu $T(x)$ oraz rodzaj obciążenia.



Rys. 2.65. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Funkcja sił poprzecznych przyjmuje postać

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 9000 - 2000x.$$

Jest to funkcja liniowa i przyjmuje wartości:

$$T_{(x=0)} = \frac{dM(x)}{dx} = R_A = 9000 \text{ kG} = 90 \text{ kN},$$

$$T_{(x=l)} = \frac{dM(x)}{dx} = R_B = -11\,000 \text{ kG} = -110 \text{ kN},$$

natomiast funkcja obciążenia przyjmuje wartość

$$q = -\frac{dT(x)}{dx} = 2000 \text{ kG/m} = 20 \text{ kN/m}.$$

Z równania momentów zginających wyznaczamy wartości:

$$M_A = M_{(x=0)} = 15\,000 \text{ kGm} = 150 \text{ kNm},$$

$$M_B = M_{(x=l)} = 5000 \text{ kGm} = 50 \text{ kNm}.$$

Funkcja $M(x)$ osiąga największą wartość tam, gdzie spełniony jest warunek

$$\left[\frac{dM(x)}{dx}\right]_{x=xm} = T(x_m) = 9000 - 2000x_m = 0,$$

stąd:

$$x_m = 4{,}5 \text{ m}.$$

$$M_{\max} = M_{(xm)} = 35\,250 \text{ kGm} = 352{,}50 \text{ kNm}.$$

Zadanie 66

Dla belki AB o rozpiętości l = 12 m opartej na dwóch podporach przegubowych (rys. 2.66a), moment zginający w dowolnym przekroju w odległości x od podpory A określony jest równaniem

$$M_{(x)}^{AB} = 10^3\left(48 + 20x - x^2 - \frac{x^3}{12}\right).$$

Określić rodzaj obciążenia belki oraz sporządzić wykresy $T(x)$ i $M(x)$.

Rozwiązanie

Równanie sił tnących dla przedstawionej belki

$$T_{(x)}^{AB} = \frac{dM_{(x)}^{AB}}{dx} = 10^3\left(20 - 2x - \frac{x^2}{4}\right).$$

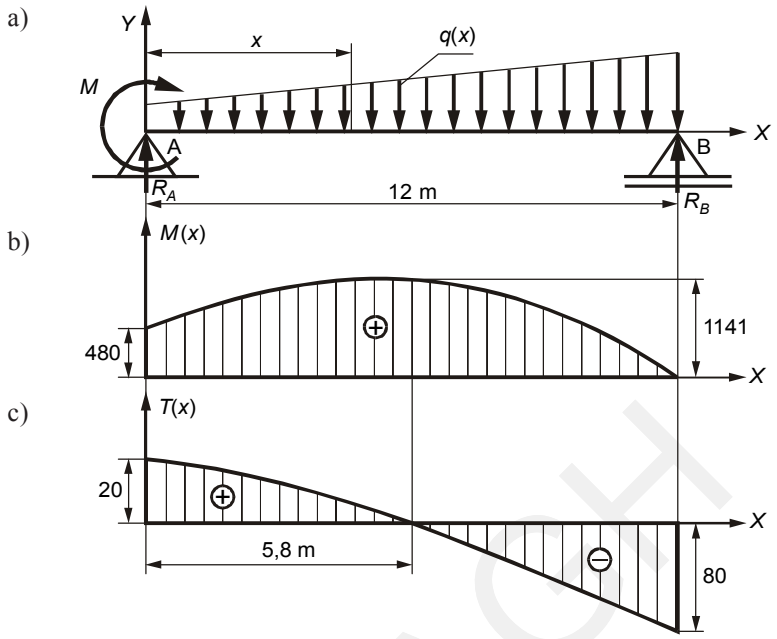
Funkcja sił poprzecznych $T(x)$ jest funkcją drugiego stopnia i przyjmuje wartości:

$$T_{(x=0)}^{AB} = T_A^0 = R_A = 2000 \text{ kG} = 20 \text{ kN},$$

$$T_{(x=l)}^{AB} = T_B^l = R_B = -40\,000 \text{ kG} = -400 \text{ kN}.$$

Funkcja obciążenia przyjmuje postać

$$q(x) = -\frac{dT_{(x)}^{AB}}{dx} = 10^3\left(2 + \frac{x}{2}\right).$$



Rys. 2.66. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Zatem obciążenie zmienia się liniowo i przyjmuje wartości:

$$q_{(x=0)} = q_A = 2000 \text{ kGm} = 20 \text{ kN/m},$$

$$q_{(x=l)} = q_B = 10^3 \left(2 + \frac{12}{2}\right) = 8000 \text{ kGm} = 80 \text{ kN/m}.$$

Z równania momentów zginających wyznaczamy:

$$M^{AB}_{(x=0)} = M_A = 48\,000 \text{ kGm} = 480 \text{ kNm},$$

$$M^{AB}_{(x=12)} = M_B = 0.$$

Funkcja $M^{AB}_{(x)}$ osiąga największą wartość tam gdzie spełniony jest warunek:

$$\left[\frac{dM^{AB}_{(x)}}{dx}\right]_{x=xm} = T^{AB}_{(x_m)} = 20 - 2x_m - \frac{1}{4}x_m^2 = 0,$$

stąd:

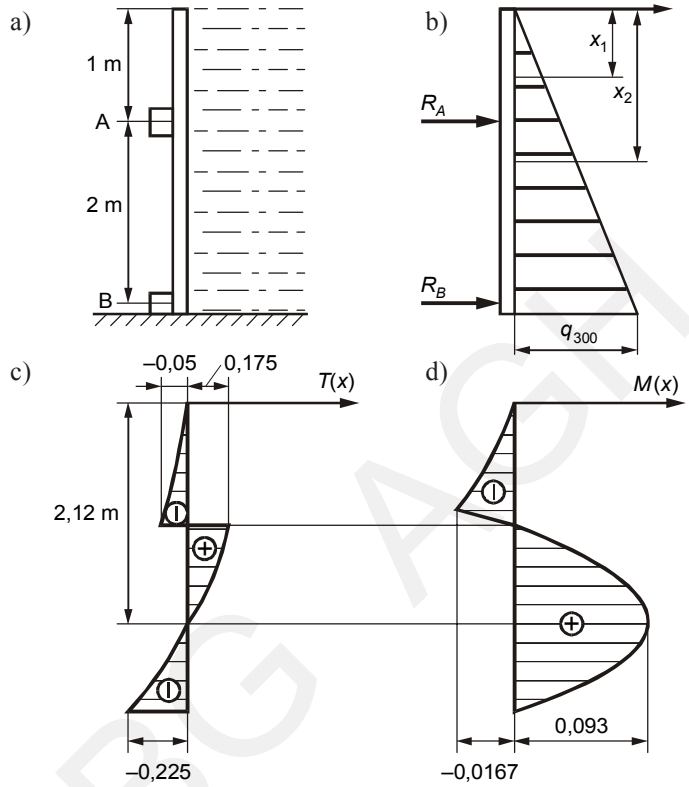
$$x_m = 5{,}8 \text{ m},$$

$$M^{AB}_{\max} = M^{AB}_{(xm)} = 114\,100 \text{ kGm} = 1141 \text{ kNm}.$$

BG AGH

Zadanie 67

Zapora wodna ma być zbudowana z desek ustawionych pionowo i opartych o poziome belki A i B. Sporządzić wykresy sił tnących i momentów gnących dla $\gamma = 0{,}001$ kG/cm^3 i głębokości 3 m. Schemat zapory przedstawiono na rysunku 2.67a.



Rys. 2.67. Wykresy siły tnącej i momentu zginającego

Rozwiązanie

Na obciążenie desek składa się parcie wody i reakcja podpór A i B. Na głębokości x poniżej poziomu wody panuje ciśnienie

$$p_z = x \times \gamma.$$

A ponieważ $p_z = q_z$ i – jak widać – q_z zmienia się proporcjonalnie do x, mamy do czynienia z obciążeniem ciągłym po trójkącie. Tak więc obciążenie u podstawy tamy wynosi

$$q_{300} = 0{,}001 \cdot 300 = 0{,}3 \text{ kG/cm} = 0{,}3 \text{ kN/m}.$$

Aby wyznaczyć reakcję pionową w punkcie A bierzemy sumę momentów względem punktu B, natomiast przy wyznaczaniu reakcji pionowej w punkcie B korzystamy z sumy rzutów sił na oś poziomą.

BG AGH

Wtedy

$$\sum M_B = R_A \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot q_{300} \cdot 3 \cdot 1 = 0,$$

skąd

$$R_A = 0{,}225 \text{ kN}.$$

Wykorzystując sumę rzutów sił na oś poziomą otrzymamy

$$\sum P_y = R_A + R_B - \frac{1}{2} \cdot q_{300} \cdot 3 = 0,$$

skąd

$$R_B = 0{,}225 \text{ kN}.$$

Wydzielamy w belce dwa przedziały.

1) Pierwszy przedział będzie się zmieniał

$$0 \le x_1 \le 1.$$

Ogólne równanie momentów dla pierwszego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x1)} = -Q_{x1} \cdot \frac{1}{3} x_1,$$

gdzie

$$Q_{x1} = \frac{1}{2} q_{x1} \cdot x_1,$$

a ponieważ:

$$\frac{q_{300}}{3} = \frac{q_{(x1)}}{x_1} \Rightarrow q_{(x1)} = \frac{q_{300} \cdot x_1}{3},$$

$$M_{(x1)} = -\frac{q_{300} x_1^3}{18},$$

$$M_{(x1=0)} = 0,$$

$$M_{(x1=l)} = -\frac{q_{300} \cdot 1^3}{18} = -0{,}0167 \text{ kNm},$$

natomiast siła tnąca dla pierwszego przedziału

$$T_{(x1)} = -\frac{q_{300} x_1^2}{6},$$

dla:

$$T_{(x1=0)} = 0,$$

$$T_{(x1=l)} = -\frac{q_{300} \cdot 1^2}{6} = -0{,}05 \text{ kN}.$$

BG AGH

2) Drugi przedział będzie się zmieniał

$$1 \le x_2 \le 3.$$

Ogólne równanie momentów dla drugiego przedziału będzie miało postać

$$M_{(x2)} = R_A(x_2 - 1) - Q_{(x2)} \cdot \frac{1}{3} x_2,$$

gdzie

$$Q_{x2} = \frac{1}{2} q_{x2} \cdot x_2,$$

a ponieważ:

$$\frac{q_{300}}{3} = \frac{q_{(x2)}}{x_2} \Rightarrow q_{(x2)} = \frac{q_{300} \cdot x_2}{3},$$

$$M_{(x2)} = \frac{3}{4} q_{300}(x_2 - 1) - \frac{1}{18} q_{300} \cdot x_2^3,$$

$$M_{(x2=1)} = -\frac{q_{300} \cdot 1^3}{18} = -0{,}0167 \text{ kNm},$$

$$M_{(x2=3)} = \frac{3}{2} q_{300} - \frac{27}{18} q_{300} = 0,$$

natomiast siła tnąca dla drugiego przedziału:

$$T_{(x2)} = R_A - Q_{(x2)} = \frac{3}{4} q_{300} - \frac{1}{6} q_{300} x_2^2,$$

$$T_{(x2=1)} = \frac{7}{12} q_{300} = 0{,}175 \text{ kN},$$

$$T_{(x2=3)} = -\frac{9}{12} q_{300} = -0{,}225 \text{ kN}.$$

Wyznaczenie maksymalnego momentu zginającego. Znajdujemy przekrój, w którym moment zginający ma wartość maksymalną. Moment taki znajduje się w drugim przedziale. W celu wyznaczenia wartości maksymalnej przyrównujemy siłę tnącą drugiego przedziału do zera.

Ponieważ

$$\frac{dM_{x2}}{dx} = T_{(x2)} = \frac{3}{4} q_{300} - \frac{1}{6} q_{300} x_2^2 = 0,$$

stąd

$$x_{0 \text{ dla } 2} = 2{,}12 \text{ m}.$$

Dla tej odciętej moment gnący ma wartość maksymalną i wynosi

$$M_{(x2=x0)} = \frac{3}{4} q_{300}(x_2 - 1) - \frac{1}{18} q_{300} \cdot x_2^3 = 0{,}093 \text{ kNm}.$$

BG AGH

Literatura

[1] Chrobok R.: *Zbiór zadań z podstaw statyki*. Wrocław, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne 1999

[2] Gubrynowiczowa J.: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Warszawa, PWN 1971

[3] Gubrynowiczowa J.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, PWN 1958

[4] Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, WNT 1984

[5] Kurowski R., Niezgodziński M.E.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, PWN 1961

[6] Kurowski R., Parszewski Z.: *Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów*. Warszawa, PWN 1966

[7] Lisowski A., Siemieniec A.: *Wytrzymałość materiałów*. Warszawa, PWN 1973

[8] Lisowski A., Siemieniec A.: *Zadania z wytrzymałości materiałów*. Warszawa, PWN 1965

[9] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T.: *Wzory wykresy i tablice wytrzymałościowe*. Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1996

[10] Orłowski W., Słowański L.: *Wytrzymałość materiałów przykłady obliczeń*. Warszawa, Arkady 1978

[11] Rajfert T., Rżysko J.: *Zbiór zadań ze statyki i wytrzymałości materiałów*. Warszawa, PWN 1979

[12] Sałustowicz A., Dziunikowski L.: *Wytrzymałość materiałów*. Kraków, Skrypt AGH 1958

[13] Szuścik W., Kuczyński J.: *Wytrzymałość materiałów*. Gliwice, Skrypt Politechniki Śląskiej 1974

[14] Zielnica J.: *Wytrzymałość materiałów*. Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 1996

BG AGH