Marian Malec

Elementy teorii szeregów w przestrzeniach unormowanych

KU 0031 pozycja wydawnictw naukowych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

ISBN 83–88408–86–0

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzenci: rozdział I – *prof. dr hab. inż. Janusz Matkowski*
rozdział II – *dr hab. Krzysztof Rudol*

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie, korekta: *Ewa Kmiecik*

Układ typograficzny i skład komputerowy systemem TEX:
Jacek Kmiecik, pre**TEX**t, tel. 0 501 494 601, e-mail: info@pretext.com.pl

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30–059 Kraków
tel. (0 12) 617–32–28, tel./fax (0 12) 636–40–38, e-mail: wydagh@uci.agh.edu.pl

Spis treści

Przedmowa

W każdym podręczniku analizy matematycznej, i to zarówno w tym sprzed wieku, jak i w tym współczesnym, znajdujemy większe lub mniejsze fragmenty poświęcone teorii szeregów. Jeszcze nie tak dawno wielu wybitnych matematyków twierdziło, iż „całą analizę matematyczną można uważać za pole zastosowań tej teorii, gdyż wszystkie procesy graniczne – z różniczkowaniem i całkowaniem włącznie – sprowadzają się do badania ciągów liczbowych lub szeregów". W chwili obecnej taka opinia nie znajduje uzasadnienia. Bezsporny jest jednak fakt, iż bez szeregów nie sposób przedstawić teorię miary i całki, uzasadnić bardzo ważne twierdzenia z teorii równań różniczkowych, wskazać niebanalne przykłady przestrzeni metrycznych, unormowanych lub unitarnych itp. Zainteresowanie szeregami wzrosło też znacznie w związku z gwałtownym rozwojem metod przybliżonych w matematyce i fizyce, a także w związku z wielorakimi zastosowaniami metod numerycznych.

W wykładzie trzymałem się zasady polegającej na wprowadzeniu najpierw pojęć bardziej ogólnych, a następnie na przechodzeniu do zagadnień bardziej wyspecjalizowanych. Taka droga jest logicznie najpoprawniejsza i w krótkim czasie pozwala zrealizować hasła zawarte w programach nauczania. Dlatego też teoria szeregów jest konstruowana w przestrzeniach unormowanych, co jest szczególnie ważne z punktu widzenia dydaktyki, bowiem można wówczas ujednolicić postrzeganie rozmaitych rodzajów zbieżności i ich wzajemnych powiązań.

Podręcznik jest podzielony na dwa rozdziały, z których każdy opatrzony jest tytułem. Rozdział I, złożony z trzech części, jest powtórzeniem wszystkich treści zawartych we wcześniej wydanej książce *Szeregi w przestrzeniach unormowanych* (Kraków, Wydawnictwa AGH 1997), natomiast rozdział II, zawierający części 4. i 5., jest opracowaniem nowym i nigdzie dotychczas nie publikowanym.

W rozdziale I starałem się przedstawić ten fragment teorii szeregów, który obejmuje podstawową część programu nauczania dotyczącego szeregów. W wyborze treści kierowałem się doświadczeniem nabytym w nauczaniu oraz celami, do jakich książka jest przeznaczona.

Po każdej części rozdziału I zamieszczone są ćwiczenia, które mają nie tylko ilustrować wykład, ale rozszerzać materiał teoretyczny i należy je traktować jako integralną część całego opracowania. Nie należy ich więc pomijać, nawet przy pierwszym czytaniu. Dla lepszego zrozumienia podano rozwiązania wszystkich ćwiczeń.

Dołączone zadania w zasadzie są przeznaczone do samodzielnego rozwiązania i mogą być z powodzeniem wykorzystane na ćwiczeniach. Rozwiązania zadań ułatwią z pewnością ocenę ich trudności oraz często potwierdzą poprawność własnych pomysłów studiującego.

Rozdział II ma być rozszerzeniem podstawowych informacji zawartych w rozdziale I.

W części 4. są przedstawione uogólnienia znanych kryteriów zbieżności wybranych szeregów liczbowych (m.in. kryteriów Kummera, Raabego, Bertranda, Gaussa i innych) na przypadek przestrzeni unormowanej nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych. Uogólnienia te nie są w zasadzie spotykane w literaturze matematycznej i naszym celem było wypełnienie tej luki. Konieczność takiego opracowania wynikała też z potrzeby, a raczej z próby, uzyskania zwartej pod względem logicznym i dydaktycznym, teorii szeregów w przestrzeniach unormowanych.

Część 5. jest szczególna, gdyż dotyczy niemal wyłącznie szeregów liczb rzeczywistych o wyrazach nieujemnych. Oryginalność tejże części opracowania polega w głównej mierze na ujednoliceniu, a więc trochę nietypowym spojrzeniu, na wszystkie kryteria, zwane potocznie kryteriami o dziurawieniu (rozrzedzeniu) szeregów.

Tym razem do żadnej części rozdziału II nie dołączono ćwiczeń ani zadań. Ten niedostatek zrekompensowano licznymi, bardzo często niebanalnymi przykładami ilustrującymi nie tylko treści podawanych i dowodzonych twierdzeń, ale również wskazującymi zakres ich zastosowań rachunkowych.

Mam nadzieję, że oprócz studentów, którzy znajdą w niniejszym opracowaniu materiał do studiowania, również wykładowcy otrzymają pomoc ułatwiającą nowoczesne przedstawienie szeregów w przestrzeniach unormowanych nie tylko na wykładach kursowych, ale i na specjalnych seminariach poświęconych tej tematyce.

Autor

rozdział I

Podstawowe informacje o szeregach w przestrzeniach unormowanych

1. Pojęcie szeregu

Niech $\mathbf{X} = (X, +; \mathbf{K}, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem liczbowym $\mathbf{K} = (K, +, \cdot)$, gdzie K jest zbiorem liczb rzeczywistych R lub K jest zbiorem liczb zespolonych C. Oznaczmy przez $c(X)$ ***zbiór wszystkich ciągów o wyrazach w zbiorze*** X. Jeżeli wyrazami ciągu x są $x_1, x_2, \ldots$, to piszemy $x = (x_n)_{n \in N}$ lub krócej (x_n), natomiast ***zbiór wartości*** takiego ***ciągu***, tj. obraz zbioru liczb naturalnych N poprzez odwzorowanie (ciąg) x, oznaczamy przez $\{x_n\}_{n \in N}$, lub krócej, przez $\{x_n\}$. Stąd wynika, że

$$(x_n) \in c(X) \Leftrightarrow \{x_n\} \subset X. \tag{1.1}$$

Definicja 1.1. Odwzorowanie $\sum\colon c(X) \to c(X)$ określone wzorem

$$\sum(x) := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n \in N} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \quad \text{dla } x = (x_n)_{n \in N} = (x_n) \in c(X)$$

nazywamy ***szeregiem o wyrazach w zbiorze*** X. Elementy $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ $(n \in N)$ nazywamy ***sumami cząstkowymi*** (***częściowymi***) ***ciągu*** (x_n).

Wartość $\sum(x)$ szeregu (odwzorowania) $\sum$ w punkcie $x = (x_n) \in c(X)$ oznaczamy też, zgodnie z tradycją, jednym z symboli:

$$\sum(x_n), \quad \sum x_n, \quad \sum_{n \in N} x_n, \quad \sum_{n \geqslant 1} x_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_1 + x_2 + \ldots$$

i nazywamy ***szeregiem generowanym przez ciąg*** x lub ***szeregiem o wyrazach*** $x_1, x_2, \ldots$.

Teraz, dla ustalonego $x = (x_n) \in c(X)$, połóżmy $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \quad (n \in N),$$

więc sumy cząstkowe ciągu (x_n) spełniają rekurencję

$$s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \quad (n \in N). \tag{1.2}$$

Możemy więc powiedzieć, że *szereg generowany przez ciąg* $x = (x_n) \in c(X)$ lub *szereg o wyrazach* $x_1, x_2, \ldots$ (ze zbioru X) jest to *ciąg sum cząstkowych ciągu* $x = (x_n)$.

Tradycyjnie, ciąg sum cząstkowych ciągu $(x_n) \in c(X)$ jest nazywany ***ciągiem sum cząstkowych szeregu*** $x_1 + x_2 + \ldots$.

Uważny Czytelnik zapewne stwierdzi, że taka definicja ciągu sum cząstkowych szeregu generowanego przez ciąg $(x_n) \in c(X)$ nie ma sensu. Jej konstrukcja godzi bowiem w zasadę, iż nowe pojęcia określamy za pomocą innych, które zostały wprowadzone (poznane) wcześniej (żadne pojęcie nie może być zdefiniowane za pomocą samego siebie!). Istotnie, w tym przypadku, ciąg sum cząstkowych szeregu $\sum x_n$ (a jak wiemy $\sum x_n$ jest ciągiem (s_n) sum cząstkowych ciągu (x_n)) został określony jako ciąg (s_n) o wyrazach (1.2). Taka definicja jest w istocie następująca: ciąg (s_n) nazywamy ciągiem sum cząstkowych ciągu (s_n).

Sądzimy, że te rozważania wyjaśniają niedostatki pojęcia „ciąg (s_n) sum cząstkowych szeregu $x_1+x_2+\ldots$". Będziemy go używać jedynie dla tradycji, mając jednak zawsze na myśli „ciąg (s_n) sum cząstkowych ciągu (x_n)".

Twierdzenie 1.1. *Szereg* (tj. odwzorowanie $\sum$ określone w definicji 1.1) *jest bijekcją.*

Dowód

Niech $s = (s_n)$ będzie dowolnym ciągiem ze zbioru $c(X)$. Połóżmy

$$x_1 := s_1, \quad x_{k+1} := s_{k+1} - s_k \quad \text{dla } k \in N.$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = s_1 + \sum_{i=2}^{n} (s_i - s_{i-1}) = s_n \quad \text{dla } n \in N,$$

co oznacza, że

$$\sum (x_n) = \sum_{n \in N} x_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = (s_n) = s.$$

Zatem szereg jest suriekcją.

Niech teraz $x = (x_n) \in c(X)$ i $y = (y_n) \in c(X)$. Jeżeli $x \neq y$, to istnieje wskaźnik $k \in N$ taki, że

$$k = \min\{m \in N : x_m \neq y_m\}.$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \neq \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

a stąd wynika, że ciągi sum cząstkowych ciągów (x_n) i (y_n) są różne.

Zatem

$$\bigwedge_{x,y\in c(X)} (x \neq y) \Rightarrow \left(\sum_{n\in N} x_n \neq \sum_{n\in N} y_n\right),$$

co oznacza, że szereg jest również iniekcją. ■

W zbiorze $c(X)$ dodawanie ciągów i mnożenie ciągów przez elementy ze zbioru K ciała $\mathbf{K} = (K, +, \cdot)$ określamy w naturalny sposób:

$$[x = (x_n) \in c(X) \wedge y = (y_n) \in c(X)] \Rightarrow [x + y := (x_n + y_n) \in c(X)]\,, \tag{1.3}$$

$$[a \in K \wedge x = (x_n) \in c(X)] \Rightarrow [ax := (ax_n) \in c(X)]\,. \tag{1.4}$$

Można sprawdzić, że zbiór $c(X)$ wraz z działaniami (1.3) i (1.4) jest *przestrzenią wektorową nad ciałem* $\mathbf{K}$, którą oznaczamy przez $\mathbf{c}(X)$. A zatem, $\mathbf{c}(X) = (c(X), +; \mathbf{K}, \cdot)$.

TWIERDZENIE 1.2. *Szereg* (tj. odwzorowanie $\sum$ określone w definicji 1.1) *jest funkcją liniową, tzn.*

$$[a, b \in K \wedge x, y \in c(X)] \Rightarrow \left[\sum(ax + by) = a\sum(x) + b\sum(y)\right]$$

lub inaczej

$$[a, b \in K \wedge (x_n), (y_n) \in c(X)] \Rightarrow \left[a\sum_{n\in N} x_n + b\sum_{n\in N} y_n = \sum_{n\in N}(ax_n + by_n)\right].$$

Proste uzasadnienie twierdzenia 1.2 pozostawiam Czytelnikowi.

UWAGA 1.1. Od tego momentu (w całym rozdziale) wzmacniamy założenia przyjmując, że w przestrzeni wektorowej $\mathbf{X} = (X, +; \mathbf{K}, \cdot)$ nad ciałem $\mathbf{K} = (K, +, \cdot)$ została określona norma $\|\,\|$. To już wystarcza, aby mówić o zbieżności ciągu $(x_n) \in c(X)$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ lub inaczej o zbieżności takiego ciągu w sensie normy $\|\,\|$.

Podstawowym zadaniem teorii szeregu, określonego w definicji 1.1, jest badanie zbieżności szeregów generowanych przez ciągi ze zbioru $c(X)$. Znaczy to, że mając dany ciąg $x = (x_n) \in c(X)$ lub znając tylko niektóre jego własności, należy rozstrzygnąć czy ciąg sum cząstkowych (s_n) ciągu (x_n), tj. czy szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ generowany przez ciąg (x_n), jest zbieżny bądź rozbieżny (w sensie normy $\|\,\|$), a w przypadku zbieżności wyznaczyć (ewentualnie) jego granicę.

Pobieżna analiza powyższego zadania może prowadzić do wniosku, iż jest ono zwykle proste. I tak jest rzeczywiście w licznych, ale niezbyt wyszukanych przykładach. Bardzo często jednak ciąg sum cząstkowych $(x_1+\ldots+x_n)$ jest skomplikowany i badanie jego zbieżności jest zadaniem o wiele trudniejszym niż analiza „ciągu wyjściowego", tj. ciągu (x_n).

Definicja 1.2. Jeżeli ciąg (s_n) sum cząstkowych ciągu $(x_n) \in c(X)$ jest zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, to mówimy, że ***szereg*** $x_1 + x_2 + ...$ ***jest zbieżny*** w tejże przestrzeni. Piszemy wówczas

$$x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{n \in N} x_n \rightarrow \quad \text{lub} \quad x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{n \in N} x_n \in X.$$

Jeśli zaś element $g \in X$ jest granicą ciągu (s_n), to mówimy, że ***suma szeregu*** $x_1 + x_2 + \ldots$ jest równa g. Piszemy wówczas

$$x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{n \in N} x_n \rightarrow g \quad \text{lub} \quad x_1 + x_2 + \ldots = \sum_{n \in N} x_n = g.$$

Z powyższej definicji oraz z twierdzenia 1.2 i własności ciągów zbieżnych w przestrzeniach unormowanych wynika

Twierdzenie 1.3. *Jeżeli w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ (zobacz uwagę 1.1) *szereg*

$$x_1 + x_2 + \ldots$$

generowany przez ciąg $(x_n) \in c(X)$ *jest zbieżny* (*ma sumę* $g \in X$) *i szereg*

$$y_1 + y_2 + \ldots$$

generowany przez ciąg $(y_n) \in c(X)$ *jest zbieżny* (*ma sumę* $h \in X$), *to w tej samej przestrzeni szereg*

$$a \sum_{n \in N} x_n + b \sum_{n \in N} y_n = \sum_{n \in N} (a x_n + b y_n)$$

jest zbieżny (*ma sumę* $ag + bh$) *dla dowolnych* $a, b \in K$.

Uwaga 1.2. Mówiąc o zbieżności (sumie) szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$, gdzie $(x_n) \in$ $\in c(X)$, mamy zawsze na myśli zbieżność (sumę) tego szeregu w konkretnej przestrzeni unormowanej, np. $(\mathbf{X}, \| \, \|)$. Uwaga ta jest szczególnie istotna wówczas, gdy w przestrzeni wektorowej $\mathbf{X}$ znana jest jeszcze inna norma, np. $\| \, \|_1$, oraz normy $\| \, \|_1$ i $\| \, \|$ nie są równoważne. Dodajmy, że taka sytuacja może zaistnieć tylko wówczas, gdy wymiar przestrzeni $\mathbf{X}$ jest nieskończony.

Uwaga 1.3. Skądinąd wiadomo, że *jeśli przestrzeń wektorowa* $\mathbf{X} = (X, +; \mathbf{K}, \cdot)$ *ma wymiar skończony, to wszystkie normy w* $\mathbf{X}$ *są równoważne* (zobacz, np. [5], strona 53, twierdzenie 25.3). Stąd wynika, że *jeśli* $\dim \mathbf{X} \in N$ *oraz ciąg* $(x_n) \in c(X)$ *jest zbieżny* (*ma granicę* $g \in X$) *w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, *to jest on zbieżny* (*ma tę samą granicę* $g \in X$) *w każdej innej przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|_1)$ *i na odwrót.* Zatem, w skończenie wymiarowych przestrzeniach $\mathbf{X}$ badanie zbieżności szeregu generowanego przez ciąg $x \in c(X)$, bądź wyznaczanie jego sumy można sprowadzić do rozważania tych zadań w jednej konkretnej przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Uwaga 1.4. Bardzo często będziemy rozważać szeregi liczbowe (rzeczywiste lub zespolone). Wówczas $\mathbf{X}$ będzie przestrzenią wektorową liczb rzeczywistych $\mathbb{R} = (R, +; \mathbf{R}, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ lub przestrzenią wektorową liczb zespolonych $\mathbb{C} = (C, +; \mathbf{C}, \cdot)$ nad ciałem liczb zespolonych $\mathbf{C} = (C, +, \cdot) = (R^2, +, \cdot)$. W pierwszej z tych przestrzeni jako jedną z norm można przyjąć wartość bezwzględną, a w drugiej – moduł. Obie te normy, tj. wartość bezwzględną i moduł będziemy oznaczać tym samym symbolem $|\,|$.

Uwaga 1.5. Ponieważ $\dim \mathbb{R} = 1$ i $\dim \mathbb{C} = 2$, więc badanie zbieżności szeregów liczbowych (rzeczywistych lub zespolonych) bądź wyznaczanie ich sumy można ograniczyć do rozwiązywania odpowiednich zadań w przestrzeniach unormowanych $(\mathbb{R}, |\,|)$ i $(\mathbb{C}, |\,|)$ (zobacz uwagi 1.3 i 1.4).

Przykłady

1.1. Niech q będzie liczbą (rzeczywistą lub zespoloną). Ciąg sum cząstkowych ciągu (q^n), tj. szereg $q + q^2 + \ldots$, zwany ***szeregiem geometrycznym*** o ilorazie q, ma postać

$$(s_n)_{n \in N} = (q + q^2 + \ldots + q^n)_{n \in N}.$$

Ponieważ dla dowolnych liczb a i b oraz dla każdego $n \in N$ spełniona jest równość

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

więc, w szczególności dla $a = 1$ oraz $b = q \neq 1$, otrzymujemy

$$1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - g^n}{1 - q},$$

a po pomnożeniu obu stron ostatniej równości przez q

$$q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q}{1 - q}(1 - q^n) \quad (q \neq 1).$$

Dlatego

$$(s_n)_{n \in N} = \begin{cases} \dfrac{q}{1 - q}(1 - q^n)_{n \in N}, & \text{gdy } q \neq 1, \\ (n)_{n \in N}, & \text{gdy } q = 1. \end{cases}$$

Ale

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |q| < 1, \\ 1, & \text{gdy } q = 1, \end{cases}$$

a w pozostałych przypadkach ciąg $(q^n)_{n\in N}$ jest rozbieżny. W rezultacie, ciąg (s_n) jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ (jego granica jest wówczas równa $q/(1-q)$) i rozbieżny, gdy $|q| \geqslant 1$.

Oznacza to, że *szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny tylko wówczas, gdy $|q| < 1$ (jego suma jest wówczas równa $q/(1-q)$)*. W pozostałych przypadkach szereg geometryczny jest rozbieżny.

1.2. ***Szeregiem harmonicznym***[1] o wykładniku 1 nazywamy szereg generowany przez ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$. Tak określony szereg harmoniczny ma więc postać następującą

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n} = (s_n)_{n\in N} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)_{n\in N}.$$

Dla wykazania, że jest on rozbieżny, przypuśćmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = g \in R$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$. Ale

$$(s_{2n} - s_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \in N,$$

co przeczy temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$.

Stąd wynika, że *szereg harmoniczny o wykładniku 1 jest rozbieżny.*

1.3. Szereg

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)} = (s_n)_{n\in N} = \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in N}$$

jest zbieżny i jego suma jest równa 1, bo

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1, \end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$. Możemy więc napisać

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

---

[1] Bez trudu można sprawdzić, że każdy wyraz tego szeregu, oprócz pierwszego, jest średnią harmoniczną dwóch wyrazów sąsiednich, tzn. $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}\right)$ dla $n \geqslant 2$, gdzie $x_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in N$.

1.4. Niech t będzie liczbą rzeczywistą taką, że $-t \notin N$, tzn. $t \neq -1, -2, \ldots$. Wówczas

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{(t+n)(t+n+1)} = \frac{1}{t+1},$$

bo

$$\frac{1}{(t+n)(t+n+1)} = \frac{1}{t+n} - \frac{1}{t+n+1} \quad \text{dla } n \in N.$$

Ogólniej, jeśli $-t \notin N$ oraz $p \in N$, to

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{(t+n)(t+n+1)\cdots(t+n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+p)},$$

bo

$$\frac{1}{(t+n)(t+n+1)\cdots(t+n+p)} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(t+n)\cdots(t+n-1+p)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(t+n+1)\cdots(t+n+p)}\right] \quad \text{dla } n \in N.$$

1.5. Rozważmy szereg $\sum\limits_{n \in N} \frac{1}{n^2}$, zwany ***szeregiem harmonicznym o wykładniku 2***. Jego ciąg sum cząstkowych

$$(s_n)_{n \in N} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in N}$$

jest rosnący oraz

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot n} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{dla } n \geqslant 2 \ (s_1 = 1). \end{aligned}$$

Ciąg $(s_n)_{n \in N}$ jest więc rosnący i ograniczony z góry, a wobec tego jest zbieżny. Jego granicę g nie jest łatwo wyznaczyć, z pewnością jednak $g \leqslant 2$. Można wykazać, że

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Podobnie, szereg $\sum\limits_{n \in N} \frac{1}{n!}$ jest zbieżny, bo w tym przypadku

$$(s_n)_{n \in N} = \left(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)_{n \in N}$$

jest również ciągiem rosnącym (oczywiste) i ograniczonym z góry, gdyż

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n-1 \text{ razy}}} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 2 \quad \text{dla } n \in N$$

(zobacz przykład 1.1).

Uwaga 1.6. Jeżeli $(x_n) \in c(X)$ i $(y_n) \in c(X)$ oraz szeregi $x_1 + x_2 + \ldots$ i $y_1 + y_2 + \ldots$ mają tę samą sumę $g \in X$, tzn.

$$\sum_{n\in N} x_n = g \quad \text{i} \quad \sum_{n\in N} y_n = g,$$

to stąd nie można wnioskować, że

$$\sum_{n\in N} x_n = \sum_{n\in N} y_n$$

(ostatni znak równości odnosi się do ciągów!). Na przykład,

$$\sum_{n\in N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(zobacz przykłady 1.1 i 1.3), ale równość

$$\sum_{n\in N} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)}$$

oznaczałaby, że

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

dla każdego $n \in N$, co jest oczywistą nieprawdą.

Umowa 1.1. W dalszym ciągu, dla znacznego uproszczenia zapisu, przyjmujemy umowę, że funkcję f (najczęściej rzeczywistą) zmiennej t będziemy oznaczać przez $f(t)$. Zwykle zapis $f(t)$ oznacza wartość funkcji f w punkcie t. Często jednak (zwłaszcza w teorii szeregu) zastąpienie oznaczenia funkcji f przez $f(t)$ jest bardzo wygodne i zwykle nie prowadzi do nieporozumień. Mówimy, np. o funkcji $\sin t$, chociaż właściwie powinniśmy mówić o funkcji sin, a symbol $\sin t$ zarezerwować dla jej wartości w punkcie t. Korzyść z tej, nie w pełni uzasadnionej, konwencji jest też następująca: często piszemy np. funkcja $t(1-t^3)$ $(t \in R)$ zamiast $R \ni t \to t(1-t^3)$ i nie musimy wprowadzać specjalnego symbolu dla oznaczenia tej funkcji.

1.6. Niech $C([0,1])$ oznacza zbiór funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale $[0,1]$. Zbiór ten wraz z tzw. zwykłym dodawaniem funkcji i zwykłym mnożeniem funkcji przez liczbę rzeczywistą tworzy przestrzeń wektorową $\mathbf{C}([0,1])$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$. *Przestrzeń* $\mathbf{C}([0,1])$ *ma wymiar nieskończony*, bo np. funkcje $e_k\colon [0,1] \ni t \to t^k$ $(k \in N)$ są liniowo niezależne (dlaczego?).

W przestrzeni $\mathbf{C}([0,1])$ określamy normy:

$$\| \,\|_0 \colon C([0,1]) \ni f \to \|f\|_0 := \max_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad (\textbf{\textit{norma jednostajna}}) \tag{1.5}$$

$$\| \,\|_1 \colon C([0,1]) \ni f \to \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \quad (\textbf{\textit{norma całkowa}}) \tag{1.6}$$

(proponuję sprawdzić, że odwzorowania $\| \,\|_0$ i $\| \,\|_1$ są rzeczywiście normami w przestrzeni $\mathbf{C}([0,1])$).

Rozważmy teraz szereg

$$\sum_{n\in N} t \cdot \left[n^{\frac{3}{2}} e^{-nt} - (n-1)^{\frac{3}{2}} e^{-(n-1)t}\right] \tag{1.7}$$

(zobacz umowę 1.1) i zbadajmy jego zbieżność w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{C}([0,1]), \| \,\|_0)$. W tym celu zauważmy, że

$$\|s_n(t)\|_0 = \left\|tn^{\frac{3}{2}} e^{-nt}\right\| = \max_{t\in[0,1]} \left|tn^{\frac{3}{2}} e^{-nt}\right| = \frac{1}{e}\sqrt{n} \quad \text{dla } n \in N$$

(dlaczego?). Wobec tego ciąg $(\|s_n(t)\|_0)_{n\in N} \in c(R)$ nie jest ograniczony, a więc ciąg $(s_n(t))_{n\in N} \in c(C([0,1]))$ nie może być zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{C}([0,1]), \| \,\|_0)$. Stąd wnioskujemy, że szereg (1.7) nie jest zbieżny (tzn. jest ***rozbieżny***) w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \,\|_0)$.

Zbadajmy teraz zbieżność tego samego szeregu (1.7), ale w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \,\|_1)$. W tym celu zauważmy, że

$$\|s_n(t)\|_1 = \int_0^1 tn^{\frac{3}{2}} e^{-nt} dt = n^{\frac{3}{2}} \frac{1}{n^2} e^{-nt}(-nt-1)\Big|_0^1 =$$
$$= n^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{n^2} - e^{-n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right)\right] \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Stąd wynika, że w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \,\|_1)$ szereg (1.7) jest zbieżny i jego suma jest równa $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ jest tu funkcją identycznie równą zero na przedziale $[0,1]$).

Przykład ten pozwala nie tylko lepiej zrozumieć uwagę 1.2, ale również dowodzi, że *normy* $\| \,\|_0$ i $\| \,\|_1$ *nie są równoważne w przestrzeni* $\mathbf{C}([0,1])$ (dlaczego?).

1.7. Rozważmy szereg

$$t + (t^2 - t) + (t^3 - t^2) + \ldots = (s_n(t))_{n \in N} = (t^n)_{n \in N}$$

i zbadajmy jego zbieżność w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_0)$ (zobacz przykład 1.6). Gdyby istniała funkcja rzeczywista f ciągła na przedziale $[0,1]$ ($f \in C([0,1])$) taka, że $s_n \to f$ w sensie normy $\| \|_0$ (zobacz (1.5)), to spełniony byłby warunek

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{k \in N} \bigwedge_{k \leqslant n \in N} \|s_n - f\|_0 = \max_{t \in [0,1]} |t^n - f(t)| < \varepsilon,$$

który jest równoważny warunkowi

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{k \in N} \bigwedge_{k \leqslant n \in N} \bigwedge_{t \in [0,1]} |t^n - f(t)| < \varepsilon.$$

Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Wówczas istnieje $k \in N$ takie, że dla dowolnego $n \geqslant k$ oraz dla każdego $t \in [0,1]$ spełniona jest nierówność: $|t^n - f(t)| < \frac{1}{4}$. W szczególności, ostatnia nierówność jest spełniona w punktach $t_0 = 1$ oraz $t_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \geqslant k)$ i dlatego

$$|1^n - f(t)| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} < f(t) < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

oraz

$$\left| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{4} < \\ < f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n + \frac{1}{4} \quad (n \geqslant k).$$

Ale $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \to 0$, gdy $n \to \infty$ (dlaczego?) oraz $f(1 - 1/\sqrt{n}) \to f(1)$, gdy $n \to \infty$ (bo f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,1]$). Z ostatniej nierówności wynika więc, że

$$-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} \leqslant f(1) \leqslant 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(dlaczego?), co przeczy temu, że $\frac{3}{4} < f(1) < \frac{5}{4}$.
Stąd wynika, że ciąg $(s_n(t))_{n \in N}$ nie ma granicy w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_0)$, co oznacza, że rozpatrywany w tym przykładzie szereg jest rozbieżny w tej przestrzeni.

Na zakończenie tych bardzo ogólnych rozważań o szeregach podamy jeszcze dwa twierdzenia charakteryzujące zbieżność szeregów liczbowych o wyrazach rzeczywistych bądź zespolonych. Przed tym jednak przypomnijmy, iż zgodnie z powszechną umową, liczby zespolone mające część urojoną równą zero będziemy utożsamiać z ich częścią rzeczywistą. Taka umowa jest oczywiście uzasadniona, gdyż istnieje bijekcja zbioru liczb rzeczywistych R na zbiór liczb zespolonych z częścią urojoną równą zero. Co więcej, traktowanie przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ jako podprzestrzeni przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$ pozwala bezpośrednio przenosić twierdzenia formułowane dla szeregów o wyrazach zespolonych na przypadek szeregów o wyrazach rzeczywistych, lecz nie na odwrót.

Twierdzenie 1.4. (kryterium zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach stałego znaku). *Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu* $(a_n) \in c(R)$ *są nieujemne (niedodatnie), to szereg* $a_1 + a_2 + \ldots$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum cząstkowych ciągu* (a_n) *jest ograniczony z góry (z dołu).*

Dowód twierdzenia 1.4 jest elementarny. Wystarczy bowiem zauważyć, że jeśli $a_n \geqslant 0$ $(a_n \leqslant 0)$ dla $n \in N$, to ciąg $(s_n) := (a_1 + \ldots + a_n)$ jest niemalejący (nierosnący) i z założenia ograniczony z góry (z dołu), a zatem zbieżny.

Twierdzenie 1.5. (o zbieżności szeregów mających wyrazy zespolone). *Szereg* $z_1 + z_2 + \ldots$, *gdzie* $z_n = x_n + iy_n \in C$ *dla* $n \in N$, *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbb{C}, |\,|)$ (zobacz uwagi 1.4 i 1.5) *wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi:*

$$\sum_{n \in N} x_n \quad \textit{oraz} \quad \sum_{n \in N} y_n$$

w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. *Co więcej,*

$$\left(\sum_{n \in N} z_n = x + iy \in C \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n \in N} x_n = x \wedge \sum_{n \in N} y_n = y \right).$$

Dowód twierdzenia 1.5 pomijamy, gdyż jest ono natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 1.3.

Przykłady

1.8. Niech $\sum\limits_{n \in N} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych $((a_n) \in c(R_+ \cup \{0\}))$, zbieżnym w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. Zgodnie z twierdzeniem 1.4, ciąg $(s_n) := (a_1 + {} + \ldots + a_n)$ jest więc ograniczony z góry, tzn.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n \in N} s_n \leqslant M.$$

Stąd wynika, że

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n \in N} (a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 \leqslant M^2,$$

a zatem szereg $a_1^2 + a_2^2 \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz jeszcze raz twierdzenie 1.4).

W ten sposób stwierdziliśmy, że

$$\begin{array}{l} \textit{jeżeli szereg } a_1 + a_2 + \ldots \textit{ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny,} \\ \textit{to zbieżny jest również szereg } a_1^2 + a_2^2 \ldots . \end{array} \tag{1.8}$$

Podkreślmy jednak, iż twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, bowiem np. szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (zobacz przykłady 1.5 i 1.2).

1.9. Aby zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + (n+1)^2}{n^2(n+1)[n - i(n+1)]}$$

zauważmy, że

$$\begin{aligned} z_n &:= \frac{n^2 + (n+1)^2}{n^2(n+1)[n - i(n+1)]} = \frac{[n^2 + (n+1)^2][n + i(n+1)]}{n^2(n+1)[n^2 + (n+1)^2]} = \\ &= \frac{1}{n(n+1)} + i\frac{1}{n^2} = x_n + iy_n. \end{aligned}$$

Ale szereg $\sum\limits_{n\in N} x_n = \sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny i ma sumę równą 1 (przykład 1.3) oraz szereg $\sum\limits_{n\in N} y_n = \sum\limits_{n\in} \frac{1}{n^2}$ jest również zbieżny i ma sumę $\frac{1}{6}\pi^2$, zatem zadany szereg liczb zespolonych jest zbieżny i jego suma jest równa $1 + i\frac{1}{6}\pi^2$.

1.10. Wydzielenie części rzeczywistej i części urojonej wyrazów szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right)^n$$

jest zadaniem skomplikowanym (szczególnie bez stosowania postaci trygonometrycznej liczby zespolonej). Dlatego też zrezygnujemy z zastosowania twierdzenia 1.5 i najpierw uzasadnimy bardzo użyteczny wzór

$$\begin{aligned} &[n \in N \wedge 1 \neq z \in C] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[s_n := z + 2z^2 + \ldots + (n-1)z^{n-1} + nz^n = z\frac{1 - z^n}{(1-z)^2} - \frac{nz^{n+1}}{1-z}\right]. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dla uzasadnienia powyższego wzoru wystarczy zauważyć, że

$$(1-z)s_n = z + z^2 + \ldots + z^n - nz^{n+1} = \frac{z}{1-z}(1 - z^n) - nz^{n+1}$$

i z tejże równości wyliczyć s_n.

Teraz wzór (1.9) zastosujemy do naszego szeregu, w którym $z_n = n \cdot z^n$ oraz $z = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)$. Wówczas

$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = z + 2z^2 + \ldots + nz^n = z\frac{1-z^n}{(1-z)^2} - \frac{nz^{n+1}}{1-z},$$

gdzie $z = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)$.

Ponieważ

$$|z^n| = |z|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty$$

oraz

$$\begin{aligned} \left|nz^{n+1}\right| = n|z|^{n+1} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} &= \frac{n}{2}\frac{1}{(1+1)^n} < \\ < \frac{n}{2}\frac{1}{\binom{n}{3}} &= \frac{n}{2}\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty, \end{aligned}$$

więc

$$z^n \to 0 \quad \text{oraz} \quad nz^{n+1} \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty$$

i w rezultacie

$$s_n \to \left.\frac{z}{(1-z)^2}\right|_{z=\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)} = g \in \mathbb{C}, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, że zadany szereg liczb zespolonych jest zbieżny i jego sumą jest liczba g.

Ćwiczenia

1.1. Wykazać, że jeśli (a_n), $(b_n) \in c(R)$ i szeregi $\sum\limits_{n\in N} |a_n|$ oraz $\sum\limits_{n\in N} |b_n|$ są zbieżne, to zbieżne są również szeregi:

a) $\sum\limits_{n\in N} |a_n b_n|$;

b) $\sum\limits_{n\in N} (a_n + b_n)^2$;

c) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n}|a_n|$ (w tym przypadku należy założyć tylko zbieżność szeregu $\sum\limits_{n\in N} |a_n|$).

1.2. Sprawdzić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} t\left[n^2 e^{-nt} - (n-1)^2 e^{-(n-1)t}\right]$$

jest zbieżny dla każdej liczby $t \in [0,1]$ (w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$), ale nie jest on zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_0)$.

1.3. Pokazać, że jeśli ciąg $(z_n) \in c(C)$ ma tę własność, że $\operatorname{Re} z_n \geqslant 0$ dla $n \in N$ oraz szeregi $\sum_{n\in N} \operatorname{Re} z_n$ i $\sum_{n\in N} z_n^2$ są zbieżne odpowiednio w przestrzeniach $(\mathbb{R}, |\,|)$ i $(\mathbb{C}, |\,|)$, to szereg $\sum_{n\in N} |z_n|^2$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Wskazać przykład ciągu $(z_n) \in c(C)$ takiego, że $\operatorname{Re} z_n \geqslant 0$ dla $n \in N$ oraz szeregi $\sum_{n\in N} \operatorname{Re} z_n$ i $\sum_{n\in N} z_n^2$ są zbieżne, ale szereg $\sum_{n\in N} z_n$ jest rozbieżny.

1.4. Sprawdzić, że jeśli szereg $\sum_{n\in N} u_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, to dla dowolnych liczb a, b, c takich, że $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$, oraz $c \geqslant 0$, zbieżny jest też szereg postaci

$$\sum_{n\in N} \frac{u_n}{(a + bu_n)^c}.$$

Rozwiązania ćwiczeń

1.1. Zauważmy najpierw, iż z przykładu 1.8 (zobacz też zadanie 1.3) wynika natychmiast, że zbieżność szeregów $\sum_{n\in N} |a_n|$ i $\sum_{n\in N} |b_n|$ implikuje zbieżność szeregów $\sum_{n\in N} a_n^2$ i $\sum_{n\in N} b_n^2$.

a) Ponieważ $|a_n b_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ dla każdego $n \in N$, więc na mocy twierdzenia 1.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{n\in N} |a_k b_k| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\,(M_a + M_b) := M \quad \text{dla } n \in N \ (M_a,\ M_b > 0). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Teraz jeszcze raz korzystamy z twierdzenia 1.4 i bez trudu stwierdzamy, że szereg $\sum_{n\in N} |a_n b_n|$ jest zbieżny.

b) Korzystamy z nierówności $(*)$ i otrzymujemy

$$\begin{aligned} u_n := \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant \\ \leqslant M_a + M + M_b \quad \text{dla } n \in N, \end{aligned}$$

a stąd, na mocy twierdzenia 1.4 wnosimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ jest zbieżny.

c) Połóżmy $b_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in N$. Wówczas szereg $\sum\limits_{n\in N} b_n^2 = \sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (przykład 1.5) i wobec tego szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| = \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}|a_n|$$

jest również zbieżny (zobacz jeszcze raz nierówność $(*)$).

1.2. Jeśli t_0 jest ustaloną liczbą z przedziału $[0,1]$, to

$$s_n(t_0) = t_0 n^2 e^{-nt_0} \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty$$

(dlaczego?) i wobec tego

$$\sum_{n=1}^{\infty} t\left[n^2 e^{-nt} - (n-1)^2 e^{-(n-1)t}\right] = 0 \quad \text{dla każdego } t \in [0,1].$$

Z kolei,

$$\|s_n(t)\|_0 = \max_{t\in[0,1]}|tn^2e^{-nt}| = \max_{t\in[0,1]} tn^2e^{-nt} = \frac{1}{n}n^2e^{-n\frac{1}{n}} = ne^{-1}$$

(dlaczego?), co oznacza, że ciąg $(s_n(t))_{n\in N}$ nie jest ograniczony w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_0)$, a więc nie może on być ciągiem zbieżnym w tej przestrzeni. Zatem, zadany szereg jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_0)$.

1.3. Niech $z_n = x_n + iy_n$ dla $n \in N$. Ponieważ $x_n \geqslant 0$ dla $n \in N$ oraz szereg $\sum\limits_{n\in N} x_n$ jest zbieżny, więc zbieżny jest też szereg $\sum\limits_{n\in N} x_n^2$ (przykład 1.8). Stąd oraz z faktu, że zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n\in N} z_n^2 = \sum\limits_{n\in N}(x_n^2 - y_n^2) + 2i\sum\limits_{n\in N} x_n y_n$ (zobacz twierdzenie 1.5) wynika, że zbieżny jest też szereg $\sum\limits_{n\in N} y_n^2$ (dlaczego?). Wobec tego zbieżny jest szereg $\sum\limits_{n\in N}|z_n|^2 = \sum\limits_{n\in N} x_n^2 + \sum\limits_{n\in N} y_n^2$ (zobacz twierdzenie 1.3).

Jeżeli $z_n = \frac{1}{n^2} - i\frac{1}{n}$ $(n \in N)$, to $\operatorname{Re} z_n = \frac{1}{n^2} > 0$ dla każdego $n \in N$ oraz szeregi:

$$\sum_{n\in N}\operatorname{Re} z_n = \sum_{n\in N}\frac{1}{n^2},$$

$$\sum_{n\in N} z_n^2 = \sum_{n\in N}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}\right) - 2i\sum_{n\in N}\frac{1}{n^3}$$

są zbieżne (zobacz przykład 1.5 oraz zadanie 1.6), ale szereg

$$\sum_{n\in N} z_n = \sum_{n\in N} \frac{1}{n^2} - i \sum_{n\in N} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (zobacz twierdzenie 1.5 oraz przykład 1.2).

1.4. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n\in N} u_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny, więc ciąg sum cząstkowych ciągu (u_n) jest ograniczony (twierdzenie 1.4), a zatem

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} a_1 + \ldots + a_n \leqslant M.$$

Zauważmy teraz, że jeśli $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ oraz $c \geqslant 0$, to $\frac{u_n}{(a+bu_n)^c} \geqslant 0$ dla każdego $n \in N$, a ponadto

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{(a+bu_1)^c} + \ldots + \frac{u_1}{(a+bu_n)^c} &\leqslant \frac{u_1}{a^c} + \ldots + \frac{u_n}{a^c} = \frac{1}{a^c}\,(u_1 + \ldots + u_n) \leqslant \\ &\leqslant u_1 + \ldots + u_n \end{aligned}$$

dla $n \in N$. Dlatego też

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} \frac{u_1}{(a+bu_1)^c} + \ldots + \frac{u_n}{(a+bu_n)^c} \leqslant M.$$

Stąd oraz z twierdzenia 1.4 wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n\in N} \frac{u_n}{(a+bu_1)^c}$ dla dowolnych liczb $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ oraz $c \geqslant 0$.

Zadania

1.1. Wyznaczyć sumy następujących szeregów:

a) $\sum\limits_{n\in N} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

b) $\sum\limits_{n\in N} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

c) $\sum\limits_{n\in N} \left(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;

d) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{(n-\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})}$;

e) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{(n-\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})(n+2-\sqrt{2})}$.

1.2. Wykazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

a) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{2n-1}$;

b) $\sum_{n\in N} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

c) $\sum_{n\in N} \frac{n}{\sqrt{n}-in}$;

d) $\sum_{n\in N} \left[\frac{n}{1+nt} - \frac{n-1}{1+(n-1)t}\right]$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\ \|_0)$;

e) $\sum_{n\in N} t\left[ne^{-\frac{1}{2}nt^2} - (n-1)e^{-\frac{1}{2}(n-1)t^2}\right]$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\ \|_0)$;

f) $\sum_{n\in N} t\left[n^3e^{-nt} - (n-1)^3e^{-(n-1)t}\right]$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\ \|_1)$ (zobacz wzory (1.5) i (1.6)).

1.3. Pokazać, że jeśli $a_n \geqslant 0$ dla $n \in N$ oraz szereg $\sum_{n\in N} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n\in N} a_n^p$ jest też zbieżny dla każdej liczby naturalnej $p > 1$ (jest to uogólnienie przykładu 1.8).

1.4. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n\in N} \frac{1}{n^2+in}$;

b) $\sum_{n\in N} \frac{1}{n+i\sqrt{n}}$;

c) $\sum_{n\in N} \frac{n}{(1+i)^n}$.

1.5. Dla jakich liczb zespolonych z zbieżne są szeregi:

a) $\sum_{n\in N} \frac{z^n}{(2+i)^n}$;

b) $\sum_{n\in N} \frac{3^n}{z^{2n}}$;

c) $\sum_{n\in N} \frac{1}{(n+z\cdot\bar{z})^2}$.

1.6. Niech $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Sprawdzić, że jeśli ciąg liczb zespolonych (z_n) jest ograniczony oraz szereg liczb rzeczywistych $\sum_{n\in N} \|x_n\|$ $((x_n) \in c(X))$ jest zbieżny, to zbieżny jest też szereg $\sum_{n\in N} \|z_n x_n\|$.

1.7. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n\in N} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$;

b) $\sum_{n\in N} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$;

c) $\sum_{n\in N} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n^2+1)}}$;

d) $\sum_{n\in N} \frac{1}{2^n \sqrt[99]{2^n+\sqrt{3}}}$.

1.1. **a)** Ponieważ $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ dla każdego $n \in N$, więc $s_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, gdy n jest liczbą nieparzystą oraz $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, gdy n jest liczbą parzystą. Dlatego $\sum\limits_{n\in N} \frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$.

b) Ponieważ $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ dla każdego $n \in N$, więc $s_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ dla $n \in N$ i wobec tego $\sum\limits_{n\in N} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

c) W tym przypadku $s_n = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$ $(n \in N)$ i dlatego $\sum\limits_{n\in N} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right) = 1 - \sqrt{2}$.

d) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{(n-\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})} = \frac{1}{-\sqrt{2}+1} = -(1+\sqrt{2})$ (zobacz przykład 1.4).

e) $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{(n-\sqrt{2})(n+1-\sqrt{2})(n+2-\sqrt{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-\sqrt{2}+1)(-\sqrt{2}+2)} = -(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})$ (zobacz przykład 1.4).

1.2. **a)** Postąpmy podobnie jak w przykładzie 1.2 i przypuśćmy, że zadany szereg jest zbieżny do liczby $g \in R$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = g$ i wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$. Ale, w tym przypadku,

$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{2(n+1)-1} + \frac{1}{2(n+2)-1} + \ldots + \frac{1}{2\cdot 2n - 1}}_{n \text{ składników}} >$$

$$> n \cdot \frac{1}{4n-1} = \frac{\frac{1}{4}(4n-1) + \frac{1}{4}}{4n-1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4n-1} > \frac{1}{4},$$

co przeczy temu, że $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$. Stąd wynika, że zadany szereg jest rozbieżny.

b) Przypuśćmy, że zadany szereg jest zbieżny do liczby $g \in R$. Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = g$ i wobec tego $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$. Ale

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} >$$

$$> n \cdot \sqrt{\frac{1}{2n(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2(2n+1)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4(2n+1)}} > \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}},$$

co przeczy temu, iż $\lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0$. Zadany szereg jest więc rozbieżny.

c) Zauważmy, że $\sum\limits_{n\in N} \frac{n}{\sqrt{n}-in} = \sum\limits_{n\in N} \frac{\sqrt{n}}{n+1} + i \sum\limits_{n\in N} \frac{n}{n+1}$ oraz, że szereg o wyrazach dodatnich $\sum\limits_{n\in N} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, gdyż ciąg

$$(s_n) = \left(\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \ldots + \frac{n}{n+1}\right)$$

nie jest ograniczony z góry (zobacz twierdzenie 1.4). Rzeczywiście, $\frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ dla każdego $n \in N$ i dlatego

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{n^2}{n+1} \to +\infty.$$

Z powyższych ustaleń – na mocy twierdzenia 1.5 – wnosimy, że zadany szereg liczb zespolonych jest rozbieżny.

d) W tym przypadku,

$$\|s_n(t)\|_0 = \left\|\frac{n}{1+nt}\right\|_0 = \max_{t\in[0,1]} \frac{n}{1+nt} \geqslant \left(\frac{n}{1+nt}\right)_{t=\frac{1}{n^2}} =$$
$$= \frac{n^2}{n+1} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, iż w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_0)$ ciąg $(s_n(t))$ nie jest ograniczony, a więc nie jest on zbieżny w tej przestrzeni. W rezultacie, zadany szereg nie jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_0)$.

e) Tym razem $s_n(t) = tne^{-\frac{1}{2}nt^2}$ $(t \in [0,1],\ n \in N)$ i wobec tego

$$\|s_n(t)\|_0 = \max_{t\in[0,1]} nte^{-\frac{1}{2}nt^2} \geqslant \left(nte^{-\frac{1}{2}nt^2}\right)_{t=\frac{1}{\sqrt{n}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{1}{2}}} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Dalej rozumujemy tak samo jak w poprzednim zadaniu.

f) Zauważmy, że w tym zadaniu

$$\|s_n(t)\|_1 = n^3 \int_0^1 te^{-nt}dt = n^3 \left[\frac{e^{-nt}}{n^2}(-nt-1)\right]\Bigg|_0^1 =$$
$$= n - \frac{n(n+1)}{e^n} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

A zatem w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$ ciąg $(s_n(t))$ nie jest ograniczony. Nie jest więc on zbieżny w tej przestrzeni, co oznacza, że w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$ zadany szereg jest rozbieżny.

1.3. Z założenia oraz z twierdzenia 1.4 wynika, że

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} s_n := a_1 + \ldots + a_n \leqslant M.$$

Wobec tego,

$$a_1^p + \ldots + a_n^p \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^p \leqslant M^p \quad \text{dla każdego } n \in N \ (1 < p \in N).$$

Stąd oraz z twierdzenia 1.4 wynika, że szereg $\sum\limits_{n\in N} a_n^p$ jest zbieżny dla wszystkich $p > 1$ $(p \in N)$.

1.4. **a)** Ponieważ $z_n := \frac{1}{n^2+in} = \frac{1}{n^2+1} - i\frac{1}{n^3+n}$ dla $n \in N$ oraz szeregi $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^2+1}$ i $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^3+n}$ są zbieżne (dlaczego?), więc na podstawie twierdzenia 1.5 zadany szereg liczb zespolonych jest zbieżny.

b) Ponieważ $\frac{1}{n+i\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1} - i\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ $(n \in N)$ oraz szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n+1}$ jest rozbieżny (zobacz przykład 1.2), więc na mocy twierdzenia 1.5 zadany szereg liczb zespolonych jest rozbieżny.

c) W tym przypadku, $z_n = nz^n$, gdzie $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i)$ $(n \in N)$. Po zastosowaniu wzoru (1.9) otrzymujemy

$$z_1 + \ldots + z_n = z\frac{1-z^n}{(1-z)^2} - \frac{nz^{n+1}}{1-z} \qquad \left(n \in N,\ z = \frac{1}{2}(1-i)\right).$$

Ale $|z^n| = |z|^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ oraz $|nz^{n+1}| = n|z|^{n+1} = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$ (zobacz przykład 1.10) i wobec tego zadany szereg jest zbieżny, a jego suma jest równa liczbie zespolonej

$$g := \left.\frac{z}{(1-z)^2}\right|_{z=\frac{1}{2}(1-i)} = -2(1+i).$$

1.5. **a)** Jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{z}{1+i}$. Wobec tego jest on zbieżny, gdy $|q| = \frac{|z|}{\sqrt{2}} < 1$, tj. gdy $|z| < \sqrt{2}$ (zobacz przykład 1.1). Ponadto, dla każdego punktu z należącego do koła $K_{\sqrt{2}}(0) := \{z \in C\colon |z| < \sqrt{2}\}$ jego suma jest równa $\frac{z}{1+i+z}$.

b) W tym przypadku, $q = \frac{3}{z^2}$ i szereg jest zbieżny w zbiorze $\{z \in C\colon |z| > \sqrt{3}\}$.

c) Zauważmy, że $\frac{1}{(n+z\bar{z})^2} = \frac{1}{(n+|z|^2)^2}$ jest liczbą rzeczywistą dodatnią dla każdego $n \in N$ oraz

$$s_n(z) := \frac{1}{(1+|z|^2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+|z|^2)^2} \leqslant \frac{1}{1^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$$

dla każdego $z \in C$ oraz $n \geqslant 2$ (zobacz przykład 1.5). Ciąg $(s_n(z))_{n\in N}$ jest więc rosnący i ograniczony z góry dla każdego $z \in C$, co oznacza, że zadany szereg jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej C.

1.6. Niech $s_n := \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|$ oraz $u_n := \|z_1 x_1\| + \ldots + \|z_n x_n\|$ dla $n \in N$. Ponieważ ciąg $(s_n) \in c(R)$ jest zbieżny, więc jest on ograniczony, np. przez stałą $M_s > 0$. Poza tym, ciąg $(u_n) \in c(R)$ jest rosnący. A zatem, z własności normy $\| \, \|$ oraz z faktu, że ciąg $(z_n) \in c(C)$ jest ograniczony, np. przez stałą $M_z > 0$, otrzymujemy

$$u_n \leqslant |z_1|\|x_1\| + \ldots + |z_n|\|x_n\| \leqslant M_z \cdot s_n \leqslant M_z \cdot M_s \quad \text{dla } n \in N.$$

Stąd zaś wynika, że ciąg (u_n) jest zbieżny.

1.7. **a)** Przyjąć $u_n = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in N$ oraz położyć $a = b = 1$, $c = \frac{1}{2}$ i zastosować ćwiczenie 1.4.

b) Przyjąć $u_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N)$, $a = b = 1$, $c = 2$ i zastosować ćwiczenie 1.4.

c) Przyjąć $u_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N)$, $a = b = 1$, $c = \frac{2}{3}$ i zastosować ćwiczenie 1.4.

d) Przyjąć $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $(n \in N)$ oraz położyć $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $c = \frac{1}{99}$ i zastosować ćwiczenie 1.4.

2. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów

W dalszym ciągu utrzymujemy w mocy wszystkie wcześniejsze oznaczenia i definicje.

TWIERDZENIE 2.1. *Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągów* (x_n), $(y_n) \in c(X)$ *są równe* (tzn. istnieje $k \in N$ takie, że $x_n = y_n$ dla $n \geqslant k$), *to szeregi generowane przez te ciągi są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

DOWÓD
Połóżmy $A := (x_1 + \ldots + x_k) - (y_1 + \ldots + y_k)$. Wówczas $s_n = u_n + A$ dla $n \geqslant k$, gdzie

$$s_n := x_1 + \ldots + x_n, \; u_n = y_1 + \ldots + y_n \quad (n \in N).$$

Ciągi (s_n) i $(u_n + A)$ mają więc prawie wszystkie wyrazy równe. Zatem w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ mają one bądź tę samą granicę $g \in X$ albo są oba rozbieżne. Znaczy to, że:

$$\sum_{n \in N} x_n = g \quad \text{i} \quad \sum_{n \in N} y_n = g - A$$

(zobacz definicję 1.2) albo szeregi $x_1 + x_2 + \ldots$ i $y_1 + y_2 + \ldots$ są równocześnie rozbieżne. ■

Skrócona, ale mało precyzyjna wypowiedź twierdzenia 2.1 jest następująca: *zmiana skończonej liczby wyrazów szeregu nie ma wpływu na jego zbieżność.*

Odnotujmy też, że z twierdzenia 2.1 wynika

WNIOSEK 2.1. *W przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony jeden z następujących warunków:*

a) *istnieje* $k \in N$ *takie, że szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+k}, \tag{2.1}$$

*zwany **k. resztą szeregu*** $x_1 + x_2 + \ldots$, *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$;

b) *dla każdego* $k \in N$ *szereg* (2.1) *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Twierdzenie 2.2. (warunki konieczne zbieżności szeregu). *Jeżeli* $(x_n) \in c(X)$ *oraz szereg* $x_1 + x_2 + \dots$ *jest zbieżny w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, *to*:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0, \tag{2.3}$$

ciąg $(\|x_n\|)_{n\in N}$ *jest ograniczony, tzn.* $\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} \|x_n\| \leqslant M.$ (2.4)

Dowód

(2.2) Zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \dots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest równoważna zbieżności ciągu sum cząstkowych $(s_n)_{n\in N} = (x_1 + \ldots + x_n)_{n\in N}$ w tej samej przestrzeni (zobacz definicję 1.2). Ale w przestrzeni metrycznej, a więc i w przestrzeni unormowanej, każdy ciąg zbieżny jest ciągiem fundamentalnym (lecz nie na odwrót!). Zatem $(s_n)_{n\in N}$ jest ciągiem fundamentalnym w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, tzn.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} \|s_{n+k} - s_n\| = \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| < \varepsilon,$$

co jest równoważne (2.2).

(2.3) W warunku (2.2) połóżmy $k = 1$. Wówczas

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \|x_{n+1}\| < \varepsilon,$$

co oznacza, że $\|x_{n+1}\| \to 0$ lub inaczej, że $\|x_n\| \to 0$.

(2.4) W przestrzeni metrycznej, a więc i w przestrzeni unormowanej, każdy ciąg zbieżny jest ograniczony. Stąd oraz z (2.3) wynika (2.4). ■

Uwaga 2.1. Żaden z warunków (2.2)–(2.4) nie wystarcza na to, aby szereg $x_1 + x_2 + \dots$ był zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Przykłady

2.1. W przestrzeni unormowanej $(\mathbf{C}([0,1]), \| \, \|_1)$ (zobacz przykład 1.6) rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n(t) - f_{n-1}(t)\right],$$

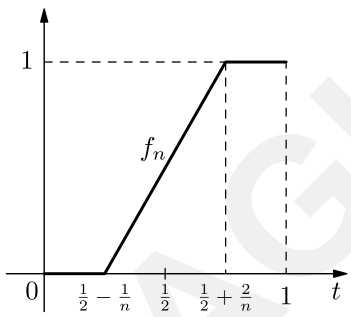
gdzie $f_0(t) = 0$, $f_1(t) = 1$ dla $t \in [0,1]$ oraz

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], \\ \frac{n}{2}\left(t - \frac{n-2}{2n}\right) & \text{dla } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}], \\ 1 & \text{dla } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

dla $n \geqslant 2$ (zobacz rys. 2.1). Wówczas

$$\|g_{n+1}(t) + \ldots + g_{n+k}(t)\|_1 = \|f_{n+k}(t) - f_n(t)\|_1 = \int\limits_0^1 |f_{n+k}(t) - f_n(t)| dt =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+k} \right) < \frac{1}{n} \quad (n, k \in N).$$



Rys. 2.1.

Z ostatniej nierówności wynika zaś, że ciąg $(g_n(t))_{n\in N} = (f_n(t) - f_{n-1}(t))_{n\in N}$ spełnia warunek (2.2) (dla $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć p równe jakiejkolwiek liczbie naturalnej nie mniejszej od $\frac{1}{\varepsilon}$).

Pokażemy teraz, że szereg $g1(t) + g_2(t) + \ldots$ nie jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\ \|_1)$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas dla pewnej funkcji $g \in C([0,1])$ spełniony byłby warunek

$$A_n := \|s_n(t) - g(t)\|_1 \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdzie $s_n(t) = g_1(t) + \ldots + g_n(t) = f_n(t)$ dla $n \in N$. Ale

$$A_n := \int\limits_0^1 |s_n(t) - g(t)| dt = \int\limits_0^1 |f_n(t) - g(t)| dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f_n(t) - g(t)| dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g(t)| dt \geqslant 0$$

dla każdego $n \in N$.

Stąd oraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |g(t)|dt = 0,$$

czyli, że

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} |g(t)|dt = 0,$$

co jest równoważne temu, że $g(t) = 0$ dla $t \in [0, \frac{1}{2}]$, bo $g \in C([0, 1]$.
Podobnie

$$A_n := \int\limits_0^1 |s_n(t) - g(t)|dt = \int\limits_0^1 |f_n(t) - g(t)|dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - g(t)|dt = \int\limits_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - g(t)|dt \geqslant 0,$$

dla każdego $n \in N$. Stąd oraz, jak poprzednio, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1 - g(t)|dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 |1 - g(t)|dt = 0,$$

co pociąga $g(t) = 1$ dla $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, bo $g \in C([0, 1])$.
Z powyższych rozważań wynika, że:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{i} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

co jest sprzeczne z definicją funkcji (funkcja nie może przyjmować dwóch różnych wartości w tym samym punkcie!).
Wobec tego, szereg $g_1(t) + g_2(t) + \ldots$ nie jest zbieżny w przestrzeni $\mathbf{C}([0, 1])$ z normą całkową, chociaż warunek (2.2) dla tego szeregu jest spełniony.

2.2. Wiemy, że szereg harmoniczny

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

jest rozbieżny (zobacz przykład 1.2), ale w tym przypadku warunki (2.3) i (2.4) są spełnione, gdyż $\frac{1}{n} \to 0$ oraz ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$ jest ograniczony.

Przed sformułowaniem następnego twierdzenia przypomnijmy, że w przestrzeni metrycznej zupełnej ciąg jest zbieżny tylko wówczas, gdy jest on ciągiem fundamentalnym. Ponieważ warunek (2.2) oznacza, że ciąg $(s_n)_{n\in N} = (x_1 + \ldots + x_n)_{n\in N}$ jest fundamentalny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, więc jeśli założymy, że $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest przestrzenią zupełną (inaczej: $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest ***przestrzenią Banacha***[2]), to warunek (2.2) staje się też warunkiem wystarczającym dla zbieżności szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ Odnotujmy ten fakt w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 2.3. (warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregu w przestrzeni Banacha). *Jeżeli $(x_n) \in c(X)$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni Banacha $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek* (2.2).

Twierdzenie 2.3 zwane jest ***twierdzeniem Cauchy'ego***[3]. Mniej precyzyjnie możemy je wypowiedzieć następująco: *szereg generowany przez ciąg $x \in c(X)$ jest zbieżny w przestrzeni Banacha $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ wyłącznie wówczas, gdy ciąg sum cząstkowych ciągu x jest fundamentalny w tej przestrzeni.*

Uwaga 2.2. Skądinąd wiadomo, że przestrzenie $(\mathbb{R}, | \, |)$ i $(\mathbb{C}, | \, |)$ (zobacz uwagę 1.5) oraz $(\mathbf{C}([0,1]), \| \, \|_0)$ (zobacz przykład 1.6) są przestrzeniami Banacha. Natomiast przestrzeń unormowana $(\mathbf{C}([0,1]), \| \, \|_1)$ nie jest zupełna (stwierdzenie to uzasadnia też przykład 2.1).

Dodajmy, że uwaga 2.2 pozostaje również słuszna wówczas, gdy przedział $[0,1]$ zastąpimy dowolnym innym przedziałem $[a,b] \subset R$.

Przykłady

2.3. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

---

[2] **Stefan Banach** (30.03.1892–31.08.1945) – matematyk polski, jeden z twórców Polskiej Szkoły Matematycznej, autor blisko 60 prac naukowych, znany na całym świecie ze swych wyników w dziale matematyki zwanym analizą funkcjonalną. Zajmował się też i innymi działami matematyki, do których należą: teoria funkcji rzeczywistych, teoria szeregów ortogonalnych, teoria miary i opisowa teoria mnogości.

[3] **Augustin Louis Cauchy** (21.08.1789–23.05.1857) – matematyk francuski, twórca współczesnego, ścisłego wykładu analizy matematycznej opartego na pojęciach granicy i ciągłości funkcji. Zajmował się niemal wszystkimi ówcześnie rozwijanymi działami matematyki, szczególnie zaś analizą matematyczną, teorią funkcji zespolonych i równaniami różniczkowymi. To Cauchy pierwszy podał poprawny dowód wzoru Taylora. Zajmował się też mechaniką, astronomią i optyką. Jest autorem ponad 500 prac naukowych.

zwany ***szeregiem Leibniza***[4] lub ***szeregiem anharmonicznym***. W tym przypadku,

$$s_{n,k} := s_{n+k} - s_n = (-1)^n \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{n+k}\right].$$

Zatem

$$s_{n,k} =$$
$$= \begin{cases} (-1)^n \left[\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)\right] & \text{dla } k = 2l-1, \\ (-1)^n \left[\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right) - \frac{1}{n+k}\right] & \text{dla } k = 2p, \end{cases}$$

gdzie: $n,\ k,\ l,\ p \in N$.

Ponieważ różnice w nawiasach okrągłych są dodatnie, więc w każdym razie wyrażenia w nawiasach prostokątnych są mniejsze od $\frac{1}{n+1}$. Poza tym, w obu przypadkach, są one dodatnie. Rzeczywiście, jeśli k jest liczbą nieparzystą, to

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \\ = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \ldots \\ \ldots + \left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right) + \frac{1}{n+k} > 0. \end{aligned}$$

Jeśli zaś $k = 2p$, to

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right) - \frac{1}{n+k} = \\ = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \ldots \\ \ldots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) > 0. \end{aligned}$$

Zatem $|s_{n,k}| < \frac{1}{n+1}$ dla $n,\ k \in N$. Stąd już łatwo wynika, że jest spełniony warunek (2.2), co zgodnie z twierdzeniem 2.3 oznacza, że szereg Leibniza jest zbieżny.

[4] **Gottfierd Wilhelm Leibniz** (01.07.1646–14.11.1716) – matematyk niemiecki, fizyk i filozof, organizator i pierwszy prezydent berlińskiej Akademii Nauk, członek Royal Society i paryskiej Akademii Nauk. Niezależnie od Newtona odkrył i dał podstawy rachunku różniczkowego i całkowego, stworzył podstawy symbolicznej logiki, zajmował się chemią i geologią. Wprowadził wiele pojęć, terminów i symboli, które na stałe weszły do wielu dziedzin nauki. Należą do nich m.in. wyznacznik, funkcja, różniczka, równanie różniczkowe, rachunek różniczkowy i całkowy, symbole całki i różniczki oraz wiele symboli logicznych. W filozofii znany jest przede wszystkim jako twórca tzw. monadologii, jednej z idealistycznych koncepcji filozofii. Dodajmy jeszcze, że skonstruował on silnik powietrzny do pomp odwadniających kopalnie oraz maszynę liczącą, która oprócz dodawania i odejmowania również mnożyła, dzieliła, potęgowała i obliczała pierwiastki stopnia 2. i 3.

Wyznaczenie jego sumy jest zadaniem trudniejszym. Można jednak wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2.$$

2.4. Niech a będzie liczbą rzeczywistą. Pokażemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin a^n$$

jest zbieżny. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned}
|s_{n,k}| &= |s_{n+k} - s_n| = \\
&= \left|\frac{1}{(n+1)^2}\sin a^{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2}\sin a^{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+k)^2}\sin a^{n+k}\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+k)^2} < \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right) = \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

dla n, $k \in N$ i dlatego jest spełniony warunek (2.2).
Stąd, na podstawie twierdzenia 2.3 wnioskujemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin a^n$$

jest zbieżny dla każdej liczby $a \in R$.
Podobnie uzasadnia się, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos a^n$$

jest zbieżny dla każdego $a \in R$.

Definicja 2.1. Szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ generowany przez ciąg $(x_n) \in c(X)$ nazywamy ***szeregiem normowo zbieżnym*** w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, jeżeli zbieżny jest szereg liczb rzeczywistych $\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots$.

Szereg normowo zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbb{R}, |\,|)$ nazywamy ***szeregiem bezwzględnie zbieżnym***.

W związku z pojęciem szeregu normowo zbieżnego powstaje naturalne pytanie: czy w danej przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ każdy szereg zbieżny jest normowo zbieżny i odwrotnie, czy każdy szereg normowo zbieżny w $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest zbieżny (oczywiście w $(\mathbf{X}, \| \, \|)$)?

Odpowiedź na obydwa pytania jest negatywna, co uzasadnimy na przykładach.

Przykłady

2.5. Szereg anharmoniczny $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ jest zbieżny (zobacz przykład 2.3), ale nie jest normowo (w tym przypadku, bezwzględnie) zbieżny, gdyż

$$1 + \left| -\frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{3} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| + \dots$$

jest szeregiem harmonicznym, który jak wiemy jest rozbieżny (przykład 1.2).

2.6. W przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \, \|_1)$ (zobacz przykład 1.6) rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n(t) - f_{n-1}(t) \right],$$

gdzie $f_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ są funkcjami określonymi tak samo jak w przykładzie 2.1 (zobacz też rys. 2.1). Wówczas

$$\begin{aligned}
\|g_n(t)\|_1 &= \int_0^1 |f_n(t) - f_{n-1}(t)| \, dt = \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)n} \quad \text{dla } n \geqslant 2
\end{aligned}$$

i szereg liczbowy

$$\|g_1(t)\|_1 + \|g_2(t)\|_1 + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots \right)$$

jest zbieżny (zobacz przykład 1.3).

Szereg $g_1(t) + g_2(t) + \dots$ jest więc normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \, \|_1)$, ale w tej samej przestrzeni nie jest on zbieżny, co pokazaliśmy już wcześniej w przykładzie 2.1.

TWIERDZENIE 2.4. *W przestrzeni Banacha każdy szereg normowo zbieżny jest zbieżny.*

Dowód

Niech $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ będzie przestrzenią Banacha, w której szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny. Znaczy to, że szereg liczbowy $\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$, która jest też przestrzenią Banacha (zobacz uwagę 2.2). Wobec tego z twierdzenia 2.3 wynika, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+k}\| < \varepsilon.$$

Ale w przestrzeni unormowanej (a więc i w przestrzeni Banacha) $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest słuszna uogólniona nierówność trójkąta, z której wynika, że

$$\|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \ldots + \|x_{n+k}\|.$$

W rezultacie,

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| < \varepsilon,$$

co jest równoważne temu, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ (zobacz jeszcze raz twierdzenie 2.3). ■

Podkreślmy jednak wyraźnie, iż w twierdzeniu 2.4 założenie o zupełności przestrzeni unormowanej jest istotne, bowiem istnieją przestrzenie unormowane, które nie są przestrzeniami Banacha, w których pewne szeregi normowo zbieżne nie są zbieżne (zobacz przykład 2.5).

Teraz pokażemy, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.4 jest również prawdziwe.

Twierdzenie 2.5. *Jeżeli w przestrzeni unormowanej każdy szereg normowo zbieżny jest zbieżny, to przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha.*

Dowód

Niech $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ będzie przestrzenią unormowaną, w której każdy szereg normowo zbieżny jest zbieżny. Należy wykazać, że $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest przestrzenią zupełną, tzn. taką przestrzenią, w której każdy ciąg fundamentalny jest ciągiem zbieżnym.

Niech więc $(x_n) \in c(X)$ będzie ciągiem fundamentalnym w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$. Oznacza to, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{n<m\in N} \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Stąd zaś wynika, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p_k \in N} \bigwedge_{p_k \leqslant n \in N} \bigwedge_{n<m \in N} \|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k} \tag{2.5}$$

W ten sposób otrzymaliśmy ciąg $(p_k)_{k\in N} \in c(N)$. Połóżmy dalej $n_1 := p_1$ i niech

$$\max(n_k, p_{k+1}) < n_{k+1} \in N \quad \text{dla } k \in N.$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymany w ten sposób ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k\in N}$ jest silnie rosnący ($n_1 < n_2 < \dots$) oraz, że $n_k > p_k$ dla wszystkich liczb naturalnych $k > 1$. Wobec tego, korzystając z warunku (2.5), otrzymujemy

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \quad \text{dla } k \in N.$$

Teraz pokażemy, że szereg liczb nieujemnych

$$\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = \|x_{n_1}\| + \|x_{n_2} - x_{n_1}\| + \|x_{n_3} - x_{n_2}\| + \dots \tag{2.6}$$

jest zbieżny. Rzeczywiście,

$$s_n := \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{n} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \|x_{n_1}\| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= \|x_{n_1}\| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < \|x_{n_1}\| + 1 \quad \text{dla każdego } n \in N.$$

Stąd zaś oraz z twierdzenia 1.4 wynika zbieżność szeregu (2.6), która jest równoważna stwierdzeniu, iż szereg

$$x_{n_1} + \sum_{k\in N} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \dots \tag{2.7}$$

jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ (zobacz definicję 2.1).

Wobec tego, na mocy założenia, szereg (2.7) jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. Oznacza to, że istnieje element $g \in X$ taki, że

$$g = \lim_{k\to\infty} \left[x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})\right] = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Stąd oraz z faktu, że $(x_{n_k})_{k\in N}$ jest podciągiem zbieżnym (do elementu g) ciągu fundamentalnego $(x_n)_{n\in N}$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ wynika, że również ciąg $(x_n)_{n\in N}$ jest zbieżny (do elementu g) w tejże przestrzeni (zobacz [7], strona 130, twierdzenie 13.3).

W ten sposób dowód twierdzenia 2.5 został zakończony. ■

Z twierdzeń 2.4 i 2.5 wynika natychmiast

Wniosek 2.2. (kryterium zupełności przestrzeni unormowanej). *Przestrzeń unormowana* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ *jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ *jest szeregiem zbieżnym w tej przestrzeni.*

Powyższy wniosek jest często wykorzystywany w uzasadnieniu, iż dana przestrzeń unormowana jest – względnie nie jest – przestrzenią Banacha. Takich aplikacji wniosku 2.2 nie będziemy jednak omawiać, gdyż wykraczają one poza zakres tegoż opracowania.

Uwaga 2.3. W przestrzeni Banacha mogą istnieć szeregi zbieżne, które nie są normowo zbieżne (zobacz przykład 2.5 oraz uwagę 2.2), co nie jest sprzeczne z wnioskiem 2.2.

Definicja 2.2. Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest normowo zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ nazywamy ***szeregiem warunkowo zbieżnym*** w tej przestrzeni.

Uwaga 2.4. Definicja 2.2 pozwala rozbić (podzielić) rodzinę wszystkich szeregów zbieżnych w przestrzeni Banacha na dwie klasy niepuste i rozłączne: jedną z nich jest klasa szeregów warunkowo zbieżnych, drugą zaś klasa szeregów normowo zbieżnych (zobacz twierdzenie 2.4). Uzasadnienie, iż obie wyróżnione klasy są niepuste pozostawiam Czytelnikowi.

W przestrzeni unormowanej, która nie jest przestrzenią Banacha suma mnogościowa obu wymienionych wcześniej klas może nie być równa rodzinie wszystkich szeregów zbieżnych w takiej przestrzeni (zobacz przykład 2.6).

Rodzinę wszystkich szeregów zbieżnych w przestrzeni unormowanej, która nie musi być przestrzenią Banacha, można rozbić na dwie klasy niepuste i rozłączne, zaliczając do jednej z nich wszystkie szeregi warunkowo zbieżne, a do drugiej – szeregi, które są równocześnie zbieżne i normowo zbieżne w tejże przestrzeni.

Szeregi warunkowo zbieżne mają wiele interesujących własności. Ich cechą charakterystyczną jest, np. fakt, że zmiana porządku (kolejności) wyrazów takiego szeregu powoduje, iż otrzymujemy nowy szereg, który często jest rozbieżny, bądź też ma inną sumę niż szereg „wyjściowy”. Objaśnimy to na przykładach.

Przykład

2.7. Wiemy, że szereg anharmoniczny $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ jest zbieżny i ma sumę równą $\ln 2$ (przykład 2.3). Poza tym, jest to szereg warunkowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\ |)$ (przykład 2.5). Zmieńmy teraz porządek (kolejność) wyrazów szeregu anharmonicznego i zbadajmy zbieżność szeregu

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{2^1+1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3-1} - \frac{1}{2\cdot 3} + \dots \\ \dots + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2(n+1)} + \dots\end{aligned} \tag{$*$}$$

W tym przypadku,

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}}_{2^{n-1} \text{ kolejnych składników szeregu } (*)} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \quad \text{dla każdego } n \in N,$$

a więc szereg $(*)$ nie spełnia warunku (2.2) i wobec tego jest on rozbieżny.

W kolejnym przykładzie pokażemy, że w szeregu anharmonicznym można zmienić porządek (kolejność) wyrazów w ten sposób, aby nowo otrzymany szereg był zbieżny do zera.

Przed tym jednak, dla ułatwienia i skrócenia dość skomplikowanych rachunków, przypomnijmy parę faktów z zakresu ciągów rzeczywistych.

A. Wiemy już, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$ (przykład 2.3). Znaczy to, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right] = \ln 2.$$

Stąd zaś wynika, że również $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \ln 2$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2 \tag{A}$$

B. W niemal każdym podręczniku, w którym jest definiowana liczba niewymierna e dowodzi się, że ciąg $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in N}$ jest silnie rosnący oraz ciąg $((1+\frac{1}{n})^{n+1})_{n\in N}$ jest silnie malejący, a poza tym

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Stąd wynika, że

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{dla } n \in N$$

lub inaczej, że

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{dla } n \in N.$$

Ostatnia nierówność jest zaś równoważna nierówności

$$1 + \frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \in N \tag{B}$$

C. Ciąg o wyrazach

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n \in N)$$

jest silnie malejący, gdyż na mocy nierówności (B) otrzymujemy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{dla } n \in N.$$

Poza tym z definicji ciągu (a_n) oraz z nierówności (B) wynika, że

$$\begin{aligned} a_n &> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n = \\ &= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot n\right) = \ln\frac{n+1}{n} > 0 \quad (n \in N). \end{aligned}$$

A zatem, ciąg (a_n) jest silnie malejący i ograniczony z dołu przez 0. Wobec tego istnieje liczba $g \geqslant 0$ taka, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = g \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} a_{4n} = g \tag{C}$$

D. Można wykazać, że

$$\begin{aligned} &\Big[(u_n) \in c(R) \wedge \lim_{n\to\infty} u_{5n} = \lim_{n\to\infty} u_{5n+1} = \lim_{n\to\infty} u_{5n+2} = \\ &\qquad = \lim_{n\to\infty} u_{5n+3} = \lim_{n\to\infty} u_{5n+4} = 0\Big] \Leftrightarrow \Big[\lim_{n\to\infty} u_n = 0\Big] \end{aligned} \tag{D}$$

(zobacz [7], strona 124, ćwiczenie 12.2).

Przykład

2.8. Rozważmy szereg postaci

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2(n-1)+1} - \\ &- \frac{1}{8(n-1)+2} - \frac{1}{8(n-1)+4} - \frac{1}{8(n-1)+6} - \frac{1}{8(n-1)+8} + \ldots, \end{aligned} \tag{$*$}$$

który powstaje z szeregu anharmonicznego w ten sposób, że po każdym wyrazie ze znakiem + występują cztery kolejne wyrazy ze znakiem $-$.

Oznaczmy przez u_n sumę n początkowych wyrazów szeregu $(*)$. Wówczas

$$
\begin{aligned}
u_{5n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{8n-6} - \frac{1}{8n-4} - \frac{1}{8n-2} - \frac{1}{8n} = \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{8n} \right) = \\
&= s_{2n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{4n} \right) = \\
&= s_{2n} - \frac{1}{2} \left(a_{4n} - a_n + \ln 4n - \ln n \right) = s_{2n} - \frac{1}{2} \left(a_{4n} - a_n + 2 \ln 2 \right),
\end{aligned}
$$

gdzie s_n oznacza sumę n początkowych wyrazów szeregu anharmonicznego, a_n zaś jest określone tak samo jak w punkcie C.
Teraz korzystamy ze wzorów (A) oraz (C) i otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_{5n} = 0$. Stąd zaś wynika, że:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_{5n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(u_{5n} + \frac{1}{2n+1} \right) = 0; \\
\lim_{n\to\infty} u_{5n+2} &= \lim_{n\to\infty} \left(u_{5n+1} - \frac{1}{8n+2} \right) = 0; \\
\lim_{n\to\infty} u_{5n+3} &= \lim_{n\to\infty} \left(u_{5n+2} - \frac{1}{8n+4} \right) = 0; \\
\lim_{n\to\infty} u_{5n+4} &= \lim_{n\to\infty} \left(u_{5n+4} - \frac{1}{8n+6} \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Wobec tego, na mocy (D) otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, co oznacza, że szereg $(*)$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i jego sumą jest liczba 0.

Przykładów tego typu – chociaż są one zwykle rachunkowo bardzo uciążliwe – można jednak podać wiele, bowiem nieograniczone możliwości ich konstruowania wskazuje dowód następującego twierdzenia

Twierdzenie 2.6. (Riemanna[5]). *Jeżeli szereg liczb rzeczywistych $a_1 + a_2 + \ldots$ jest warunkowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ oraz a jest dowolną liczbą rzeczywistą, to przez odpowiednio dobrane przestawienie wyrazów tego szeregu zawsze można uzyskać taki nowy szereg, aby był on zbieżny do a oraz taki, aby był on rozbieżny.*

[5] **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (17.09.1826–30.07.1866) – niemiecki matematyk i fizyk, profesor uniwersytetu w Getyndze, członek Royal Society oraz francuskiej Akademii Nauk, uczony o wszechstronnych zainteresowaniach naukowych. Jego prace wywarły olbrzymi wpływ na rozwój matematyki, niemal każda z nich dała początek jakiejś teorii matematycznej. Zajmował się głównie równaniami różniczkowymi cząstkowymi, teorią funkcji (zarówno zmiennej rzeczywistej jak i zespolonej), szeregami trygonometrycznymi, teorią całki, wielowymiarową geometrią metryczną (zwaną dzisiaj geometrią Riemanna, którą A. Einstein stosował w ogólnej teorii względności), teorią form kwadratowych, teorią odwzorowań konforemnych i wieloma innymi działami matematyki i fizyki teoretycznej. Z jego nazwiskiem związane są tak znane pojęcia, jak: całka i powierzchnia, hipoteza, macierz, metoda rozwiązywania równań hiperbolicznych, nie mówiąc już o licznych twierdzeniach znanych we współczesnej literaturze jako twierdzenia Riemanna.

Dowód tego pięknego twierdzenia, który podał B. Riemann, pomijamy. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do książki [1], gdzie na stronach 99–101 przedstawione jest bardzo elementarne i nieskomplikowane uzasadnienie twierdzenia 2.6.

W dalszym ciągu, zbiór wszystkich bijekcji zbioru N na zbiór N będziemy oznaczać symbolem $\mathrm{Bij}\,(N)$. Dowolny element $\delta \in \mathrm{Bij}\,(N)$ będziemy też nazywać ***permutacją zbioru liczb naturalnych*** N.

Definicja 2.3. Szereg generowany przez ciąg $(x_n) \in c(X)$ nazywamy ***szeregiem przemiennym*** albo ***szeregiem komutatywnym***, lub też ***szeregiem bezwarunkowo zbieżnym*** w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, gdy jest spełniony następujący warunek

$$\bigvee_{g \in X} \bigwedge_{\delta \in \mathrm{Bij}\,(N)} \left(\sum_{n \in N} x_{\delta(n)} = g \right),$$

gdzie zbieżność szeregu $\sum\limits_{n \in N} x_{\delta(n)}$ do elementu g jest zbieżnością w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Przemienność szeregu $\sum\limits_{n \in N} x_n$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ oznacza więc, że jest on zbieżny w tej przestrzeni (wynika to stąd, że przekształcenie identycznościowe zbioru N należy do $\mathrm{Bij}\,(N)$) oraz, że jakiekolwiek przestawienie jego wyrazów nie zmienia sumy tegoż szeregu.

Lemat 2.1. *W przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ każdy szereg zbieżny o wyrazach nieujemnych jest szeregiem przemiennym.*

Dowód

Zakładamy, że $\sum\limits_{n \in N} a_n = s \in R$, gdzie $a_n \geqslant 0$ dla $n \in N$. Zgodnie z twierdzeniem 1.4 oznacza to, że ciąg sum cząstkowych $(s_n) := (a_1 + \ldots + a_n)$ jest ograniczony z góry, tzn.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n \in N} s_n \leqslant M.$$

Niech teraz $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$ będzie dowolną permutacją zbioru N i niech

$$m_n := \max(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \quad \text{dla } n \in N.$$

Wówczas

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{m_n} a_i := s_{m_n} \quad \text{dla } n \in N.$$

Stąd zaś wynika, że ciąg sum cząstkowych $(u_n) := \big(a_{\sigma(1)} + \ldots + a_{\sigma(n)}\big)$ jest również ograniczony z góry. A zatem – znowu na mocy twierdzenia 1.4 – otrzymujemy, że szereg $\sum\limits_{n\in N} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny, np. do liczby $s_\sigma \in R$. Należy jeszcze wykazać, że $s = s_\sigma$. Ponieważ szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny, więc

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p<n\in N} \left(\sum_{i=p+1}^{n} a_i < \varepsilon \right)$$

(zobacz twierdzenie 2.2, warunek (2.2)). Poza tym, $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$ i wobec tego istnieją liczby $k_1, \ldots, k_p$ takie, że $\sigma(k_1) = 1, \ldots, \sigma(k_p) = p$. Dlatego też $\{1, \ldots, p\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ dla każdego $n > k := \max(k_1, \ldots, k_p) \geqslant p$ (dlaczego?). Stąd

$$0 \leqslant u_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} a_i \quad \text{dla } n > k,$$

gdzie $q := \max(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \geqslant n > k \geqslant p$. W rezultacie,

$$0 \leqslant u_n - s_n < \varepsilon \quad \text{dla } n > k.$$

Teraz w ostatniej nierówności wystarczy przejść do granicy, gdy $n \to \infty$, aby stwierdzić, że

$$0 \leqslant s_\sigma - s \leqslant \varepsilon \quad \text{dla każdego } \varepsilon > 0,$$

co oznacza, iż $s = s_\sigma$. ■

Z lematu 2.1 wynika natychmiast

TWIERDZENIE 2.7. (o przemienności szeregu norm dla szeregów normowo zbieżnych). *Jeżeli w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \|\;\|)$ *szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny, to szereg norm* $\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots$ (tj. szereg liczb nieujemnych) *jest szeregiem przemiennym, tzn.*

$$\bigvee_{s\in R} \bigwedge_{\sigma\in \mathrm{Bij}\,(N)} \left(\sum_{n\in N} \|x_{\sigma(n)}\| = s \right). \tag{2.8}$$

UWAGA 2.5. Założenie twierdzenia 2.7 nie gwarantuje zbieżności szeregu $x_1 + {}$ $+ x_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\;\|)$ (zobacz przykład 2.6).

Teraz sformułujemy i udowodnimy jedno z podstawowych twierdzeń dotyczących szeregów przemiennych w przestrzeniach unormowanych.

TWIERDZENIE 2.8. (o przemienności szeregów normowo zbieżnych, które są zbieżne). *W przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \|\;\|)$ *każdy szereg normowo zbieżny, który jest równocześnie zbieżny jest szeregiem przemiennym w tej przestrzeni.*

Dowód

Niech $(x_n) \in c(X)$ będzie ciągiem takim, że szereg $\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots$ jest zbieżny oraz $\sum\limits_{n\in N} x_n = g \in X$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$. Wobec tego

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{p\in N} \bigwedge_{p<n\in N} \bigwedge_{p\in q\in N} \left(\sum_{i=p+1}^{q} \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - g \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \tag{2.9}$$

(zobacz twierdzenie 2.2, warunek (2.2) oraz definicję 1.2). Niech teraz $\sigma \in \operatorname{Bij}(N)$ będzie dowolną permutacją zbioru liczb naturalnych. Wówczas istnieją liczby $k_1, \ldots, k_p \in N$ takie, że $\sigma_{k_1} = 1, \ldots, \sigma(k_p) = p$ i dlatego $\{1, \ldots, p\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$ dla każdego $n > k : \max(k_1, \ldots, k_2) \geqslant p$ (dlaczego?).

Stąd zaś oraz z własności normy wynika, że

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - g \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - g \right\| \leqslant \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - g \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - g \right) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leqslant \sum_{i=p+1}^{q} \|x_i\| \quad \text{dla } n > k,$$

gdzie $q := \max(\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \geqslant n > k \geqslant p$. Wobec tego

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} - g \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - g \right\| + \sum_{i=p+1}^{q} \|x_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{dla } q \geqslant n > p$$

(zobacz (2.9)).

To zaś oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} \big(x_{\sigma(1)} + \ldots x_{\sigma(n)} \big) = g$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ lub inaczej, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} = g,$$

co kończy dowód twierdzenia 2.8. ■

Łącząc twierdzenia 2.7 i 2.8 oraz korzystając z ćwiczenia 2.1, otrzymujemy

Twierdzenie 2.9. (o przemienności szeregu w przestrzeni unormowanej). *Jeżeli w przestrzeni unormowanej* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *szereg generowany przez ciąg* $(x_n) \in c(X)$ *jest równocześnie zbieżny i normowo zbieżny oraz*

$$\sum_{n\in N} x_n = g \in X \quad i \quad \sum_{n\in N} \|x_n\| = s \in R,$$

to $\|g\| \leqslant s$ *oraz dla każdej permutacji* σ *zbioru liczb naturalnych* ($\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$):

1° *szereg* $\sum\limits_{n\in N} x_{\sigma(n)}$ *jest równocześnie zbieżny i normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$;

2° $\sum\limits_{n\in N} x_\sigma(n) = g$ *i* $\sum\limits_{n\in N} x_\sigma(n) = s$.

Proponuję Czytelnikowi sformułowanie tego twierdzenia przy użyciu terminu „szereg przemienny".

Wypowiedź twierdzenia 2.9 można skrócić w przypadku, gdy $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha, bowiem w takich przestrzeniach każdy szereg normowo zbieżny jest szeregiem zbieżnym (twierdzenie 2.4).

Twierdzenie 2.10. (o przemienności szeregu w przestrzeni Banacha). *W przestrzeni Banacha* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ *każdy szereg normowo zbieżny o wyrazach* $x_1, x_2, \ldots \in X$ *i taki, że*

$$\sum_{n\in N} x_n = g \in X \quad \textit{oraz} \quad \sum_{n\in N} \|x_n\| = s \in X$$

ma tę własność, że $\|g\| \leqslant s$ *i dla dowolnej permutacji* σ *zbioru liczb naturalnych* ($\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$)*:*

(i) *szereg* $\sum\limits_{n\in N} x_{\sigma(n)}$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$;

(ii) $\sum\limits_{n\in N} x_{\sigma(n)} = g$ *i* $\sum\limits_{n\in N} \|x_{\sigma(n)}\| = s$.

Uważny Czytelnik z pewnością postawi problem, czy twierdzenia 2.10 i 2.9 można odwrócić w tym sensie, iż zada pytanie: czy w przestrzeni Banacha (a może nawet tylko w przestrzeni unormowanej) każdy szereg przemienny jest szeregiem normowo zbieżnym (oraz zbieżnym)? Odpowiedź na tak ogólnie postawione pytanie jest negatywna i to nawet dla przestrzeni Banacha.

Przed podaniem odpowiedniego przykładu określimy pewną przestrzeń ciągów rzeczywistych, bardzo ważną w wielu działach matematyki.

Otóż oznaczmy przez $c_b(R)$ ***zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych*** (tzn. o wyrazach rzeczywistych) ***i ograniczonych***. Znaczy to, że

$$c_b(R) := \left\{ (a_n) \in c(R)\colon \bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} |a_n| \leqslant M \right\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że definiując zwykłe dodawanie ciągów oraz ich zwykłe mnożenie przez liczby rzeczywiste, otrzymujemy przestrzeń wektorową $\mathbf{c}_b(R) = (c_b(R), +; \mathbf{R}, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$.

Wymiar przestrzeni $\mathbf{c}_b(R)$ jest nieskończony ($\dim \mathbf{c}_b(R) = \infty$), bowiem na przykład ciągi:

$$\overset{1}{e} = (1, 0, 0, \dots);$$
$$\overset{2}{e} = (0, 1, 0, \dots);$$
$$\overset{3}{e} = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad \text{itd.}$$

tzn. ciągi postaci $\overset{n}{e} = (\delta_{nk})_{k\in N}$, gdzie δ_{nk} oznacza ***symbol Kroneckera***[6] oraz $n \in N$, są liniowo niezależne (dlaczego?).

Co więcej, odwzorowanie

$$\| \|_{\sup} \colon c_b(R) \ni a = (a_n) \to \|a\|_{\sup} = \|(a_n)\|_{\sup} := \sup_{n\in N} |a_n|$$

jest normą w przestrzeni $\mathbf{c}_b(R)$, zaś przestrzeń unormowana $\mathbf{m} = (\mathbf{c}_b(R), \| \|_{\sup})$ jest przestrzenią Banacha (zobacz, np [5], strony 37, 38 i 43). Przestrzeń $\mathbf{m}$ nazywamy ***przestrzenią ciągów rzeczywistych i ograniczonych z normą supremum***.

Przykład

2.9. W przestrzeni Banacha $\mathbf{m} = (\mathbf{c}_b(R), \| \|_{\sup})$ rozważmy ciąg $\left(\overset{n}{a}\right)_{n\in N} \in c(c_b(R))$, którego elementy definiujemy następująco:

$$\overset{1}{a} = (\frac{1}{1}, 0, 0, \dots);$$
$$\overset{2}{a} = (0, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots);$$
$$\overset{3}{a} = (0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots), \quad \text{itd.}$$
$$\left(\overset{n}{a} = \frac{1}{n} \cdot (\delta_{nk})_{k\in N} = \frac{1}{n}\overset{n}{e} \quad \text{dla } n \in N\right).$$

Wówczas

$$\overset{n}{s} := \overset{1}{a} + \dots + \overset{n}{a} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right) \in c_b(R) \quad \text{dla } n \in N$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \overset{n}{s} = g = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N} \in c_b(R) \quad \text{w przestrzeni } \mathbf{m},$$

[6] **Leopold Kronecker** (07.12.1823–29.12.1891) – matematyk niemiecki, zajmował się teorią grup i teorią funkcji algebraicznych. Wiele prac poświęcił algebrze i teorii liczb. Był gorącym zwolennikiem arytmetyzacji matematyki.

gdyż

$$\|\overset{n}{s} - g\|_{\sup} = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Oznacza to, że w przestrzeni Banacha $\mathbf{m}$ szereg $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n \in N} \overset{n}{a} = g = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in N} \in c_b(R).$$

Niech teraz σ będzie dowolną permutacją zbioru liczb naturalnych ($\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$). Wówczas w ciągu

$$\overset{\sigma(1)}{a}, \overset{\sigma(2)}{a}, \ldots$$

istnieje dokładnie jeden wyraz, który jest równy $\overset{1}{a}$; dokładnie jeden wyraz, który jest równy $\overset{2}{a}$, itd. To utwierdza nas w przekonaniu, że

$$\sum_{n \in N} \overset{\sigma(n)}{a} = g = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in N} \in c_b(R).$$

Stąd wynika, że szereg $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \ldots$ jest przemienny w przestrzeni $\mathbf{m}$. Nie jest on jednak normowo zbieżny w tejże przestrzeni, gdyż

$$\sum_{n \in N} \|\overset{n}{a}\|_{\sup} = \sum_{n \in N} \frac{1}{n}$$

jest szeregiem rozbieżnym w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz przykład 1.2).

Niżej zacytujemy dwa twierdzenia, które wyjaśniają dlaczego udało się skonstruować przykład 2.9. Dodajmy, że przykład ten oraz tylko pierwsze z zapowiedzianych twierdzeń wystarczają na sformułowanie pełnej i precyzyjnej odpowiedzi na pytanie postawione tuż po twierdzeniu 2.10.

Twierdzenie 2.11. ([5], strona 112). *W przestrzeni unormowanej skończenie wymiarowej, szereg jest normowo zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on szeregiem przemiennym w tej przestrzeni.*

Dla pełnej informacji o związku między pojęciami normowej zbieżności szeregów i ich przemiennością podajemy jeszcze jedno twierdzenie, którego treść jest nie tylko bardzo ciekawa, ale wskazuje również na możliwość konstrukcji przykładu typu 2.9 w każdej przestrzeni unormowanej mającej wymiar nieskończony.

Twierdzenie 2.12. ([8], strona 89 i [10], strona 112). *W każdej przestrzeni unormowanej będącej, lub nie będącej, przestrzenią Banacha, lecz mającej wymiar nieskończony istnieje szereg przemienny, który jest szeregiem normowo zbieżnym.*

Uzasadnienie ostatniego twierdzenia, opublikowane w 1950 roku, jest trudne i wymaga bardzo subtelnych rozważań. Prezentowanie go w tym opracowaniu wydaje się więc niecelowe. Dowód twierdzenia 2.11 pomijamy zaś tylko dlatego, iż jego „technika” wymaga stosowania zaawansowanych metod analizy funkcjonalnej. Natomiast uzasadnienie twierdzenia 2.12 w przypadku, gdy skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana jest po prostu przestrzenią $(\mathbb{R}, |\,|)$ proponujemy jako ćwiczenie.

Z dotychczasowych rozważań wynikają istotne uwagi.

Uwaga 2.6. Jeżeli $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ jest przestrzenią unormowaną oraz $(x_n) \in c(X)$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ może być:

1° normowo zbieżny oraz równocześnie zbieżny, a więc też i przemienny (twierdzenie 2.8);

2° normowo zbieżny, lecz równocześnie rozbieżny, a więc też i nieprzemienny (przykład 2.6), ale tylko wówczas, gdy przestrzeń $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ jest nieskończenie wymiarowa;

3° normowo rozbieżny, lecz zbieżny (tzn. warunkowo zbieżny) i przemienny (przykład 2.9), ale tylko wówczas, gdy przestrzeń $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ jest nieskończenie wymiarowa;

4° normowo rozbieżny, lecz zbieżny (tzn. warunkowo zbieżny) i nieprzemienny (przykłady 2.5, 2.7 i 2.8);

5° normowo rozbieżny i równocześnie rozbieżny, a więc też i nieprzemienny (np. szereg harmoniczny $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n}$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).

Dodajmy, iż w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ nie istnieje szereg generowany przez ciąg $(x_n) \in c(X)$ taki, że jest on:

6° normowo zbieżny i równocześnie zbieżny, lecz nieprzemienny (zobacz twierdzenie 2.8);

7° normowo zbieżny oraz rozbieżny i równocześnie przemienny;

8° normowo rozbieżny oraz rozbieżny i równocześnie przemienny.

Uwaga 2.7. Ponieważ w przestrzeni Banacha każdy szereg normowo zbieżny jest zbieżny (twierdzenie 2.4) i przemienny (twierdzenie 2.8), więc w takich przestrzeniach możliwe są wyłącznie następujące przypadki:

a) szereg jest normowo zbieżny;

b) szereg jest warunkowo zbieżny i przemienny;

c) szereg jest warunkowo zbieżny, ale nie jest przemienny (tylko wówczas, gdy przestrzeń Banacha jest nieskończenie wymiarowa);

d) szereg jest rozbieżny.

Uwaga 2.8. Z twierdzeń 2.11 i 2.4 wynika, że we wszystkich twierdzeniach kończących się tezą „szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \|)$" wzmocnienie założenia przez dodanie warunku „$(\mathbf{X}, \| \|)$ jest przestrzenią Banacha" lub „$(\mathbf{X}, \| \|)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową" powoduje, iż w tezie możemy dopisać: i szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zbieżny w $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Twierdzenie 2.13. (kryterium porównawcze). *Jeżeli $(\mathbf{X}, \| \|)$ jest przestrzenią unormowaną oraz dla ciągu $(x_n) \in c(X)$ istnieje ciąg liczbowy $(a_n) \in c(R)$ taki, że*

$$\|x_n\| \leqslant a_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N \tag{2.10}$$

i szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, | |)$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Jeśli natomiast dla ciągu $(x_n) \in c(X)$ istnieje ciąg $(b_n) \in c(R)$ taki, że

$$0 \leqslant b_n \leqslant \|x_n\| \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N \tag{2.11}$$

i szereg liczbowy $b_1 + b_2 + \ldots$ jest rozbieżny, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Dowód

Z założenia (2.10) wynika, że istnieje $k \in N$ takie, że $\|x_n\| \leqslant a_n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant k$. Jeśli więc

$$A := (a_1 + \ldots + a_k) - (\|x_1\| + \ldots + \|x_k\|)\,,$$

to $s_n \leqslant u_n + A$ dla $n \geqslant k$, gdzie

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad u_n = \|x_1\| + \ldots + \|x_n\| \quad \text{dla } n \in N.$$

Ale szereg liczbowy $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny. Istnieje więc $g \in R$ takie, że $\lim_{n\to\infty} s_n = g$. Poza tym, $a_n \geqslant 0$ dla $n \geqslant k$, przeto ciąg s_n jest rosnący (począwszy od $n = k$) i w rezultacie $s_n \leqslant g$ dla każdego $n \geqslant k$. Dlatego też $u_n + A \leqslant g$ dla $n \geqslant k$ lub inaczej: $u_n \leqslant g - A$ dla $n \geqslant k$. Ciąg $(u_n) = (\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)$ jest więc ograniczony z góry i rosnący (bo $u_{n+1} - u_n = \|x_{n+1}\| \geqslant 0$), a zatem zbieżny. To zaś oznacza, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia 2.14 przypuśćmy, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$ i połóżmy $a_n := \|x_n\|$ dla $n \in N$. Wówczas, na mocy założenia (2.11), $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ dla prawie wszystkich $n \in N$ i szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny. Stąd, na mocy już udowodnionej pierwszej części twierdzenia 2.14 wnioskujemy, że szereg $|b_1| + |b_2| + \ldots = b_1 + b_2 + \ldots$ jest zbieżny, co przeczy założeniu. ■

Uwaga 2.9. Założenia drugiej części kryterium porównawczego nie gwarantują, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest rozbieżny nawet, gdy $(\mathbf{X}, \| \|)$ jest przestrzenią Banacha. Aby się o tym przekonać wystarczy w przestrzeni Banacha $(\mathbb{R}, | |)$ położyć $x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ oraz przyjąć $b_n = \frac{1}{n}$ (zobacz przykłady 1.2 i 2.3).

Przykłady

2.10. Zgodnie z kryterium porównawczym szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny dla każdego $a \geqslant 2$ (bo $0 < \frac{1}{n^a} \leqslant \frac{1}{n^2}$ dla $n \in N$ oraz $a \geqslant 2$) i szereg generowany przez ciąg $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in N}$ jest zbieżny (zobacz przykład 1.5) oraz rozbieżny dla każdego $a \leqslant 1$ (bo $0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^a}$ dla $n \in N$ oraz $a \leqslant 1$) i szereg generowany przez ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in N}$ jest rozbieżny (przykład 1.2).
Niestety, na razie nic nie możemy powiedzieć o zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

w przypadku, gdy $a \in]1, 2[$. Później pokażemy, że szereg ten jest zbieżny dla wszystkich $a > 1$.

2.11. Z kryterium porównawczego wynika, że jeśli $a_n \geqslant 0$ i $b_n \in [0, \pi]$ dla $n \in N$ oraz szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

jest zbieżny (w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$), to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin b_n$$

jest również zbieżny (w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).
Rzeczywiście, dla $n \in N$ mamy: $0 \leqslant a_n \sin b_n \leqslant a_n b_n$ (bo nierówność $0 \leqslant \sin x \leqslant$ $\leqslant x$ jest spełniona dla każdego $x \geqslant 0$, gdyż pochodna funkcji $f\colon R \ni x \to x - \sin x$ jest nieujemna dla każdego $x \in R$ oraz $f(0) = 0$), a szereg $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$ jest zbieżny z założenia. W szczególności więc zbieżne są następujące szeregi:

$$\sum_{n \in N} \sin \frac{1}{n(n+1)};$$

$$\sum_{n \in N} \sin \frac{1}{n^a} \quad \text{dla } a > 1;$$

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{x^n} \sin \frac{1}{2^n} \quad \text{dla } x > \frac{1}{2};$$

$$\sum_{n \in N} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n};$$

$$\sum_{n \in N} n \sin \frac{1}{n^3}, \quad \text{itp.}$$

2.12. Szeregi

$$\sum_{n\in N}\frac{1}{1+n^2},\quad \sum_{n\in N}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^4)}},\quad \sum_{n\in N}\frac{n}{2^n},\quad \sum_{n\in N}\frac{2^n}{n!},\quad \sum_{n\in N}\frac{n^2}{n^n},\quad \sum_{n\in N}\frac{n!}{n^n},$$

są zbieżne, bo:

$$\frac{1}{1+n^2}<\frac{1}{n^2}\quad \text{dla } n\in N;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(1+n^4)}}<\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad \text{dla } n\in N;$$

$$\frac{n}{2^n}=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}}<\frac{n}{\binom{n}{3}}=3!\frac{1}{(n-2)(n-1)}<3!\frac{1}{(n-2)^2}$$
$$\text{dla } n\geqslant 3;$$

$$\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\underbrace{\frac{2\cdot 2\cdots 2}{3\cdot 4\cdots(n-2)}}_{\leqslant 1}\cdot\frac{2\cdot 2}{(n-1)n}<\frac{2^4}{2(n-1)n}<2^3\frac{1}{(n-1)^2}\quad \text{dla } n\geqslant 2;$$

$$\frac{n^2}{n^n}=\frac{1}{n^{n-2}}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad \text{dla } n\geqslant 4;$$

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2}{n\cdot n}\cdot\frac{3\cdot 4\cdots n}{n\cdot n\cdots n}\leqslant 2\frac{1}{n^2}\quad \text{dla } n\in N$$

i szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$$

są zbieżne (dlaczego te dwa ostatnie szeregi są zbieżne?).
Natomiast szeregi:

$$\sum_{n\in N}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\quad \text{i}\quad \sum_{n\in N}\frac{1}{\ln n(n+1)}$$

są rozbieżne, gdyż

$$\sqrt{n(n+1)}>\frac{1}{n+1}\quad \text{oraz}\quad \frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$$

dla $n\in N$ (nierówność $\ln(1+x)<x$ jest spełniona dla każdego $x>0$, bo pochodna funkcji

$$f\colon\ ]-1,+\infty[\ \ni x\to f(x):=\ln(1+x)-x$$

jest ujemna dla $x > 0$ oraz $f(0) = 0$) i szeregi:

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{1+n}, \quad \sum_{n\in N} \frac{1}{n}$$

są rozbieżne (dlaczego pierwszy z tych szeregów jest rozbieżny?).

Definicja 2.4. Jeżeli $(\mathbf{X}, \| \ \|)$ jest przestrzenią unormowaną i ciągi $(x_n) \in c(X)$, $(a_n) \in c(R)$ spełniają warunek (2.10), to mówimy, że szereg (liczbowy) $a_1 + a_2 + \ldots$ jest ***majorantą szeregu*** $x_1 + x_2 + \ldots$ (w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \ \|)$).

Jeśli zaś jest spełniony warunek (2.11), to mówimy, że szereg (liczbowy) $b_1 + +b_2 + \ldots$ jest ***minorantą szeregu*** $x_1 + x_2 + \ldots$ (w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \ \|)$).

Kryterium porównawcze możemy teraz zapisać lakonicznie, lecz nieprecyzyjnie, w następujący sposób: *szereg mający majorantę zbieżną jest normowo zbieżny, zaś szereg mający minorantę rozbieżną nie może być normowo zbieżny.*

Przed sformułowaniem następnych kryteriów zbieżności szeregów przypomnijmy pewne pojęcia z teorii zbieżności ciągów liczb rzeczywistych.

Niech $a = (a_n)$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych ($(a_n) \in c(R)$). Oznaczmy przez $A(a)$ zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru wartości ciągu a, tj. zbioru $\{a_n\}_{n\in N}$, w przestrzeni $(\bar{R}, \mu)$, gdzie $\bar{R}$ oznacza rozszerzoną oś liczbową (tzn. $\bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\} := [-\infty, +\infty]$), μ zaś jest jakąkolwiek metryką w $\bar{R}$, której zwężenie (lewostronne) do zbioru $R \times R$ jest równoważne, np. metryce euklidesowej na R, tj. wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb (zobacz, np. [7], strony 16, 35 oraz ćwiczenie 4.4).

Granicą górną ciągu $a = (a_n) \in c(R)$ nazywamy kres górny zbioru $A(a) \subset \bar{R}$ punktów skupienia zbioru $\{a_n\}_{n\in N}$, zaś kres dolny zbioru $A(a)$ nazywamy ***granicą dolną ciągu*** (a_n). Przyjmujemy też następujące oznaczenia:

$$\limsup_n a_n := \sup A(a), \quad \liminf_n a_n := \inf A(a).$$

Z ostatniej definicji wynika, że dla każdego ciągu $(a_n) \in c(R)$ jest spełniony warunek[7]

$$[-\infty, +\infty[\ni \liminf_n a_n \leqslant \limsup_n a_n \in]-\infty, +\infty] \tag{2.12}$$

[7] Znak $\leqslant$ użyty we wzorze (2.12) oznacza rozszerzenie relacji $\leqslant$ ze zbioru R na zbiór $\bar{R}$ poprzez przyjęcie konwencji: $-\infty < t < +\infty$ dla $t \in R$ oraz $-\infty < +\infty$.

Ponadto z definicji kresu górnego i dolnego zbioru $A(a) \subset \bar{R}$ wynika, że:

$$\begin{aligned}\left(\limsup_n a_n = g \in R\right) \Leftrightarrow &\left[\left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} a_n < g+\varepsilon\right) \wedge \right.\\ &\left.\wedge \left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigwedge_{n<m\in N} g-\varepsilon < a_m\right)\right],\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\left(\liminf_n a_n = g \in R\right) \Leftrightarrow &\left[\left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} g-\varepsilon < a_n\right) \wedge \right.\\ &\left.\wedge \left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigwedge_{n<m\in N} a_m < g+\varepsilon\right)\right].\end{aligned} \tag{2.14}$$

Podkreślmy jednak wyraźnie, że z warunku (2.13) lub (2.14) można korzystać jedynie wówczas, gdy odpowiednio granica górna lub granica dolna ciągu (a_n) jest liczbą rzeczywistą.

TWIERDZENIE 2.14. (kryterium Cauchy'ego). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *jest przestrzenią unormowaną i ciąg* $(x_n) \in c(X)$ *ma tę własność, że*

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = g < 1,$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Jeśli zaś

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = g > 1,$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest zbieżny i nie jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

DOWÓD

Ponieważ $g < 1$, więc g jest liczbą rzeczywistą nieujemną (dlaczego?). Stąd zaś oraz z (2.13) wynika, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \sqrt[n]{\|x_n\|} < g+\varepsilon.$$

Niech teraz liczba q spełnia nierówność: $g < q < 1$. Połóżmy $\varepsilon := q - g > 0$. Wówczas istnieje $p \in N$ takie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant p$ spełniony jest warunek

$$\sqrt[n]{\|x_n\|} < g + \varepsilon = q,$$

czyli $\|x_n\| < q^n$ dla $n \geqslant p$. Oznacza to, że szereg $x_1+x_2+\ldots$ ma majorantę $q+q^2+\ldots$ zbieżną, bo $0 < q < 1$ (zobacz przykład 1.1). Stąd oraz z kryterium porównawczego wynika, że szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Jeśli zaś $g > 1$, to $g = +\infty$ lub $g \in R$. W przypadku $g = +\infty$ ciąg $\left(\sqrt[n]{\|x_n\|}\right)_{n\in N}$ jest nieograniczony, a tym samym i ciągi $(\|x_n\|)_{n\in N} \in c(R)$, $(x_n)_{n\in N} \in c(X)$ nie są ograniczone. Zatem, na mocy twierdzenia 2.2, szeregi $\|x_1\|+\|x_2\|+\ldots$ i $x_1+x_2+\ldots$ nie są zbieżne (odpowiednio w przestrzeniach $(\mathbb{R}, |\,|)$ i $(\mathbf{X}, \|\,\|)$).

Podobnie, jeśli $g \in R$ i $g > 1$, to $\sqrt[n]{\|x_n\|} > 0$ dla $n \geqslant p$, czyli $\|x_n\| > 1$ dla $n \geqslant p$ i nie może być $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ (zobacz jeszcze raz twierdzenie 2.2). ■

Uwaga 2.10. Z własności (2.12) wynika, że jeśli w kryterium Cauchy'ego warunek „$\limsup\limits_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = g \in \,]1, +\infty]$" zastąpimy zapisem „$\liminf\limits_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = g > 1$" i pozostałą część kryterium pozostawimy bez zmian, to w dalszym ciągu otrzymamy twierdzenie prawdziwe.

Uwaga 2.11. Jeżeli $\limsup\limits_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = 1$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny oraz normowo zbieżny, bądź normowo rozbieżny. Aby się o tym przekonać wystarczy rozpatrzyć szereg anharmoniczny oraz szeregi harmoniczne o wykładnikach 1 i 2 (zobacz przykłady 2.3, 1.2 i 1.5).

Spostrzeżenie sformułowane w uwadze 2.11 pokazuje, że kryterium Cauchy'ego zawodzi w przypadku, gdy $\limsup\limits_n \sqrt[n]{\|x_n\|} = 1$.

Przykłady

2.13. Rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{3^n}\left[(-1)^n + \sqrt{2}\right]^n \qquad (p \in R).$$

Wówczas

$$\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_n \frac{(\sqrt[n]{n})^p}{3}\left[(-1)^n + \sqrt{2}\right] = \frac{1+\sqrt{2}}{3} < 1.$$

Zatem, na mocy kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest normowo (w tym przypadku bezwzględnie) zbieżny. Ale przestrzeń $(\mathbb{R}, |\,|)$ jest zupełna (uwaga 2.2) i dlatego rozważany szereg jest również zbieżny (twierdzenie 2.4).

2.14. Niech

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n + i\sqrt{n}},$$

gdzie i jest jednostką urojoną, z zaś jest liczbą zespoloną z wnętrza koła jednostkowego, tzn. $i = (0, 1)$, $z \in C$ oraz $|z| < 1$. Wówczas

$$|x_n| = \frac{|z|^n}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{oraz} \quad \limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} = \limsup_n \frac{|z|^n}{\sqrt[2n]{n^2+n}} = |z| < 1.$$

Zatem, szereg liczb zespolonych $x_1 + x_2 + \dots$ jest normowo, dokładniej modułowo, zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$. Ponieważ przestrzeń $(\mathbb{C}, |\,|)$ jest zupełna (uwaga 2.2), więc rozważany szereg jest też zbieżny w tej przestrzeni (twierdzenie 2.4).

2.15. W przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_1)$ (zobacz (1.6)) jeszcze raz weźmy pod uwagę ciąg funkcji $(f_n(t))$ określonych w przykładzie 2.1 (zobacz też rys. 2.1). Stwierdziliśmy już wcześniej, że

$$\|f_{n+k}(t) - f_n(t)\|_1 = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+k}\right) = $$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n(n+k)} \quad \text{dla } n,\ k \in N$$

(przykład 2.1). Jeśli więc położymy

$$g_n(t) := f_{2^{n+1}}(t) - f_{2^n}(t) \quad \text{dla } n \in N,$$

to

$$\|g_n(t)\|_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^n}{2^n(2^n+2^n)} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4} \quad (n \in N)$$

i dalej,

$$\limsup_n \sqrt[n]{\|g_n(t)\|_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Stąd na mocy kryterium Cauchy'ego wnioskujemy, że szereg $g_1(t)+g_2(t)+\dots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_1)$. Dodajmy, że normowa zbieżność tego szeregu jest oczywista, gdyż

$$\|g_1(t)\|_1 + \|g_2(t)\|_1 + \dots$$

jest po prostu szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ (zobacz przykład 1.1). Korzystamy jednak z twierdzenia 2.15, aby zwrócić uwagę Czytelnika na pewien szczegół, o którym napiszemy niżej.

Zupełnie podobnie jak w przykładzie 2.1 dowodzi się, że i w tym przypadku szereg $g_1(t) + g_2(t) + \dots$ nie jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_1)$.

Uwaga 2.12. Przykład 2.15 pokazuje, że warunek „$\limsup_n \sqrt[n]{\|x_n\|} < 1$" nie gwarantuje zbieżności szeregu $x_1+x_2+\dots$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. Dlatego w kryterium Cauchy'ego zdanie „jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$" nie może być zastąpione, ani uzupełnione zdaniem „jest zbieżny w $(\mathbf{X}, \|\,\|)$".

Następne kryterium poprzedzamy lematem z teorii zbieżności ciągów liczbowych.

Lemat 2.2. *Jeżeli wyrazy ciągu* (a_n) *są liczbami dodatnimi, to*

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_n \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{2.15}$$

(zobacz odsyłacz 7).

Dowód
Połóżmy:

$$\begin{aligned} a &:= \liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n};\\ b &:= \liminf_n \sqrt[n]{a_n};\\ B &:= \limsup_n \sqrt[n]{a_n};\\ A &:= \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Należy pokazać, że $a \leqslant b \leqslant B \leqslant A$.

Nierówność $b \leqslant B$ jest oczywista (zobacz (2.12)). Wykażemy jedynie, że $B \leqslant A$, gdyż nierówność $a \leqslant b$ dowodzi się niemal identycznie.

Jeśli $A = +\infty$, to z pewnością $B \leqslant A$. Jeśli zaś $A < +\infty$, to jak wynika z definicji granicy górnej ciągu, A jest liczbą nieujemną (dlaczego?) oraz

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem, jeśli $n \in N$ i $n > p$, to:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &< A + \frac{\varepsilon}{2};\\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} &< A + \frac{\varepsilon}{2};\\ &\dots\\ \frac{a_{p+1}}{a_p} &< A + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy

$$a_n < a_p \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-p} = \left[a_p \cdot \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-p}\right] \cdot \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n} \quad (n > p).$$

Stąd

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{r} \cdot \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{dla } n > p, \text{ gdzie } r := a_p \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-p}.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$, więc jak wynika z definicji granicy, istnieje $m \in N$ takie, że dla $n > m$ $(n \in N)$ spełniona jest nierówność: $\sqrt[n]{r} - 1 < \frac{\varepsilon}{2A+\varepsilon}$ równoważna nierówności

$$\sqrt[n]{r} < \frac{2A+2\varepsilon}{2A+\varepsilon} = \frac{A+\varepsilon}{A+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Dlatego dla każdej liczby naturalnej $n > \max(p, m) := k$ mamy

$$\sqrt[n]{a_n} < A + \varepsilon \quad (n > k),$$

a stąd

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leqslant A + \varepsilon$$

lub inaczej $B \leqslant A + \varepsilon$. Ale ε było dowolną liczbą dodatnią, zatem $B \leqslant A$. ■

Uwaga 2.13. Lemat 2.2 pozostaje prawdziwy, jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Z tego samego lematu wynika też, że jeśli prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie oraz ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ jest zbieżny, to ciąg $(\sqrt[n]{a_n})$ jest też zbieżny oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Dodajmy jednak, że jeśli $(\sqrt[n]{a_n})$ jest ciągiem zbieżnym, to ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ nie musi być zbieżny.

Przykłady

2.16. Niech $a_n := 2 + (-1)^n$ dla $n \in N$. Wówczas $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, ale ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ nie ma granicy, gdyż w tym przypadku

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3} \neq 3 = \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2.17. Niech $a_n := n^{(-1)^{n+1}}$ dla $n \in N$. Kolejnymi wyrazami ciągu (a_n) są więc liczby: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5$ itd. oraz $\sqrt[n]{a_n} \to 1$, ale ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ nie ma granicy, gdyż w tym przypadku

$$\liminf_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \quad \text{i} \quad \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Niemal natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia 2.15 i lematu 2.2 jest następujące kryterium zbieżności szeregów

Twierdzenie 2.15. (kryterium d'Alemberta[8]). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$ *jest przestrzenią unormowaną i ciąg* $(x_n) \in c(X)$ *ma tę własność, że*

$$\limsup_n \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < 1,$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$.

Jeśli zaś

$$\liminf_n \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1,$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest zbieżny i nie jest normowo zbieżny.*

Uwaga 2.14. Z lematu 2.2 wynika, że kryterium Cauchy'ego jest mocniejsze niż kryterium d'Alemberta w tym sensie, że jeśli potrafimy stwierdzić normową zbieżność za pomocą kryterium d'Alemberta, to również daje się to zrobić za pomocą kryterium Cauchy'ego, lecz nie na odwrót. To samo spostrzeżenie dotyczy też rozbieżności i normowej rozbieżności szeregu. Wyjaśnimy to na przykładach.

Przykłady

2.18. Niech a oraz b będą liczbami zespolonymi. Połóżmy

$$x_n := \begin{cases} a^k b^k & \text{dla } n = 2k-1, \\ a^{k+1} b^k & \text{dla } n = 2k, \ (k \in N) \end{cases}$$

i rozważmy szereg generowany przez ciąg $(x_n) \in c(C)$, tj. szereg postaci

$$\sum_{n \in N} x_n = ab + a^2 b + a^2 b^2 + a^3 b^2 + a^3 b^3 + a^4 b^3 + a^4 b^4 + \ldots \qquad (*)$$

Jest oczywiste, że jeśli $a = b = 0$ (0 oznacza tutaj liczbę zespoloną $(0,0)$!), to szereg $(*)$ jest zbieżny i jego suma jest równa 0.

[8] **Jean le Rond d'Alembert** (16.11.1717–29.10.1783) – matematyk, mechanik i filozof francuski, który otrzymał wspaniałe wykształcenie (studiował m.in. medycynę, nauki naturalne, prawo i przez pewien czas był adwokatem) oraz miał wszechstronne zainteresowania. W „Traktacie o dynamice" (1743) sformułował słynne kryterium zbieżności szeregów, zaś za „Refleksje o przyczynie wiatrów" (1747) otrzymał nagrodę Akademii Nauk w Berlinie i został mianowany jej członkiem. W mechanice znana jest powszechnie zasada jego imienia, w matematyce zaś zajmował się głównie rachunkiem różniczkowym (odkrył rachunek pochodnych cząstkowych), równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i cząstkowymi, jako jeden z pierwszych stosował funkcje zmiennej zespolonej do rozwiązywania równań eliptycznych i wraz z Eulerem podał warunki Cauchy'ego–Riemanna, stworzył też podstawy fizyki matematycznej. Był jednym z założycieli i współpracowników „Wielkiej encyklopedii francuskiej", w której pisał m.in. o czasie jako o czwartym wymiarze. Jest autorem prac z teorii muzyki i estetyki, zajmował się filozofią (empiryczną i materialną) oraz literaturą.

Jeśli zaś $ab \neq 0$, to

$$\limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \max(|a|, |b|)$$

i na mocy kryterium d'Alemberta, szereg $(*)$ jest z pewnością normowo, a raczej modułowo, zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$ (zobacz uwagi 1.4 i 1.5), gdy $\max(|a|, |b|) < 1$. Dodajmy też, iż w tym przypadku ostatnia nierówność gwarantuje zbieżność szeregu $(*)$, bo przestrzeń $(\mathbb{C}, |\,|)$ jest zupełna (zobacz uwagę 2.2 i twierdzenie 2.4).

Z kryterium d'Alemberta wynika też, że szereg $(*)$ nie jest zbieżny, jeśli $\min(|a|, |b|) > 1$ (dlaczego?).

Do szeregu $(*)$ zastosujmy teraz teraz kryterium Cauchy'ego. Nietrudno stwierdzić, że

$$\limsup_n \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = |ab|.$$

Wobec tego w przypadku, gdy $|ab| < 1$, szereg $(*)$ jest modułowo zbieżny (jak również zbieżny) w przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$. Jeśli zaś $|ab| > 1$, to szereg $(*)$ jest rozbieżny i nie jest modułowo zbieżny.

Ponieważ warunek $\max(|a|, |b|) < 1$ pociąga nierówność $|ab| < 1$, lecz nie na odwrót (podobnie: warunek $\min(|a|, |b|) > 1$ implikuje nierówność $|ab| > 1$, lecz nie na odwrót), więc przykład ten wyjaśnia treść uwagi 2.13.

2.19. Rozważmy następujący szereg liczb rzeczywistych

$$\sum_{n\in N} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

W tym przypadku przyjęliśmy więc

$$x_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \text{dla } n = 2k-1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k & \text{dla } n = 2k \ (k \in N). \end{cases}$$

Nietrudno stwierdzić, że:

$$\liminf_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0;$$

$$\liminf_n \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\limsup_n \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Wobec tego, kryterium d'Alemberta nie pozwala nic powiedzieć o zbieżności bezwzględnej (a tym samym i o zbieżności – dlaczego?) rozważanego szeregu (to samo dotyczy rozbieżności) podczas, gdy kryterium Cauchy'ego pokazuje, że zadany szereg w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ jest bezwzględnie zbieżny, a tym samym zbieżny (dlaczego?).

Ćwiczenia

2.1. Pokazać, że jeśli $(x_n) \in c(X)$ oraz szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest nie tylko zbieżny, ale jest on również normowo zbieżny w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, to spełniona jest następująca nierówność

$$\left\| \sum_{n \in N} x_n \right\| \leqslant \sum_{n \in N} \|x_n\| .$$

2.2. Dowieść, że jeśli szereg generowany przez ciąg $(a_n) \in c(R)$ jest warunkowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz definicję 2.2), to szereg utworzony tylko z wyrazów dodatnich ciągu (a_n) jest rozbieżny oraz szereg utworzony tylko z wyrazów ujemnych ciągu (a_n) jest rozbieżny.

2.3. Wykazać, że szereg generowany przez ciąg $(a_n) \in c(R)$ jest bezwzględnie zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on szeregiem przemiennym.

2.4. Niech $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, (x_n) zaś niech będzie ciągiem o wyrazach w zbiorze X. Załóżmy ponadto, że (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, którego prawie wszystkie wyrazy są dodatnie oraz, że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|x_n\|}{a_n} = g \quad (0 \leqslant g \leqslant +\infty).$$

Pokazać, że:

1° jeżeli g jest liczbą $(g < +\infty)$, to zbieżność szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ pociąga normową zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \dots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$;

2° jeżeli granica g nie jest równa 0 ($g > 0$ lub $g = +\infty$) i szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$, to szereg $x_1 + x_2 + \dots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Uwaga. Do twierdzenia sformułowanego w tym ćwiczeniu, zwanego ***drugim kryterium porównawczym***, stosują się również uwagi 2.8 i 2.9.

2.5. Niech $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ będzie przestrzenią unormowaną, (x_n) zaś niech będzie ciągiem o wyrazach w zbiorze X takim, że $\|x_n\| > 0$ dla prawie wszystkich $n \in N$. Załóżmy ponadto, że (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, którego prawie wszystkie wyrazy są dodatnie.

Udowodnić, że:

1° jeśli

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N,$$

to zbieżność szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$ pociąga normową zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$;

2° jeśli

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N$$

oraz szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Uwaga. Do twierdzenia sformułowanego w tym ćwiczeniu, zwanego ***trzecim kryterium porównawczym***, stosują się również uwagi 2.8 i 2.9.

2.6. Wykazać, że jeśli $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ jest przestrzenią unormowaną, (x_n) zaś jest ciągiem o wyrazach w zbiorze X oraz

$$\lim_{n\to\infty} n\|x_n\| = g,$$

gdzie g jest liczbą dodatnią lub $g = +\infty$, to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Sprawdzić też, że jeśli:

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{gdy } n^2 \neq p^2 \text{ dla każdego } p \in N \\ \frac{1}{n} & \text{gdy } n^2 = k^2 \text{ dla każdego } k \in N \end{cases};$$

$$b_n := \frac{1 + \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right|}{n};$$

$$c_n := \frac{1}{n^2};$$

$$d_n := \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)} = \frac{a_n}{s_n},$$

gdzie: $a_n = \frac{1}{n}$, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n \in N)$, to w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$:

a) ciąg (na_n) nie ma granicy, ale szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny;

b) granica $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n$ nie istnieje, ale szereg $b_1 + b_2 + \ldots$ jest rozbieżny;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = 0$, ale szereg $c_1 + c_2 + \ldots$ jest zbieżny;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} nd_n = 0$, ale szereg $d_1 + d_2 + \ldots$ jest rozbieżny.

Rozwiązania ćwiczeń

2.1. Niech $s_n := x_1 + \ldots + x_n$ oraz $v_n := \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|$ dla $n \in N$. Wówczas, korzystając z uogólnionej nierówności trójkąta dla normy, otrzymujemy

$$\|s_n\| = \|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_n\| \quad \text{dla } n \in N.$$

Ale na mocy założenia, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum\limits_{n\in N} x_n = s \in X$ (w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sum\limits_{n\in N} \|x_n\| = v \in X$ (w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$). Poza tym, wiadomo też, że norma $\|\,\|$ jest funkcjonałem ciągłym, tzn. $(s_n \to s) \Rightarrow (\|s_n\| \to \|s\|)$ (zobacz, np. [5], strona 36, twierdzenie 20.3) i wobec tego wystarczy w ostatniej nierówności przejść do granicy, gdy $n \to \infty$, aby natychmiast otrzymać żądaną nierówność.

2.2. Połóżmy:

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n, & \text{gdy } a_n > 0 \\ 0, & \text{gdy } a_n \leqslant 0 \end{cases};$$

$$a_n^- := \begin{cases} a_n, & \text{gdy } a_n < 0 \\ 0, & \text{gdy } a_n \geqslant 0 \end{cases};$$

i niech

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad s_n^+ := \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \quad s_n^- := \sum_{k=1}^{n} a_k^- \quad (n \in N)$$

(zobacz zadanie 2.1). Wówczas $s_n = s_n^+ + s_n^-$ dla każdego $n \in N$.
Gdyby obydwa szeregi $\sum\limits_{n\in N} a_k^+$ i $\sum\limits_{n\in N} a_k^-$ były zbieżne, to ciągi (s_n^+) i (s_n^-) byłyby zbieżne, a zatem różnica $s_n^+ - s_n^- = |a_1| + \ldots + |a_n|$ zmierzałaby do pewnej liczby rzeczywistej (gdy $n \to \infty$), tzn. szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ byłby bezwzględnie zbieżny, wbrew założeniu.
Gdy zaś tylko jeden z szeregów $\sum\limits_{n\in N} a_k^+$ i $\sum\limits_{n\in N} a_k^-$ byłby zbieżny, a drugi rozbieżny, np. $s_n^+ \to g \in R$, $s_n^- \to -\infty$, to mielibyśmy $s_n = s_n^+ + s_n^- \to -\infty$ i szereg $\sum\limits_{n\in N} a_n$ byłby rozbieżny, wbrew założeniu. Podobnie postępujemy w przypadku, gdy $s_n^+ \to +\infty$ i $s_n^- \to g \in R$.

2.3. Ponieważ $(\mathbb{R}, |\,|)$ jest przestrzenią Banacha (uwaga 2.2), więc w takiej przestrzeni każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest szeregiem przemiennym (zobacz twierdzenie 2.10).

Załóżmy teraz, że szereg generowany przez ciąg $(a_n) \in c(R)$ nie jest bezwzględnie zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. Wówczas szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ może być rozbieżny lub zbieżny.

W pierwszym przypadku, szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ nie jest przemienny.

W drugim zaś, jest on po prostu szeregiem warunkowo zbieżnym, a zatem na mocy twierdzenia sformułowanego w ćwiczeniu 2.2, szereg utworzony tylko z wyrazów dodatnich ciągu (a_n) jest rozbieżny. Niżej podamy konstrukcję permutacji $\sigma \in \mathrm{Bij}\,(N)$, a dokładniej szeregu postaci $a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots$, który jest rozbieżny. Będzie to dowodzić, iż również w tym przypadku szereg $a_1+a_2+\ldots$ nie jest przemienny.

A oto wspomniana konstrukcja. Wypisujemy najpierw z szeregu $a_1+a_2+\ldots$ tyle wyrazów dodatnich, bez zmiany ich kolejności, aby ich suma była większa od 1. Następnie wybieramy pierwszy wyraz ujemny szeregu (dla uproszczenia, lecz bez utraty ścisłości rozumowania, możemy przyjąć, iż wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są różne od zera). Dalej, z pozostałych wyrazów dodatnich wybieramy tyle, aby otrzymana suma była większa od 2 i dopisujemy kolejny wyraz ujemny z ciągu (a_n). Następnie dołączamy tyle kolejnych liczb dodatnich ciągu (a_n), dopóki ich suma nie przekroczy 3, itd. Taką czynność możemy wykonywać dowolną liczbę razy, gdyż szereg utworzony wyłącznie z wyrazów dodatnich ciągu (a_n) jest rozbieżny oraz liczba wyrazów ujemnych w ciągu (a_n) jest nieskończona (ćwiczenie 2.2 i zadanie 2.1).

Otrzymany w ten sposób szereg jest rozbieżny, gdyż dla każdej liczby $n \in N$ istnieje skończona liczba jego pierwszych wyrazów, których suma jest większa od n.

Szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ nie jest więc przemienny.

2.4. **Ad 1°**. Zakładamy, że szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ oraz, że $g < +\infty$. Z definicji granicy wynika, że dla liczby $\varepsilon = 1$ nierówność

$$\frac{\|x_n\|}{a_n} < g + 1,$$

równoważna nierówności $\|x_n\| < (g+1)a_n$, jest spełniona dla prawie wszystkich wskaźników $n \in N$. Stąd zaś oraz z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) otrzymujemy, iż szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Ad 2°. Ponieważ $g > 0$ lub $g = +\infty$, więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\|x_n\|} := h,$$

gdzie $h = \frac{1}{g}$, gdy $g > 0$ lub $h = 0$, gdy $g = +\infty$. W każdym razie h jest liczbą ($h < +\infty$) i na mocy już udowodnionego twierdzenia 1° otrzymujemy, że zbieżność szeregu $\|x_1\| + \|x_2\| + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (tj. normowa zbieżność szeregu $x_1+x_2+\dots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$) pociąga normową zbieżność szeregu $a_1+a_2+\dots$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$ (tj. zbieżność szeregu $a_1+a_2+\dots$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$, bo $a_n > 0$ dla prawie wszystkich $n \in N$). Wobec tego, jeśli szereg $a_1 + a + 2 + \dots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$, to szereg $x_1 + x_2 + \dots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

2.5. **Ad 1°**. Z założenia wynika, że istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$\frac{\|x_{n_0+1}\|}{\|x_{n_0}\|} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}, \; \frac{\|x_{n_0+2}\|}{\|x_{n_0+1}\|} \leqslant \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}, \dots, \frac{\|x_n\|}{\|x_{n-1}\|} \leqslant \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

dla każdej liczby naturalnej n większej od n_0. Mnożąc ostatnie nierówności stronami, otrzymujemy

$$\frac{\|x_n\|}{\|x_{n_0}\|} \leqslant \frac{a_n}{a_{n_0}}, \quad \text{czyli } \|x_n\| \leqslant \frac{\|x_{n_0}\|}{a_{n_0}} a_n \text{ dla } n > n_0.$$

Ale z założenia, iż szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny wynika, że szereg

$$\sum_{n \in N} \frac{\|x_{n_0}\|}{a_{n_0}} a_n = \frac{\|x_{n_0}\|}{a_{n_0}} \sum_{n \in N} a_n$$

jest również zbieżny. Teraz wystarczy tylko skorzystać z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14), aby stwierdzić, że szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Ad 2°. Rozumując niemal identycznie jak w dowodzie twierdzenia 1° stwierdzamy, że istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$\|x_n\| \geqslant \frac{\|x_{n_0}\|}{a_{n_0}} a_n$$

dla każdej liczby naturalnej n większej od n_0.

Tym razem zakładamy jednak, że szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest rozbieżny, co jest równoważne temu, iż rozbieżny jest też szereg

$$\sum_{n \in N} \frac{\|x_{n_0}\|}{a_{n_0}} a_n.$$

Wobec tego z ostatniej nierówności oraz kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) otrzymujemy, że szereg $x_1 + x_2 + \dots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

2.6. Twierdzenie sformułowane w tym ćwiczeniu jest natychmiastowym wnioskiem z drugiego kryterium porównawczego (zobacz ćwiczenie 2.4, teza 2°), gdyż

$$\lim_{n\to\infty} n\|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\frac{1}{n}}$$

oraz ciąg o wyrazach $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in N)$ ma wszystkie wyrazy dodatnie, zaś szereg $a_1 + a_2 + \ldots = \sum\limits_{n \in N} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz przykład 1.2).

Ad a). Aby pokazać, że szereg

$$a_1 + a_2 + \ldots = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n^2+2n)^2} + \ldots$$

jest zbieżny wystarczy stwierdzić, że ciąg sum cząstkowych ciągu (a_n) jest ograniczony z góry (zobacz twierdzenie 1.4). W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned}
s_n &:= a_1 + \ldots + a_n \leqslant s_{[(n+1)^2-1]^2} = s_{(n^2+2n)^2} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}\right) + \ldots \\
&\ldots + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n^2+2n)^2}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{5^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} + 2n\frac{1}{(n^2+1)^2}\right) < \\
&< 2 \cdot 1 + 2\frac{1}{2^2} + \ldots + 2\frac{1}{n^2} = 2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) < \\
&< 2\left(2 - \frac{1}{n}\right) < 4 \quad \text{dla } n \geqslant 2 \quad (s_1 = 1)
\end{aligned}$$

(zobacz przykład 1.5).

Granica $\lim\limits_{n \to \infty} n a_n$ nie istnieje natomiast dlatego, że

$$n a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{gdy } n^2 \neq p^2 \text{ dla każdego } p \in N, \\ 1 & \text{gdy } n^2 = k^2 \text{ dla pewnego } k \in N. \end{cases}$$

Ad b). Ponieważ

$$n b_n = 1 + \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2k, \\ 2, & \text{gdy } n = 2k+1 \ (k \in N) \end{cases}$$

dla $n \in N$, więc ciąg $(n b_n)$ nie ma granicy (nie jest zbieżny) w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Natomiast szereg $b_1 + b_2 + \ldots$ jest rozbieżny, gdyż

$$b_n = \frac{1 + \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right|}{n} \geqslant \frac{1}{n} \quad (n \in N)$$

oraz szereg $\sum\limits_{n \in N} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (zobacz twierdzenie 2.14).

Ad c). Tym razem sprawdzenie jest trywialne, gdyż szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (przykład 1.5) oraz $\lim\limits_{n\to\infty} nc_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Ad d). Aby wykazać, że szereg $d_1 + d_2 + \ldots$ jest rozbieżny, zauważmy najpierw, że

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

bo szereg harmoniczny $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ jest rozbieżny (zobacz twierdzenie 1.4). Poza tym,

$$\begin{aligned} d_{n+1} + \ldots + d_{n+k} &= \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \ldots + \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} > \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}}{s_{n+k}} = \\ &= \frac{s_{n+k} - s_n}{s_{n+k}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+k}} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dla każdego $n \in N$ i dostatecznie dużych $k \in N$, gdyż

$$\lim_{k\to\infty} s_{n+k} = +\infty$$

dla każdego $n \in N$ i wobec tego $\frac{s_n}{s_{n+k}}$ dla każdego $n \in N$ i dostatecznie dużych k.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli $S_n := d_1 + \ldots + d_n$ $(n \in N)$, to nie może być

$$\lim_{n\to\infty} (S_{n+k} - S_n) = 0 \quad (k \in N),$$

a więc nie może istnieć skończona granica ciągu $(S_n)_{n\in N}$, co oznacza, że szereg $d_1 + d_2 + \ldots$ jest rozbieżny.

Jest też oczywiste, że

$$\lim_{n\to\infty} nd_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{a_n}{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = 0,$$

bo $s_n \to +\infty$, gdy $n \to \infty$.

Zadania

Zbadać zbieżność następujących szeregów o wyrazach rzeczywistych:

2.1. $\sum\limits_{1<n\in N} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

2.2. $\sum\limits_{n\in N} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$

2.3. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$

2.4. $\sum\limits_{n\in N}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$

2.5. $\sum\limits_{n\in N}\frac{1}{(\ln n)^n}$

2.6. $\sum\limits_{n\in N}\sin^n\frac{\pi}{2n}$

2.7. $\sum\limits_{n\in N}\frac{n}{2n}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}$

2.8. $\sum\limits_{n\in N}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

2.9. $\sum\limits_{n\in N}n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$

2.10. $\sum\limits_{n\in N}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

2.11. $\sum\limits_{n\in N}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

2.12. $\sum\limits_{n\in N}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$

2.13. $\sum\limits_{n\in N}\left(\frac{an}{n+1}\right)^2 \quad (a>0)$

2.14. $\sum\limits_{n\in N}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$

Zbadać zbieżność następujących szeregów o wyrazach zespolonych:

2.15. $\sum\limits_{n\in N}\frac{\cos\sqrt{n}+i\sin\sqrt{n}}{n^2}$

2.16. $\sum\limits_{n\in N}\frac{n^n}{n!(e-i)^n}$

2.17. $\sum\limits_{n\in N}\left(\frac{2ni-1}{4n}\right)^n$

2.18. $\sum\limits_{n\in N}\frac{n}{2^n}(1+i)^n$

2.19. $\sum\limits_{n\in N}\frac{n}{2^n}(2+i)^n$

2.20. $\sum\limits_{n\in N}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$

Zbadać zbieżność następujących szeregów funkcyjnych w wyróżnionych przestrzeniach unormowanych:

2.21. $\sum\limits_{n\in N}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(t^n+t^{-n})$ w przestrzeni $\left(\mathbf{C}\left(\left[-2,-\frac{1}{2}\right]\right), \|\ \|_0\right)$

2.22. $\sum\limits_{n\in N}(1-t)t^{n-1}$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_0)$

2.23. $\sum\limits_{n\in N}\frac{t^n}{n^2}$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([-1,1]), \| \|_0)$

2.24. $\sum\limits_{n\in N}(1-t)t^{n-1}$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$

2.25. $\sum\limits_{n\in N}\frac{1}{n^2}e^{nt}$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$

2.26. $\sum\limits_{n\in N}[f_n(t)-f_{n-1}(t)]$ w przestrzeni $(\mathbf{C}([-1,1]), \| \|_1)$ gdzie $f_0(t)=0$ dla $t\in[-1,1]$ oraz

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{dla } t\in\left[-1,-\frac{1}{n}\right], \\ \frac{n}{2}(t+\frac{1}{n}) & \text{dla } t\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{dla } t\in\left[\frac{1}{n},1\right] \quad (n\in N). \end{cases}$$

2.27. Korzystając z twierdzenia sformułowanego w ćwiczeniu 2.6 sprawdzić, że następujące szeregi (o wyrazach dodatnich) są rozbieżne:

a) $\sum\limits_{n\in N}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

b) $\sum\limits_{n\in N}(\sqrt[n]{a}-1)$, gdzie $a>1$;

c) $\sum\limits_{n\in N}(\sqrt[n]{n}-1)$.

Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania zadań

2.1. Ponieważ $\ln(1+x)\leqslant x$ dla każdego $x>-1$ (dlaczego?), więc

$$\ln\frac{n+1}{n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \leqslant \frac{2}{n-1} \quad \text{dla } 1<n\in N,$$

a zatem

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2}{n-1} < 2\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{dla } 1<n\in N.$$

Stąd oraz z kryterium porównawczego wynika, że zadany szereg jest zbieżny (zobacz przykład 2.10).

2.2. W tym przypadku $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ dla $n\in N$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

Zadany szereg jest więc rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu w przestrzeni $(\mathbb{R}, | |)$.

2.3. Zauważmy, że $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$ oraz, że $a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ pierwiastków}}}$ dla $n \in N$.

Wobec tego $a_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{2^n}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \leqslant \frac{\pi}{2^n}$ dla $n \in N$, gdyż $2\sin\frac{x}{2} \leqslant x$ dla $x > 0$ (dlaczego?). Stąd oraz z kryterium porównawczego wnioskujemy, że zadany szereg jest zbieżny (zobacz przykład 1.1).

2.4. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1,$$

więc, na mocy kryterium d'Alemberta, zadany szereg jest zbieżny.

2.5. Ponieważ, w tym przypadku,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1,$$

więc, zgodnie z kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest zbieżny.

2.6. W tym przypadku,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{2n} = 0 < 1$$

i zadany szereg jest zbieżny na mocy kryterium Cauchy'ego.

2.7. Tym razem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{n^2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt[n]{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

i na mocy kryterium Cauchy'ego, zadany szereg nie jest zbieżny.

2.8. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2(n-1)}{n+1}} = e^{-2} < 1,$$

więc, na mocy kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest zbieżny.

2.9. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1,$$

więc, na mocy kryterium d'Alemberta, zadany szereg jest zbieżny.

2.10. Ponieważ

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = \limsup_n \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1,$$

więc, na mocy kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest zbieżny.

2.11. W tym przypadku,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2 \cdot \frac{2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

(zobacz przykład 2.12) i na mocy kryterium d'Alemberta zadany szereg jest zbieżny.

2.12. Zauważmy, że w tym przypadku

$$\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt[2n]{\frac{3+1}{2}} = \frac{1}{2} < 1,$$

a zatem, na mocy kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest zbieżny.

2.13. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an}{n+1}\right)^n} = a > 0,$$

więc, zgodnie z kryterium Cauchy'ego, zadany szereg jest zbieżny, gdy $a < 1$ oraz rozbieżny, gdy $a > 1$. W przypadku, gdy $a = 1$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} \neq 0,$$

i zadany szereg nie jest zbieżny, gdyż nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

2.14. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{\sin \frac{\pi}{3^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

więc zadany szereg jest zbieżny, na mocy kryterium d'Alemberta.

2.15. Ponieważ

$$|z_n| = \left| \frac{\cos\sqrt{n} + i\sin\sqrt{n}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2},$$

więc, na mocy kryterium porównawczego, zadany szereg jest modułowo zbieżny, a zatem i zbieżny (zobacz twierdzenie 1.4 oraz uwagę 2.2).

2.16. Zauważmy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(e^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{n!(e^2+1)^{\frac{n}{2}}}{n^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{e^2+1}} = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1.$$

Wobec tego, na mocy kryterium d'Alemberta, zadany szereg jest modułowo zbieżny, a wiec również zbieżny (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.17. Stosujemy kryterium Cauchy'ego

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2ni-1}{4n} \right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}}{4n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Stąd wynika, że zadany szereg jest modułowo zbieżny, a więc również zbieżny (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.18. Stosujemy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{2^n}{n \cdot 2^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1.$$

Stąd wnioskujemy, że zadany szereg jest modułowo zbieżny, a więc również zbieżny (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.19. Tym razem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot 5^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{2^n}{n \cdot 5^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1,$$

a stąd, na mocy kryterium d'Alemberta wynika, że zadany szereg jest rozbieżny.

2.20. Ponieważ $|z_n| = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)n}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ dla $n \in N$ oraz szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżny (zobacz przykład 2.10), więc zadany szereg jest modułowo zbieżny (na mocy kryterium porównawczego), a więc jest on również zbieżny (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.21. Połóżmy $u_n(t) := \frac{n^2}{\sqrt{n!}}$ dla $n \in N$ oraz $t \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right]$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|_0 &= \max_{t\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]} |u_n(t)| = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \max_{t\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right]} |t^n + t^{-n}| = \\ &= \frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(2^n + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1} \quad \text{dla } n \in N.\end{aligned}$$

Poza tym, szereg liczbowy $\sum\limits_{n\in N} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ jest zbieżny, co wynika np. z kryterium d'Alemberta. Wobec tego, na mocy kryterium porównawczego, szereg $\sum\limits_{n\in N} u_n(t)$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}(\left[-2, -\frac{1}{2}\right]), \|\,\|_0)$. Stąd wynika, że zadany szereg jest też w tej przestrzeni zbieżny (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.22. Zauważmy, że jeśli $u_n(t) := (1-t)\, t^{n-1} = t^{n-1} - t^n$ dla $n \in N$ oraz $t \in [0,1]$, to

$$\begin{aligned}s_n(t) &:= u_1(t) + \ldots + u_n(t) = (1 + t + \ldots + t^{-1}) - (t + \ldots + t^{n-1} + t^n) = \\ &= 1 - t^n \quad (n \in N).\end{aligned}$$

Z przykładu 1.7 wynika, że ciąg $(t^n)_{n\in N}$ nie jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_0)$, co oznacza że szereg $\sum\limits_{n\in N} (1-t)t^{n-1}$ nie jest zbieżny w tejże przestrzeni.

2.23. W tym przypadku,

$$\|u_n(t)\|_0 = \max_{t\in[-1,1]} \frac{1}{n^2}|t|^n = \frac{1}{n^2} \quad \text{dla } n \in N,$$

a zatem, na mocy kryterium d'Alemberta, zadany szereg jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([-1,1]), \|\,\|_0)$. Stąd wynika, że zadany szereg jest też zbieżny w tej przestrzeni (zobacz twierdzenie 2.4 oraz uwagę 2.2).

2.24. Niech $u_n(t) := (1-t)t^{n-1}$ dla $n \in N$ oraz $t \in [0,1]$. Wówczas

$$\begin{aligned}\|u_n(t)\|_1 &= \int_0^1 \left|(1-t)t^{n-1}\right| dt = \int_0^1 \left(t^{n-1} - t^n\right) dt = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{dla } n \in N,\end{aligned}$$

a ponieważ szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny (przykład 1.3), więc zadany szereg funkcyjny jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_1)$ na mocy kryterium porównawczego. Niestety, tym razem przestrzeń $(\mathbf{C}([0,1]), \|\,\|_1)$ nie jest zupełna (uwaga 2.2) i z ustalonego już faktu nie możemy wnioskować, iż zadany szereg jest zbieżny w przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ z normą całkową.

Ale dla każdego $t \in [0,1]$

$$s_n(t) := u_1(t) + \ldots + u_n(t) = 1 - t^n \to s(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } 0 \leqslant t < 1, \\ 0, & \text{gdy } t = 1, \end{cases}$$

gdy $n \to \infty$. Ta obserwacja sugeruje, iż

$$\|s_n(t) - 1\|_1 = \int\limits_0^1 |1 - t^n - 1| dt = \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Stąd wynika, że w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$ zadany szereg funkcyjny jest zbieżny i jego sumą jest funkcja identycznie równa 1 na całym przedziale $[0,1]$.

2.25. Niech $u_n(t) := \frac{1}{n^2} e^{nt}$ dla $n \in N$ oraz $t \in [0,1]$. Wówczas

$$\|u_n(t)\|_1 = \int\limits_0^1 \frac{1}{n^2} e^{nt} dt = \frac{1}{n}(e^n - 1) \quad (n \in N)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_{n+1}\|_1}{\|u_n\|_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{e^{n+1} - 1}{e^n - 1} = e > 1.$$

Stąd oraz z kryterium d'Alemberta wynika, że zadany szereg nie jest zbieżny i nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([0,1]), \| \|_1)$.

2.26. Zadany szereg funkcyjny jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{C}([-1,1]), \| \|_1)$, ale nie jest on w tej przestrzeni zbieżny. Gdyby Czytelnik miał jakiekolwiek trudności z uzasadnieniem tegoż stwierdzenia, to proszę jeszcze raz dokładnie przeczytać przykłady 2.6 i 2.1.

2.27. **a)** Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, więc

$$\lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = 1$$

i na mocy twierdzenia sformułowanego w ćwiczeniu 2.6 stwierdzamy, że zadany szereg jest rozbieżny.

b) W tym przypadku

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \ln a > 0 \quad \text{dla } a > 1,$$

gdyż

$$\lim_{h\to\infty} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a \quad \text{dla } a > 0,$$

co wynika z wzoru na pochodną funkcji wykładniczej. Dlatego, na mocy twierdzenia sformułowanego w ćwiczeniu 2.6, zadany szereg jest rozbieżny.

c) Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n}-1) = +\infty$, gdyż

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left[-\frac{1}{x^2}\ln x - \frac{1}{x^2}\right]}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}(\ln x + 1) = +\infty\end{aligned}$$

(korzystaliśmy tutaj z reguły de l'Hospitala), więc zadany szereg jest rozbieżny (zobacz ćwiczenie 2.6).

3. Dalsze kryteria zbieżności szeregów w przestrzeniach unormowanych

Przed podaniem następnych kryteriów zbieżności szeregów w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \,\|)$ przypomnijmy, iż w tym opracowaniu $\mathbf{X} = (X, +; \mathbf{K}, \cdot)$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczbowym $\mathbf{K} = (K, +, \cdot)$, tzn. nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ lub nad ciałem liczb zespolonych $\mathbf{C} = (C, +, \cdot)$. Przestrzeń unormowaną $(\mathbf{X}, \| \,\|)$, w której $\mathbf{X}$ jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ (odpowiednio: nad ciałem liczb zespolonych $\mathbf{C}$) nazywamy ***przestrzenią unormowaną rzeczywistą*** (odpowiednio: ***przestrzenią unormowaną zespoloną***).

Jeśli w dalszym ciągu w jakimkolwiek sformułowaniu użyjemy krótkiego terminu „przestrzeń unormowana”, to będzie to oznaczać, iż odnosi się ono zarówno do przestrzeni unormowanej rzeczywistej, jak i do przestrzeni unormowanej zespolonej.

LEMAT 3.1. *Niech* $(\mathbf{X}, \| \,\|)$ *będzie przestrzenią unormowaną i niech* (x_n) *będzie ciągiem o wyrazach w zbiorze* X, (a_n) *zaś niech będzie ciągiem liczb* (rzeczywistych lub zespolonych)*. Wówczas, jeśli*

$$\text{\textit{dla szeregu } } x_1 + x_2 + \ldots \text{ \textit{jest spełniony warunek} (2.2)} \tag{3.1}$$

oraz

$$\text{\textit{szereg liczb rzeczywistych} } \sum_{n \in N} |a_n - a_{n+1}| \text{ \textit{jest zbieżny} (w przestrzeni } (\mathbb{R}, |\,|)) \tag{3.2}$$

to wyrazy szeregu $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$ *również spełniają warunek* (2.2)*, tzn.*

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{p \in N} \bigwedge_{p \leqslant n \in N} \bigwedge_{k \in N} \|a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k}\| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

DOWÓD

Założenie (3.2) jest równoważne ograniczoności ciągu sum cząstkowych ciągu $(|a_n - a_{n+1}|)_{n \in N}$ (zobacz twierdzenie 1.4), tzn.

$$\bigvee_{K > 0} \bigwedge_{n \in N} |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_{n+1}| \leqslant K. \tag{3.4}$$

Z warunku (3.4) wynika zaś, że ciąg (a_n) jest ograniczony. Rzeczywiście,

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| - |a_1| \leqslant |a_1 - a_{n+1}| &= |a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n - a_{n+1}| \leqslant \\ &\leqslant |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_{n+1}| \leqslant K \end{aligned}$$

dla $n \in N$, a stąd wynika, że $|a_{n+1}| \leqslant |a_1| + K := M$ dla $n \in N$.

Zatem

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} |a_n| \leqslant M. \tag{3.5}$$

Ustalmy jeszcze, że założenie (3.1) oznacza, iż

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} \|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| < \frac{\varepsilon}{K+M}.$$

Zauważmy teraz, że prawdziwa jest następująca równość

$$\begin{aligned} a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k} = {} & (a_{n+1} - a_{n+2})x_{n+1} + \\ & + (a_{n+2} - a_{n+3})(x_{n+1} + x_{n+2}) + \ldots \\ & \ldots + (a_{n+k-1} - a_{n+k})(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k-1}) + \\ & + a_{n+k}(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

zwana ***przekształceniem Abela***[9].

Stąd oraz z (3.4) i (3.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k}\| \leqslant {} & |a_{n+1} - a_{n+2}| \cdot \|x_{n+1}\| + \\ & + |a_{n+2} - a_{n+3}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2}\| + \ldots \\ & \ldots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k-1}\| + \\ & + |a_{n+k}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}\| < \\ & < (|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \ldots \\ & \ldots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| + |a_{n+k}|) \cdot \frac{\varepsilon}{K+M} \leqslant \\ & \leqslant (K+M)\frac{\varepsilon}{K+M} = \varepsilon \end{aligned}$$

dla $n \geqslant p$ oraz $k \in N$.

To zaś oznacza, że jest spełniony warunek (3.3). ■

Uwaga 3.1. W trakcie dowodu lematu 3.1 stwierdziliśmy, że z warunku (3.4) wynika ograniczoność ciągu (a_n). Okazuje się, iż można wykazać, że z warunku (3.4) wynika nawet, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Rzeczywiście, ciąg o wyrazach

$$b_n := |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| \quad (n \geqslant 2)$$

[9] **Niels Henrik Abel** (5.08.1802–6.04.1929) – matematyk norweski, współodkrywca funkcji eliptycznych, wnikliwy badacz szeregów, który jednocześnie z Ruffinim opracował teorię równań algebraicznych.

jest zbieżny, gdyż jest rosnący i ograniczony z góry. Zatem jest on ciągiem fundamentalnym i dlatego

$$|a_{n+k} + a_n| = |a_n - a_{m+k}| = |a_n - a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+k-1} - a_{n+k}| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| = |b_{n+k} - b_n| < \varepsilon$$

dla $n \geqslant p \in N$ oraz $k \in N$. Stąd wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Podkreślmy jednak, że nie każdy ciąg zbieżny spełnia warunek (3.4). Na przykład ciąg o wyrazach

$$a_n := \frac{1}{2n}\left[1 - (-1)^{n+1}\right]$$

jest zbieżny do zera, ale

$$\begin{aligned}
b_{2^{n+1}+1} &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\
\ldots &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) > \\
&> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = n \cdot \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \in N.
\end{aligned}$$

Ciąg (b_n) nie jest więc ograniczony z góry.

Jako natychmiastowy wniosek z lematu 3.1 oraz twierdzenia 2.3 otrzymujemy

TWIERDZENIE 3.1. (Abela). *Niech* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią Banacha i niech* $(x_n) \in c(X)$ *oraz* $(a_n) \in c(R)$ $((a_n) \in c(C))$. *Wówczas, jeśli szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *oraz szereg* $\sum_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbb{R}, | \, |)$, *to zbieżny jest również szereg* $\sum_{n\in N} a_n x_n$ *w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

UWAGA 3.2. Jeżeli w przestrzeni Banacha $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ szeregi $\sum_{n\in N} x_n$ i $\sum_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$, gdzie $(x_n) \in c(X)$ oraz $(a_n) \in c(R)$ lub $(a_n) \in c(C)$, są zbieżne, to warunek (3.2) (lub równoważny mu warunek (3.4)) nie musi być spełniony. Na przykład szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^3}$$

są zbieżne, ale warunek (3.2) nie jest spełniony.

W twierdzeniu Abela żąda się m.in. aby szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ był zbieżny w przestrzeni Banacha $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. Jest to dość krępujące założenie. W następnym twierdzeniu będzie ono zastąpione żądaniem, aby szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ był jedynie ograniczony w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, ale dla prawdziwości tezy oprócz warunku (3.2) trzeba będzie założyć, że ciąg (a_n) (rzeczywisty lub zespolony) jest zbieżny do zera.

Podkreślmy, że z warunku (3.2) wynika wprawdzie zbieżność ciągu (a_n) (zobacz uwagę 3.1), ale niekoniecznie do zera. Na przykład, ciąg stały o wyrazach $a_n = 1$ dla $n \in N$ spełnia warunek (3.2), ale nie jest on zbieżny do zera.

Twierdzenie 3.2. (Dirichleta[10]). *Niech $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ będzie rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią Banacha i niech $(x_n) \in c(X)$ oraz $(a_n) \in c(R)$ $((a_n) \in c(C))$. Wówczas, jeśli szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest ograniczony w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ oraz szereg $\sum\limits_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (w przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$), to szereg $\sum\limits_{n\in N} a_n x_n$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.*

Dowód

Z założeń oraz z twierdzenia 2.3 wynika, że:

$$\bigvee_{K>0} \bigwedge_{n\in N} \|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant K;$$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} \bigwedge_{k\in N} |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k-1} - a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2K};$$

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{l\in N} \bigwedge_{l\leqslant n\in N} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Dlatego po zastosowaniu przekształcenia Abela (3.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k}\| &\leqslant |a_{n+1} - a_{n+2}| \cdot \|x_{n+1}\| + \\ &+ |a_{n+2} - a_{n+3}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2}\| + \ldots + \\ &+ |a_{n+k-1} - a_{n+k}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k-1}\| + \\ &+ |a_{n+k}| \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}\| \leqslant \\ &\leqslant (|a_{n+1} - a_{n+2}| + |a_{n+2} - a_{n+3}| + \ldots +\end{aligned}$$

[10] **Peter Gustav Dirichlet** (13.02.1805–5.05.1859) – matematyk niemiecki, profesor na uniwersytetach w Berlinie i Getyndze. Zajmował się mechaniką, fizyką matematyczną, ale przede wszystkim teorią liczb, gdzie uzyskał wiele podstawowych rezultatów. W swoich badaniach stosował często funkcje analityczne, zwane funkcjami (szeregami) Dirichleta. Pierwszy sformułował i badał warunkową zbieżność szeregów oraz podał ścisły dowód możliwości rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji odcinkami ciągłej i monotonicznej. Wykłady Dirichleta miały ogromny wpływ na wielu młodych jeszcze wówczas matematyków: R. Riemanna, F. Einsensteina, L. Kroneckera, R. Dedekinda i innych.

$$+|a_{n+k-1} - a_{n+k}| + |a_{n+k}|) \cdot K <$$
$$< \left(\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}\right) \cdot K = \varepsilon$$

dla $n \geqslant r := \max(p, l)$ oraz $k \in N$.

Oznacza to, że ciąg sum cząstkowych ciągu $(a_n x_n)_{n \in N}$ spełnia warunek (2.2), a więc szereg $\sum\limits_{n \in N} a_n x_n$ jest zbieżny (zobacz twierdzenie 2.3). ■

Uwaga 3.3. Twierdzenie 3.1 można uzasadnić korzystając niemal wyłącznie z twierdzenia 3.2 i tylko w tym sensie twierdzenie Abela można traktować jako konsekwencję (wniosek) twierdzenia Dirichleta.

Rzeczywiście, jeśli są spełnione założenia twierdzenia Abela, to z warunku (3.2) wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny (zobacz uwagę 3.1). W przypadku, gdy $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, wszystkie założenia twierdzenia Dirichleta są spełnione (szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest zbieżny, a więc jest oczywiście ograniczony!) i szereg $\sum\limits_{n \in N} a_n x_n$ jest zbieżny. Jeśli zaś $\lim\limits_{n \in N} g \neq 0$, to $a_n = g + \varepsilon_n$ $(n \in N)$, gdzie $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$ oraz szereg $\sum\limits_{n \in N} |a_n - a_{n+1}| = \sum\limits_{n \in N} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}|$ jest zbieżny z założenia. Zatem, znowu na podstawie twierdzenia Dirichleta otrzymujemy, że szereg $\sum\limits_{n \in N} \varepsilon_n x_n$ jest zbieżny. Wobec tego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = g \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$$

(zobacz twierdzenie 1.2) jest również zbieżny, bo $x_1 + x_2 + \dots$ jest szeregiem zbieżnym z założenia.

Podkreślmy jednak, że nie można twierdzić, iż twierdzenie Dirichleta jest ogólniejsze od twierdzenia Abela, gdyż z założeń twierdzenia 3.1 nie wynikają założenia twierdzenia 3.1, na co wskazaliśmy już przed sformułowaniem twierdzenia Dirichleta.

Z twierdzeń Abela i Dirichleta otrzymuje się bardzo prosto dalsze warunki wystarczające (ale nie konieczne!) zbieżności szeregów w rzeczywistych przestrzeniach Banacha. Warunki te w znaczący sposób ułatwiają rozstrzygnięcie problemu zbieżności wielu szeregów.

Twierdzenie 3.3. (kryterium Abela). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *jest rzeczywistą przestrzenią Banacha,* $(x_n) \in c(X)$ *i szereg* $x_1 + x_2 + \dots$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *oraz*

$$\text{ciąg rzeczywisty } (a_n) \text{ jest monotoniczny i ograniczony} \tag{3.7}$$

to szereg $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Dowód

Wystarczy pokazać, że warunek (3.7) implikuje (3.4) (warunek (3.4) jest równoważny założeniu (3.2)), a następnie zastosować twierdzenie Abela.

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że ciąg rzeczywisty (a_n) jest malejący i ograniczony. Wówczas istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leqslant M$ dla $n \in N$. Zatem

$$\begin{aligned}|q_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_n - a_{n+1}| = a_1 - a_{n+1} \leqslant \\ \leqslant |a_1| + |a_{n+1}| \leqslant 2M := K \quad \text{dla } (n \in N).\end{aligned}$$

W przypadku, gdy ciąg (a_n) jest rosnący dowód jest niemal identyczny. ■

Twierdzenie 3.4. (kryterium Dirichleta). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *jest rzeczywistą przestrzenią Banacha,* $(x_n) \in c(X)$ *i szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest ograniczony w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *oraz ciąg rzeczywisty* (a_n) *jest monotoniczny i zbieżny do zera, to szereg* $a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Dowód

Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że ciąg (a_n) jest malejący i zbieżny do zera (piszemy wówczas $a_n \searrow 0$). W przypadku, gdy $a_n \nearrow 0$ dowód jest analogiczny.

Wystarczy pokazać, że ciąg sum cząstkowych ciągu $(a_n x_n)_{n \in N}$ spełnia warunek (2.2) (zobacz twierdzenie 2.3).

Zauważmy najpierw, że jeśli $a_n \searrow 0$, to wszystkie wyrazy ciągu (a_n) muszą być nieujemne. Rzeczywiście, jeśli $a_n \searrow 0$, to

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{p \in N} \bigwedge_{p \leqslant n \in N} |a_n| < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{k, m \in N} (k < m) \Rightarrow (a_k \geqslant a_m).$$

Przypuśćmy, że $a_k < 0$ dla pewnego $k \in N$. Wówczas $|a_n| < \varepsilon := -a_k$ dla $n \geqslant p \in N$. Stąd $-a_n < -a_k$ dla $n \geqslant p$. W szczególności, dla $m > \max(k, p)$ otrzymujemy $-a_m < -a_k$, czyli $a_k < a_m$, co jest sprzeczne z tym, że (a_n) jest ciągiem nierosnącym.

Teraz korzystamy z przekształcenia Abela (3.6) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k}\| \leqslant (a_{n+1} - a_{n+2}) \cdot \|x_{n+1}\| + \\ + (a_{n+2} - a_{n+3}) \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2}\| + \ldots \\ \ldots + (a_{n+k-1} - a_{n+k}) \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k-1}\| + \\ + a_{n+k} \cdot \|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+k}\|.\end{aligned}$$

Ale z założeń kryterium Dirichleta wynika, że istnieje $K > 0$ takie, że $\|x_{n+1} + \ldots + x_{n+k}\| \leqslant K$ dla $n, k \in N$ oraz $a_n < \frac{\varepsilon}{K}$ dla $n \geqslant p$. Zatem

$$\|a_{n+1}x_{n+1} + \ldots + a_{n+k}x_{n+k}\| \leqslant a_{n+1} \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \quad \text{dla } n \geqslant p \text{ oraz } k \in N,$$

co kończy dowód. ■

Uwaga 3.4. Odnośnie kryteriów Abela i Dirichleta można poczynić podobne spostrzeżenia jak w uwadze 3.3.

Uwaga 3.5. Jeżeli ciąg rzeczywisty (a_n) jest monotoniczny i ograniczony to szereg $\sum_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny. Rzeczywiście, niech (a_n) będzie ciągiem nierosnącym i ograniczonym (gdy (a_n) jest ciągiem niemalejącym i ograniczonym dowód jest niemal identyczny). Wówczas sumy cząstkowe s_n ciągu generującego szereg $\sum_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$ są postaci: $s_n = a_1 - a_{n+1}$ $(n \in N)$. Ciąg (s_n) jest więc fundamentalny, bo (a_n) jest ciągiem fundamentalnym (jako ciąg zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).

Dlatego też, jeśli ciąg rzeczywisty (a_n) jest monotoniczny i zbieżny do zera, to szereg $\sum_{n\in N} |a_n - a_{n+1}|$ jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Z uwagi 3.5 wynika, że kryterium Abela i Dirichleta można też traktować jako bezpośrednie wnioski odpowiednio z twierdzeń Abela i Dirichleta (oczywiście, korzystając z uwagi 3.5, ale za to bez przekształcenia Abela!).

Definicja 3.1. Szereg liczb rzeczywistych $\sum_{n\in N} u_n$ nazywamy ***szeregiem naprzemiennym***, gdy dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność: $u_n \cdot u_{n+1} \leqslant 0$.

Innymi słowy, szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg liczb rzeczywistych, którego dowolne dwa kolejne wyrazy mają znaki przeciwne albo co najmniej jeden z nich jest równy zero.

Jest oczywiste, iż każdy szereg naprzemienny można zapisać w jednej z dwóch postaci:

$$\sum_{n\in N} (-1)^{n+1} a_n \tag{3.8}$$

albo

$$\sum_{n\in N} (-1)^{n} a_n, \tag{3.9}$$

gdzie (a_n) jest ciągiem liczb nieujemnych.

Połóżmy teraz $x_n := (-1)^{n+1}$ albo $x_n := (-1)^n$ dla $n \in N$. W obu przypadkach szereg $\sum_{n\in N} x_n$ jest ograniczony w przestrzeni Banacha $(\mathbb{R}, |\,|)$ (dlaczego?). Stąd oraz z kryterium Dirichleta (zobacz też uwagę 3.5) wynika natychmiast

Twierdzenie 3.5. (kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych). *Szereg naprzemienny postaci* (3.8) *lub* (3.9), *w którym* $(a_n) \in c(R_+ \cup \{0\})$ *jest ciągiem rosnącym i zbieżnym do zera, jest szeregiem zbieżnym w przestrzeni* $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Szeregi naprzemienne mają wiele interesujących własności oraz liczne zastosowania, np. w metodach numerycznych do wyznaczania przybliżeń wymiernych liczb niewymiernych. Kolejne ***twierdzenie***, sformułowane i udowodnione przez ***Leibniza***, charakteryzuje zbieżność bardzo ważnej klasy szeregów naprzemiennych, którą wyróżniliśmy już w twierdzeniu 3.5.

Twierdzenie 3.6. (o szeregach naprzemiennych). *Jeżeli ciąg* $(a_n) \in c(R_+ \cup \cup\{0\})$ *jest nierosnący i zbieżny do zera oraz* $s \in R$ *jest sumą szeregu postaci* (3.8) (*postaci* (3.9)), *to*:

$$a_1 - a_2 \leqslant s \leqslant a_1 \quad (-a_1 \leqslant s \leqslant a_2 - a_1) \tag{3.10}$$

$$\bigwedge_{n \in N} |s - s_n| \leqslant a_{n+1}, \tag{3.11}$$

gdzie $s_n := a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$ $(s_n := -a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n)$ *dla* $n \in N$.

Dowód

Ponieważ ciąg (a_n) jest nierosnący, więc

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n}) \geqslant s_{2n} = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \geqslant a_1 - a_2$$

oraz

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant s_{2n-1} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) \leqslant a_1 \end{aligned}$$

dla każdego $n \in N$.

Stąd wynika, że ciąg (s_{2n+2}) jest nierosnący, zaś ciąg (s_{2n+1}) jest niemalejący. Ale

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

(zobacz twierdzenie 3.5) i wobec tego

$$a_1 - a_2 \leqslant s_{2n+2} \leqslant s \leqslant s_{2n+1} \leqslant a_1 \quad (n \in N),$$

co oznacza, że jest spełniona nierówność (3.10) oraz, że

$$s_m \leqslant s \leqslant s_{m+1} \quad \text{dla każdej liczby parzystej } m \in N$$

i

$$s_{k+1} \leqslant s \leqslant s_k \quad \text{dla każdej liczby nieparzystej } k \in N.$$

Dlatego $|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n|$ dla każdego $n \in N$, a stąd $|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = = |(-1)^{n+2} a_{n+1}| = a_{n+1}$ dla $n \in N$, co oznacza, że jest spełniony również warunek (3.11).

Uzasadnienie twierdzenia 3.6 dla szeregu postaci (3.9) jest trywialne, gdy zauważymy, iż szereg (3.9) powstaje z szeregu (3.8) przez pomnożenie tego ostatniego przez liczbę -1 (zobacz twierdzenie 1.3). ■

Uwaga 3.6. W wielu podręcznikach kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych (twierdzenie 3.5) zwane jest ***kryterium Leibniza***, zaś twierdzenie o szeregach naprzemiennych (twierdzenie 3.6) jest nazywane – jak już wspomnieliśmy – ***twierdzeniem Leibniza***.

Dodajmy też, że kryterium Leibniza jest bardzo „subtelnym" twierdzeniem, bowiem wszystkie trzy założenia o wyrazach szeregu $a_1 + a_2 + \dots$, tj. ich znakozmienność, monotoniczność (dokładniej: nierośnięcie) i zbieżność do zera, są istotne. Wyjaśnimy tę kwestię na przykładach.

Przykłady

3.1. Rozważmy szereg postaci

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots ,$$

którego wyrazy nie rosnąc zmierzają do zera, ale zmiana ich znaków jest inna niż w szeregach naprzemiennych (zobacz definicję 3.1). Aby stwierdzić, iż rozważany szereg jest rozbieżny wystarczy zauważyć, że

$$s_{1+2+\ldots+n} = s_{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą,} \\ 0, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \end{cases}$$

(s_n ($n \in N$) oznacza sumę n pierwszych wyrazów szeregu!). Stąd zaś wynika, że ciąg (s_n) nie ma granicy w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (dlaczego?), co jest równoważne stwierdzeniu, iż zadany szereg jest rozbieżny.

3.2. Rozważmy teraz szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [2 + (-1)^n] \frac{1}{n},$$

który jak łatwo sprawdzić jest szeregiem naprzemiennym postaci (3.9) i takim, że

$$(a_n)_{n \in N} = \left([2 + (-1)^n] \, \frac{1}{n} \right)_{n \in N}$$

jest ciągiem liczb dodatnich zmierzającym do zera. Wspomniany ciąg (a_n) nie jest jednak monotoniczny, gdyż

$$a_{2k} - a_{2k+1} = \left[2 + (-1)^{2k}\right] \frac{1}{2k} - \left[2 + (-1)^{2k+1}\right] \frac{1}{2k+1} =$$
$$= \frac{3}{2k} - \frac{1}{2k+1} = \frac{4k+3}{2k(2k+1)} > 0$$

oraz

$$a_{2k+1} - a_{2k+2} = \left[2 + (-1)^{2k+1}\right] \frac{1}{2k+1} - \left[2 + (-1)^{2k+2}\right] \frac{1}{2k+2} =$$
$$= \frac{1}{2k+1} - \frac{3}{2k+2} = \frac{-4k-1}{(2k+1)(2k+2)} < 0$$

dla każdego $k \in N$.

Aby pokazać, że zadany szereg jest rozbieżny połóżmy $s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ $(n \in N)$ i zauważmy, że

$$s_n = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

gdyż

$$2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k} \to -2\ln 2 \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty$$

(zobacz przykłady 2.3 i 1.2 oraz twierdzenie 1.4).

3.3. Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym liczb nieujemnych, który nie zmierza do zera, to szeregi $\sum_{n\in N} (-1)^n a_n$ oraz $\sum_{n\in N} (-1)^{n+1} a_n$ nie mogą być zbieżne, bo w tym przypadku nie jest spełniony warunek konieczny ich zbieżności (zobacz (2.2)). Zwolennikom konkretów proponuję przyjąć $a_n = \frac{n+1}{n}$ $(n \in N)$.

Kolejne przykłady pokażą zastosowania wcześniej sformułowanych twierdzeń do rozstrzygania zbieżności konkretnych szeregów.

Przykłady

3.4. Ponieważ ciągi $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{\ln n})$, $(\frac{n+1}{n})$, $(\sqrt[n]{n})$, $((1+\frac{1}{n})^n)$, są monotoniczne i ograniczone, więc jeśli szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni Banacha $(\mathbf{X}, \|\ \|)$, to na podstawie kryterium Abela (twierdzenie 3.3) następujące szeregi:

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n} x_n, \ \sum_{n\in N} \frac{1}{\ln n} x_n, \ \sum_{n\in N} \frac{n+1}{n} x_n, \ \sum_{n\in N} \sqrt[n]{n} x_n, \ \sum_{n\in N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x_n, \text{ itp.}$$

są też zbieżne w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\ \|)$.

W szczególności, w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\ |)$ zbieżne są szeregi:

$$\sum_{n\in N} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, \ \sum_{n\in N} \frac{n}{\ln n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, \ \sum_{n\in N} (n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}},$$
$$\sum_{n\in N} n \sqrt[n]{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, \ \sum_{n\in N} n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad \text{itp.}$$

(zobacz zadanie 2.9), zaś w przestrzeni $(\mathbf{C}([-1,1]), \| \|_0)$ (zobacz przykład 1.6) zbieżne są również szeregi:

$$\sum_{n\in N}\frac{t^n}{n^3},\ \sum_{n\in N}\frac{t^n}{n^2\ln n},\ \sum_{n\in N}\frac{n+1}{n^3}t^n,\ \sum_{n\in N}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3}t^n,\ \sum_{n\in N}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n t^n,\ \text{itp.}$$

(zobacz zadanie 2.23).

3.5. Niech $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ oraz $f_n(t) = (-1)^{n+1}\cos nt$ dla $n \in N$ oraz $t \in R$ i $t \neq (2k+1)\pi$ $(k \in Z)$, gdzie Z oznacza zbiór liczb całkowitych. Ciąg (a_n) jest oczywiście malejący i zbieżny do zera. Aby stwierdzić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nt$$

jest ograniczony dla każdego $t \in R$ różnego od $(2k+1)\pi$ $(k \in Z)$ uzasadnimy najpierw bardzo przydatny wzór

$$\cos(a+x) + \cos(a+2x) + \ldots + \cos(a+nx) = \frac{\sin n\frac{x}{2}\cos\left[a+(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{3.12}$$

gdzie $a \in R$, $2k\pi \neq x \in R$ $(k \in Z)$ oraz $n \in N$.

Dla dowodu wzoru (3.12) połóżmy $A_n := \cos(a+x)+\cos(a+2x)+\ldots+\cos(a+nx)$, gdzie $(n \in N)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
2A_n\sin\frac{x}{2} &= \sum_{p=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(a+px) = \\
&= \sum_{p=1}^{n}\left\{\sin\left[a+(2p+1)\frac{x}{2}\right] - \sin\left[a+(2p-1)\frac{x}{2}\right]\right\} = \\
&= \sin\left[a+(2p+1)\frac{x}{2}\right] - \sin\left(a+\frac{x}{2}\right) = \\
&= 2\sin n\frac{x}{2}\cos\left[a+(n+1)\frac{x}{2}\right],
\end{aligned}$$

a stąd już natychmiast wynika równość (3.12).

Dodajmy jeszcze, że wzór (3.12) można też stosować, gdy $x = 2k\pi$ $(k \in Z)$ pod warunkiem, że przyjmiemy umowę, iż w tym przypadku wartość ilorazu po prawej stronie (3.12) jest równa jego granicy, gdy $x \to 2k\pi$, tj. $n\cos a$.

Jeśli teraz we wzorze (3.12) położymy $a = \pi$ oraz $x = \pi + t$ $(t \neq (2k+1)\pi$, $k \in Z)$, to otrzymamy

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\cos pt = \frac{1}{2} - (-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{2}t}{2\cos\frac{t}{2}} \quad (n \in N,\ t \neq (2k+1)\pi). \tag{3.13}$$

Dlatego też

$$\left|\sum_{p=1}^{n} f_p(t)\right| = \left|\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1}\cos pt\right| = \left|\frac{1}{2} - (-1)^n \frac{\cos\frac{2n+1}{2}t}{2\cos\frac{t}{2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos\frac{t}{2}}\right| \quad (n \in N,\ t \neq (2k+1)\pi)$$

co oznacza, że w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ szereg $f_1(t) + f_2(t) + \ldots$ jest ograniczony i to dla każdego $t \in R$ różnego od $(2k+1)\pi$ $(k \in Z)$.

Wobec tego spełnione są wszystkie założenia kryterium Dirichleta (twierdzenie 3.4) i szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cos nt$$

jest zbieżny dla każdego $t \in R$ różnego od $(2k+1)\pi$ $(k \in Z)$.

Podkreślmy też, że szereg rozważany w tym przykładzie nie zawsze jest szeregiem naprzemiennym.

3.6. Rozważmy teraz szeregi postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt,$$

gdzie (a_n) jest jakimkolwiek ciągiem monotonicznym liczb rzeczywistych mającym granicę równą zero, t zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od $2k\pi$ $(k \in Z)$.

Kładąc we wzorze (3.12) $a = 0$ i $x = t$ oraz $a = \frac{\pi}{2}$ i $x = t$, otrzymujemy:

$$\sum_{p=1}^{n} \cos nt = \frac{\sin n\frac{t}{2}\cos(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \tag{3.14}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \sin nt = \frac{\sin n\frac{t}{2}\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \tag{3.15}$$

$(n \in N,\ t \in R,\ t \neq 2k\pi\ (k \in Z))$.

Stąd wynika, że obie powyższe sumy są ograniczone co do wartości bezwzględnej przez liczbę $\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ (dla każdego $n \in N$ oraz dla każdego $t \in R$ takiego, że $t \neq 2k\pi$ $(k \in Z)$). Wobec tego szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt,$$

są ograniczone w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ dla każdego $t \in R$, $t \neq 2k\pi$ $(k \in Z)$. Dlatego też na podstawie kryterium Dirichleta (twierdzenie 3.4) wnioskujemy, że oba szeregi rozważane w tym przykładzie są zbieżne w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i to dla każdego $t \in R$ różnego od $2k\pi$ $(k \in Z)$.

Dodajmy, że w tym przypadku szereg $a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + \ldots$ jest zbieżny również wówczas, gdy $t = 2k\pi$ dla pewnego $k \in Z$ (dlaczego?).

Z powyższych rozważań wynika natychmiast, że szereg rozważany w poprzednim przykładzie jest zbieżny (przykład 3.6 uogólnia więc wynik z przykładu 3.5). Poza tym zbieżne są na przykład szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin nt, \ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \sin nt, \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{2^n}{n!} \right) \sin nt, \text{ itp.}$$

3.7. Każdy szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^a},$$

gdzie (d_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych, a zaś jest liczbą rzeczywistą, nazywamy ***szeregiem Dirichleta***.

Jeżeli s jest ustaloną liczbą rzeczywistą, to każdy szereg Dirichleta możemy zapisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-s}} \frac{d_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad (a \in R),$$

gdzie $a_n := \frac{1}{n^{a-s}}$ oraz $x_n := \frac{d_n}{n^s}$ $(n \in N)$. Ponadto, ciąg (a_n) jest malejący i ma granicę równą 0 dla każdej liczby $a > s$, a wobec tego jest on monotoniczny i ograniczony dla każdego $a > s$.

Stąd oraz z kryterium Abela (twierdzenie 3.3) wynika, że *jeśli szereg Dirichleta jest zbieżny w punkcie* $a = s$ (tzn. jeśli jest zbieżny szereg $\sum\limits_{n \in N} \frac{d_n}{n^s} = \sum\limits_{n \in N} x_n$), *to jest on również zbieżny dla każdej wartości* $a > s$.

Podkreślmy, iż istnieją szeregi Dirichleta, które są zbieżne dla każdej liczby $a \in R$. Mówimy wówczas, że taki ***szereg*** jest ***stale zbieżny*** lub, że jest on ***wszędzie zbieżny***. Na przykład, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^a}$$

jest zbieżny dla każdego $a \in R$, o czym można się łatwo przekonać stosując kryterium Cauchy'ego (twierdzenie 2.15).

Istnieją też szeregi Dirichleta, które nie są zbieżne dla żadnego $a \in R$. Mówimy wówczas, że taki ***szereg*** nie jest ***nigdzie zbieżny*** lub też, że jest on ***stale rozbieżny***. Prostym przykładem szeregu Dirichleta stale rozbieżnego jest szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^a} \quad (a \in R).$$

Powyższe rozważania uzasadniają sformułowanie następującej własności szeregów Dirichleta: *dla każdego szeregu Dirichleta istnieje element* $\lambda \in \bar{R}$ ($\bar{R}$ oznacza tutaj rozszerzoną oś rzeczywistą, tj. $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$) *taki, że szereg ten jest zbieżny dla każdego* $a > \lambda$ *i rozbieżny dla każdego* $a < \lambda$.

Na przykład, dla szeregu harmonicznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad (a \in R)$$

(zobacz przykład 2.10), który też jest szeregiem Dirichleta, mamy: $\lambda = 1$. Dla szeregów Dirichleta, które są wszędzie zbieżne λ jest równe $-\infty$, a dla tych, które są wszędzie rozbieżne: $\lambda = +\infty$.

3.8. Aby stwierdzić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right) \quad (a \in R)$$

jest szeregiem naprzemiennym wystarczy zauważyć, że

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = (-1)^n \sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\right] =$$
$$= (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2} - n} = (-1)^n a_n \quad (n \in N)$$

oraz, że prawie wszystkie wyrazy ciągu

$$(a_n) = \left(\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2} - n}\right) \quad (a \in R)$$

są nieujemne. Poza tym, ciąg (a_n) jest nierosnący (począwszy od dostatecznie dużego wskaźnika $n \in N$) i ma granicę równą 0 dla każdej liczby rzeczywistej a.

Stąd oraz z kryterium Leibniza (twierdzenie 3.5) wynika, że rozważany szereg jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i to dla każdego $a \in R$.

3.9. Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$$

i zauważmy, że

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left[\pi\left(\frac{n^2}{n+1} - n\right)\right] = (-1)^n \cos\frac{-\pi n}{n+1} =$$
$$= (-1)^n \cos\frac{\pi n}{n+1} \quad (n \in N).$$

Wobec tego,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{n+1} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x_n,$$

gdzie ciąg $(a_n) = \left(\cos \frac{\pi n}{n+1}\right)$ $(2 \leqslant n \in N)$ jest monotoniczny i ograniczony, zaś szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} = \sum_{n=2}^{\infty} x_n$$

jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza (twierdzenie 3.5).

Teraz wystarczy już tylko skorzystać z kryterium Abela, aby stwierdzić, że zadany szereg jest zbieżny.

3.10. Zbadajmy jeszcze zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sin nt,$$

gdzie t jest liczbą rzeczywistą.

Kładąc

$$a_n := \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \quad \text{oraz} \quad s_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n \in N),$$

nietrudno zauważyć, że

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{ns_n + \frac{n}{n+1}}{ns_n + s_n} \leqslant 1$$

dla każdego $n \in N$, bowiem $\frac{n}{n+1} \leqslant 1$, zaś $s_n \geqslant 1$ (a więc $s_n \geqslant \frac{n}{n+1}$) dla wszystkich $n \in N$. Wobec tego ciąg (a_n) jest nierosnący.

Aby stwierdzić, że w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ granicą ciągu (a_n) jest liczba 0 sformułujemy i udowodnimy bardzo ciekawe ***twierdzenie o granicy ciągu średnich arytmetycznych***. Twierdzenie to jest przypisywane Cauchy'emu. Dodajmy też, iż ma ono wiele interesujących i często zaskakujących zastosowań.

TWIERDZENIE 3.7. (o granicy ciągu średnich arytmetycznych). *Niech* $(\mathbb{C}, |\,|)$ *będzie przestrzenią unormowaną, gdzie* $\mathbb{C}$ *oznacza przestrzeń wektorową liczb zespolonych nad ciałem liczb zespolonych* $\mathbf{C} = (C, +, \cdot)$ (zobacz uwagi 1.4 i 1.5). *Wówczas*

$$[\{z_n\}_{n \in N} \subset C,\ z_n \to g \in C \text{ w przestrzeni } (\mathbb{C}, |\,|)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\frac{1}{n}(z_1 + \ldots + z_n) \to g \text{ w przestrzeni } (\mathbb{C}, |\,|)\right].$$

Dowód

Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Ponieważ $z_n \to g$, więc istnieje wskaźnik $n_0 \in N$ taki, że

$$|z_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > n_0 \ (n \in N).$$

Zatem, dla $n > n_0$, spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} - g\right| &= \frac{|(z_1 - g) + \ldots + (z_n - g)|}{n} < \\ &< \frac{|(z_1 - g) + \ldots + (z_{n_0} - g)|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n - n_0}{n} < \\ &< \frac{|(z_1 - g) + \ldots + (z_{n_0} - g)|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ale $\frac{1}{n} \to 0$, więc istnieje $n_1 \in N$ takie, że

$$\frac{1}{n} < \varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|(z_1 - g) + \ldots + (z_{n_0} - g)| + 1} \quad \text{dla } n > n_1 \ (n \in N).$$

Wobec tego dla $n > \max(n_0, n_1)$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{z_1 + \ldots + z_n}{n} - g\right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|(z_1 - g) + \ldots + (z_{n_0} - g)|}{|(z_1 - g) + \ldots + (z_{n_0} - g)| + 1} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

co kończy dowód, bo ε było dowolną liczbą dodatnią. ■

Teraz korzystamy z twierdzenia 3.7 i bez trudu stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Zauważmy jeszcze, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt$$

jest dla każdego $t \in R$ szeregiem ograniczonym (zobacz przykład 3.6).
Z powyższych ustaleń wynika, że szereg rozważany w tym przykładzie jest zbieżny i to dla każdego $t \in R$ (zobacz kryterium Dirichleta).

Uzupełniając w pewnym sensie twierdzenie 3.7, czynimy jeszcze dwie uwagi.

Uwaga 3.7. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3.7 nie jest prawdziwe. Na przykład,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \to 0,$$

ale ciąg $(z_n)_{n\in N} := \left((-1)^n\right)_{n\in N}$ nie jest zbieżny.

Uwaga 3.8. Można wykazać, że jeśli $|z_n| \to +\infty$, to

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i| \to +\infty.$$

Uzasadnienie tego stwierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi.

Ćwiczenia

3.1. Korzystając z kryterium Dirichleta (twierdzenie 3.4), udowodnić kryterium Abela (twierdzenie 3.3).

3.2. Pokazać, że jeśli (a_n) i (x_n) są ciągami rzeczywistymi oraz:

($*$) szereg $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots$ jest zbieżny; $a_n \to 0$, gdy $n \to \infty$ oraz szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest ograniczony lub

($**$) szeregi $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots$ i $x_1 + x_2 + \ldots$ są zbieżne,

to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n$$

jest zbieżny dla każdej liczby naturalnej k (wszystko w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).

3.3. Niech (a_n) będzie ciągiem nierosnącym liczb dodatnich. Pokazać, że:

1° jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g < \frac{1}{2}$, to szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$;

2° jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = G$, gdzie $G > \frac{1}{2}$ lub $G = +\infty$, to szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Rozwiązania ćwiczeń

3.1. Załóżmy, że są spełnione założenia kryterium Abela, tzn. że ciąg rzeczywisty (a_n) jest monotoniczny i ograniczony, zaś szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. Wówczas ciąg (a_n) jest monotoniczny i zbieżny (dlaczego?), np. do liczby $g \in R$, która wprawdzie nie musi być równa 0, ale ciąg $(a_n - g)$ z pewnością jest monotoniczny i zbieżny do 0. Poza tym, szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest ograniczony w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, gdyż jest on w tej przestrzeni zbieżny. Korzystając więc z kryterium Dirichleta stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n\in N}(a_n - g)x_n$$

jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$. Oprócz tego, w tej samej przestrzeni zbieżny jest również szereg

$$\sum_{n\in N} gx_n = g \sum_{n\in N} x_n$$

i dlatego w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n\in N} a_n x_n = \sum_{n\in N} (a_n - g)x_n + g \sum_{n\in N} x_n$$

(zobacz twierdzenie 1.3).

3.2. Załóżmy, że są spełnione założenia $(*)$. Wówczas z twierdzenia Dirichleta wynika, że szereg $a_1x_1+a_2x_2+\ldots$ jest zbieżny. Znaczy to, że w tym przypadku twierdzenie sformułowane w ćwiczeniu jest słuszne dla $k = 1$. Załóżmy, że wspomniane twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej p, tzn. że jest spełnione założenie $(*)$ i szereg $a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots$ jest zbieżny. Ze zbieżności szeregu $a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \ldots$ wynika jego ograniczoność. Teraz stosujemy twierdzenie Dirichleta (rolę x_n spełnia tym razem $a_n^p x_n$) i otrzymujemy, że szereg $a_1^{p+1} x_1 + a_2^{p+1} x_2 + \ldots$ jest zbieżny. Zgodnie więc z zasadą indukcji matematycznej (względem k) stwierdzamy, że twierdzenie sformułowanie w ćwiczeniu jest słuszne, gdy jest spełnione założenie $(*)$.

Jeśli założymy, iż jest spełniony warunek $(**)$, to rozumujemy podobnie, z tym jednak, że zamiast twierdzenia Dirichleta stosujemy twierdzenie Abela.

3.3. **Ad 1°**. Zauważmy, że jeśli ciąg rzeczywisty (r_n) ma granicę właściwą (tzn. jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \in R$) oraz ciąg $\left(\frac{r_{2n}}{r_n}\right)$ nie jest zbieżny do 1, to ciąg (r_n) musi mieć granicę równą 0, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_{2n}}{r_n} = 1.$$

W tym ćwiczeniu zakłada się, że (a_n) jest ciągiem nierosnącym o wyrazach dodatnich. Wobec tego (a_n) jest ciągiem monotonicznym i ograniczonym, gdyż $0 < a_n \leqslant a_1$ dla każdego $n \in N$. Z tego powodu ciąg (a_n) ma granicę właściwą, która z pewnością należy do przedziału $[0, a_1]$. Ponadto, na mocy założenia,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g < \frac{1}{2} \tag{a}$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{ar_n} \neq 1.$$

Teraz korzystamy z wcześniejszego spostrzeżenia i bez trudu stwierdzamy, że $a_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Poza tym (a_n) jest ciągiem nierosnącym liczb dodatnich i dlatego szereg naprzemienny postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

jest zbieżny, np. do liczby s (zobacz twierdzenie 3.5). Ponadto

$$s_{2n} := a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} \leqslant s \quad \text{dla każdego } n \in N \tag{b}$$

(zobacz dowód twierdzenia 3.6).
Niech teraz ε_0 będzie dowolną liczbą dodatnią taką, że $q := g + \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ (zobacz założenie (a)). Wówczas, zgodnie z definicją granicy ciągu, nierówność

$$\left| \frac{a_{2n}}{a_n} - g \right| < \varepsilon_0$$

jest spełniona dla prawie wszystkich $n \in N$. Wobec tego,

$$\frac{a_{2n}}{a_n} < g + \varepsilon_0 = q < \frac{1}{2}, \quad \text{czyli } a_{2n} < q a_n \left(q < \frac{1}{2} \right) \tag{c}$$

dla prawie wszystkich $n \in N$. Wiemy jednak, że zmiana skończonej liczby wyrazów szeregu nie ma wpływu na jego zbieżność (twierdzenie 2.1), więc nie zmniejszając ogólności rozumowania możemy przyjąć, że nierówność (c) jest spełniona dla każdego $n \in N$.
Ale

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} = \\ &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} - 2(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) \quad (n \in N). \end{aligned}$$

Dlatego też, jeśli $p_n := a_1 + \ldots + a_n$ dla $n \in N$, to

$$\begin{aligned} s \geqslant s_{2n} &= p_{2n} - 2(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) \geqslant p_n - 2(a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}) \geqslant \\ &\geqslant p_n - q p_n = (1 - q) p_n \end{aligned}$$

(zobacz (b) oraz (c)).
W rezultacie,

$$p_n \leqslant \frac{s}{1 - 2q} \quad \text{dla każdego } n \in N,$$

gdyż $0 < q < \frac{1}{2}$. To zaś oznacza, że sumy cząstkowe ciągu (a_n) są ograniczone z góry, co jest równoważne zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ (zobacz twierdzenie 1.4).
Ad 2°. Proste rozumowanie, które pomijamy, prowadzi do wniosku, iż z założenia

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = G, \quad \text{gdzie } G > \frac{1}{2} \text{ lub } G = +\infty,$$

wynika, że

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{lub inaczej, że } 2a_{2n} \geqslant a_n \tag{d}$$

dla prawie wszystkich $n \in N$. Ponieważ zmiana skończonej liczby wyrazów szeregu nie ma wpływu na jego zbieżność (twierdzenie 2.1), więc bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że nierówność (d) jest spełniona dla wszystkich liczb naturalnych.

Zauważmy teraz, że

$$
\begin{aligned}
p_{2n} &:= a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \geqslant \\
&\geqslant a_1 + a_2 + 2\sum_{k=2}^{n} a_{2k} \geqslant a_1 + a_2 + \sum_{k=2}^{n} a_k = \\
&= a_2 + \sum_{k=1}^{n} a_k = a_2 + p_n \quad (1 < n \in N),
\end{aligned}
$$

bo (a_n) jest ciągiem nierosnącym oraz spełnione są nierówności (d).

Wobec tego przypuszczenie, że szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny i ma sumę równą $p \in R$ prowadzi do wniosku, iż

$$
\lim_{n\to\infty} p_{2n} \geqslant a_2 + \lim_{n\to\infty} p_n, \quad \text{czyli } p \geqslant a_2 + p,
$$

co jest sprzeczne z założeniem, że wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

Zadania

Zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych:

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \sin(n\frac{\pi}{4})$

3.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}} \sin nx \;\; (x \in R)$

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!(n^2+\ln n)}$

3.4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ln^{1+a} n} \;\; (a > 0)$

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n \sin n^2$

3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)^2 - \ln^n(n+1)}$

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin nt] \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \;\; (t \in R)$

3.8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^{n^2}}{n!} \qquad (a>0)$

3.10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n} n\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

3.11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$

3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^2 n}{n}$

3.16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Odpowiedzi, wskazówki i rozwiązania zadań

3.1. Połóżmy $a_n := \frac{\ln n}{n}$ oraz $x_n := \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ $(n \in N)$. Wówczas, począwszy od trzeciego wyrazu, ciąg (a_n) jest malejący i jego granicą jest liczba 0 (bo $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ oraz $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}(1-\ln x) < 0$ dla $x > e$), szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zaś ograniczony, gdyż

$$\left|\sum_{p=1}^{n}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\frac{\sin n\frac{\pi}{8}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{8}\right]}{\sin\frac{\pi}{8}}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} \quad \text{dla } n \in N$$

(zobacz wzór (3.15)).

Stąd oraz z kryterium Dirichleta (twierdzenie 3.4) wynika, że zadany szereg jest zbieżny.

3.2. Ponieważ ciąg $(a_n) := \left(\frac{1}{n\sqrt{\ln(n+1)}}\right)$ jest monotoniczny i zbieżny do 0, szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$$

zaś jest ograniczony dla każdego $x \in R$ (zobacz przykład 3.6), więc na podstawie kryterium Dirichleta zadany szereg jest zbieżny dla każdego $x \in R$.

3.3. Niech $a_n := \frac{1}{n^2+\ln n}$ dla $n \in N$. Wówczas $a_n \to 0$, gdy $n \to \infty$ oraz

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + \ln(n+1)} < \frac{1}{n^2 + \ln n} \quad (n \in N),$$

a więc ciąg (a_n) jest malejący. Poza tym,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{p-1}{p!} = \sum_{p=1}^{n} \left[\frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!}\right] = 1 - \frac{1}{n!} < 1 \quad (n \in N),$$

co oznacza, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$$

jest ograniczony.

Stąd na mocy kryterium Dirichleta wnosimy, że zadany szereg jest zbieżny.

3.4. Ponieważ dla każdego $a > 0$ ciąg $(a_n) := \left(\frac{1}{\ln^{1+a} n}\right)$ jest malejący i zbieżny do 0 oraz

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \quad (n \in N),$$

więc zadany szereg jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta.

3.5. Zauważmy, że

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k \sin k^2\right| = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} [\cos k(k-1) - \cos k(k+1)]\right| = $$
$$= \frac{1}{2}\left|1 - \cos n(n+1)\right| \leqslant 1$$

dla każdego $n \in N$. Ponadto ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i zbieżny do 0. Wobec tego, na mocy kryterium Dirichleta, zadany szereg jest zbieżny.

3.6. Zauważmy, że

$$\frac{1}{\ln^n(n+1)^2 - \ln^n(n+1)} = \frac{1}{2^n \ln^n(n+1) - 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln^n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{2^n \ln^n(n+1)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]} =$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \frac{1}{\ln^n(n+1)} \quad (n \in N).$$

A zatem,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)^2 - \ln^n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Ciąg $(a_n) := \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)$ jest malejący i zbieżny do 0 (a więc ograniczony!), zaś szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

jest zbieżny na mocy kryterium Cauchy'ego (twierdzenie 2.15). Stąd oraz z kryterium Abela (twierdzenie 3.3) wynika, że zadany szereg jest zbieżny.

3.7. Ciąg $(a_n) := \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny i ma granicę równą 0. Poza tym,

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \in N),$$

bo jak wynika z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej $\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \frac{1}{1+\Theta^2}(x-y)$, a więc $|\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y| \leqslant |x-y|$ dla x, $y \in R$. Ponadto wiemy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

jest zbieżny (przykład 1.3) i wobec tego, na mocy kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14), zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n+1}\right|.$$

Zauważmy jeszcze, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt \quad (t \in R)$$

są ograniczone (zobacz przykład 3.6). Wobec tego zbieżne są też szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nt \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \quad (t \in R)$$

(zobacz twierdzenie 3.2), a stąd wynika zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + \sin nt] \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n} \quad (t \in R)$$

(zobacz twierdzenie 1.3).

3.8. Ciąg $(a_n) := \left(\frac{1}{n - \ln n}\right)$ $(2 \leqslant n \in N)$ jest malejący, gdyż $\left(\frac{1}{x - \ln x}\right)' < 0$ dla $x > 1$. Poza tym,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \frac{e^n}{n}} = 0.$$

Zadany szereg jest więc zbieżny na mocy kryterium Leibniza (twierdzenie 3.5).

3.9. Ponieważ $a^n > n$ dla każdego $n \in N$ $(a > 1)$, więc

$$a^{n^2} = (a^n)^n > n^n > n! \quad \text{dla } n \in N.$$

Wobec tego, $\frac{a^{n^2}}{n!} > 1$ dla każdego $n \in N$ $(a > 1)$. W tym przypadku granicą ciągu $\left(\frac{a^{n^2}}{n!}\right)$ nie może więc być liczba 0, a zatem zadany szereg jest rozbieżny (zobacz twierdzenie 2.2, wzór (2.3)).

3.10. W tym przypadku $n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < 0$ dla każdego $n \geqslant 2$ i z przyczyn czysto formalnych nie można stosować kryterium Leibniza (twierdzenie 3.5). Trudność ta jest jednak tylko pozorna, gdyż wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[-n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

i stwierdzić, że tym razem $(a_n) := \left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right)$ jest już ciągiem liczb dodatnich, który ponadto jest malejący (dlaczego?). Co więcej, na mocy reguły de l'Hospitala stwierdzamy, że

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^4} \cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{x^2(x^2-1)} = 0.$$

Dlatego też

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left[-n \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right] = 0.$$

Wobec tego zadany szereg jest zbieżny na podstawie kryterium Leibniza.

3.11. Tym razem,

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

i $(a_n) := \left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ jest ciągiem malejącym liczb dodatnich. Zadany szereg jest jednak rozbieżny, gdyż

$$\lim_{n \to \infty} \left[-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 1$$

(dlaczego?) i wobec tego nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

3.12. Ciąg $(a_n) := \left(\frac{3^n}{n!}\right)$ jest dodatni (oczywiste) i malejący, bo $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{3}{n+1} \leqslant a_n$ dla $n > 2$. Poza tym,

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \underbrace{\frac{3 \cdot 3 \cdots 3}{4 \cdot 5 \cdots (n-1)}}_{\leqslant 1} \cdot \frac{3}{n} \leqslant \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{dla } n \geqslant 3$$

i jak wynika z twierdzenia o trzech ciągach: $a_n \to 0$, gdy $n \to \infty$. Stąd, na mocy kryterium Leibniza, zadany szereg jest zbieżny.

3.13. Zauważmy, że dla każdego $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ spełniona jest nierówność: $\sin x > \frac{2}{\pi} x$, którą krótko można uzasadnić następująco

$$\left[\bigwedge_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]} [f(x)]' = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\bigwedge_{x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\sin x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\right].$$

Jeśli więc położymy $a_n := \frac{n}{2}(1 - \cos \frac{2}{n}) = n \sin^2 \frac{1}{n}$ $(n \in N)$, to

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \sin^2 \frac{1}{n+1}}{n \sin^2 \frac{1}{n}} \leqslant \frac{(n+1) \frac{1}{(n+1)^2}}{n \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{1}{n^2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{n}{n+1} < 1 \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Ciąg (a_n) jest więc malejący (począwszy od $n = 2$). Ponadto,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} n \sin^2 \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

Stąd, na mocy kryterium Leibniza (twierdzenie 3.5), zadany szereg jest zbieżny.

3.14. Z kryterium Leibniza wynika, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny. Szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest zaś rozbieżny (przykład 1.2) i wobec tego zadany szereg jest rozbieżny (dlaczego?).

3.15. Zadany szereg jest wprawdzie szeregiem naprzemiennym, ale ciąg $\left(\frac{\sin^2 n}{n}\right)$ nie jest monotoniczny i bezpośrednie zastosowanie kryterium Leibniza jest niemożliwe (zobacz przykład 3.2). Zauważmy jednak, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}(1-\cos 2n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}(-1)^n\cos 2n\right]$$

oraz, że:

1° szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny (zobacz przykład 2.3 lub zastosuj kryterium Leibniza);

2° szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\cos 2n$ jest zbieżny na mocy kryterium Dirichleta, gdyż ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i ma granicę 0, zaś szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos 2n$$

jest ograniczony, bo

$$\left|\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\cos 2p\right| = \left|\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\cos 2p\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2} - (-1)^n\frac{\cos(2n+1)}{2\cos 1}\right| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cos 1} \quad (n \in N)$$

(zobacz wzór (3.13)).

Z powyższych rozważań już łatwo wynika, że zadany szereg jest zbieżny (zobacz twierdzenie 1.3).

3.16. Zauważmy, że

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \quad (2 \leqslant n \in N)$$

oraz, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

jest zbieżny (na mocy kryterium Leibniza), zaś szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (przykład 1.2). Dlatego też zadany szereg jest rozbieżny (dlaczego?)

rozdział II

Specjalne kryteria zbieżności szeregów w przestrzeniach unormowanych

4. Kryteria normowej zbieżności szeregów

TWIERDZENIE 4.1. (kryterium Kummera[11]). *Niech* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *będzie przestrzenią unormowaną i niech* (x_n) *będzie ciągiem o elementach w zbiorze* X*, którego prawie wszystkie wyrazy są niezerowe, tzn.*

$$\bigvee_{k \in N} \bigwedge_{k \leqslant n \in N} \|x_n\| \neq 0. \tag{4.1}$$

Wówczas warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby szereg $x_1 + x_2 + \dots$ *był normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *jest istnienie ciągu liczb rzeczywistych* (a_n) *o tej własności, że* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant k$ $(n \in N)$ *oraz istnienie liczby dodatniej* δ *takiej, że*

$$a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \geqslant \delta \quad dla\ n \geqslant k \ (n \in N). \tag{4.2}$$

DOWÓD

Konieczność. Załóżmy, że szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$, tzn. że jest zbieżny szereg liczbowy $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$. Oznaczmy przez s sumę ostatniego szeregu $(s \in R_+)$ i połóżmy

$$a_n := \frac{s - s_n}{\|x_n\|} \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N)$$

(zobacz (4.1)), gdzie

$$s_n = \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \quad \text{dla } n \in N. \tag{4.3}$$

Wówczas (a_n) jest ciągiem liczb rzeczywistych i to takim, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant k$ (dlaczego?). Poza tym,

$$a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{\|x_{n+1}\|} = 1 \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N),$$

co oznacza, że jest spełniony warunek (4.2).

[11] **Ernst Eduard Kummer** (29.01.1810–14.05.1893) – matematyk niemiecki, twórca teorii liczb algebraicznych, której metody miały istotny wpływ na znaczny rozwój teorii liczb oraz algebry (w tej dziedzinie znane są tzw. rozszerzenia Kummera). Badania nad podzielnością liczb doprowadziły go do określenia tzw. liczb idealnych, za pomocą których udowodnił wielkie twierdzenie Fermata dla $n \leqslant 100$. Za to ostatnie osiągnięcie otrzymał prestiżową nagrodę Paryskiej Akademii Nauk. Pierwsze prace Kummera były poświęcone teorii szeregów (przekształcenie i kryterium Kummera). Pisał też na temat geometrii, całki oznaczonej oraz mechaniki teoretycznej.

Wystarczalność. Zakładamy, że jest spełniony warunek (4.2), z którego wynika, że

$$\delta \, \|x_{n+1}\| \leqslant a_n \, \|x_n\| - a_{n+1} \, \|x_{n+1}\| \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

Wobec tego,

$$\begin{aligned}
&\delta \, \|x_{k+1}\| \leqslant a_k \, \|x_k\| - a_{k+1} \, \|x_{k+1}\| \, , \\
&\delta \, \|x_{k+2}\| \leqslant a_{k+1} \, \|x_{k+1}\| - a_{k+2} \, \|x_{k+2}\| \, , \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\
&\delta \, \|x_n\| \leqslant a_{n-1} \, \|x_{n-1}\| - a_n \, \|x_n\| \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).
\end{aligned}$$

Dodając te nierówności stronami i korzystając z założenia, że $a_n > 0$ dla $n \geqslant k$, otrzymujemy

$$\delta(s_n - s_k) \leqslant a_k \, \|x_k\| - a_n \, \|x_n\| \leqslant a_k \, \|x_k\| \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

A zatem,

$$s_n \leqslant s_k + \frac{a_k}{\delta} \cdot \|x_k\| \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N)$$

(δ jest liczbą dodatnią!), co dowodzi, że (s_n) jest ciągiem ograniczonym z góry. Poza tym, (s_n) jest ciągiem niemalejącym (dlaczego?). Wobec tego, (s_n) jest ciągiem zbieżnym (bo jest to ciąg rzeczywisty, niemalejący i ograniczony z góry), co należało pokazać. ■

Uwaga 4.1. Jeżeli w twierdzeniu 4.1 przyjmiemy, że $(\mathbf{X}, \| \, \|) = (\mathbb{R}, | \, |)$, to otrzymamy kryterium bezwględnej zbieżności szeregów liczbowych w przestrzeni $(\mathbb{R}, | \, |)$. Jeżeli ponadto założymy, że ciąg $(x_n) \in c(R)$ ma prawie wszystkie wyrazy dodatnie, to otrzymamy warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Uwaga 4.2. Kryterium Kummera jest bardzo ogólnym warunkiem koniecznym i wystarczającym normowej zbieżności szeregów w przestrzeniach unormowanych. Ma ono też duże znaczenie teoretyczne w ogólnej teorii szeregów. W szczególności, wynika z niego natychmiast nieskończona liczba różnorakich warunków wystarczających normowej zbieżności szeregów. Rzeczywiście, jeśli zamiast (a_n) podstawimy dowolny, lecz konkretny ciąg liczbowy mający wyrazy dodatnie, np. dla wszystkich wskaźników $n \geqslant k$ $(n \in N)$, to spełnienie dla tak obranego ciągu (a_n) nierówności (4.2) będzie jednym z możliwych warunków wystarczających normowej zbieżności szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$.

Uwaga 4.3. Kryterium Kummera nie jest łatwo zastosować do badania normowej zbieżności względnie normowej rozbieżności konkretnego szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$, bowiem nie jest prostą sprawą wskazanie takiego ciągu liczbowego (a_n), który spełnia warunek (4.2) lub też wykazanie, iż nie może on być spełniony dla żadnego ciągu rzeczywistego (a_n) o prawie wszystkich wyrazach dodatnich (dlaczego trzeba coś takiego wykazać, aby dowieść normowej rozbieżności szeregu $x_1 + x_2 + \dots$?). Sygnalizowana trudność zastosowania kryterium Kummera w konkretnych zadaniach wynika m.in. z faktu, że w jego sformułowaniu ciąg (a_n) nie jest wskazany *explicite* i co gorsze jest on poprzedzony jedynie małym kwantyfikatorem, tzn. mało precyzyjnym słowem: istnieje.

Twierdzenie 4.1 można sformułować w tzw. wersji limesowej, która często jest łatwiejsza w zastosowaniu do konkretnych szeregów $x_1 + x_2 + \dots$ oraz wybranych ciągów (a_n).

TWIERDZENIE 4.2. (kryterium Kummera w wersji limesowej). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X*, którego prawie wszystkie wyrazy są niezerowe* (zobacz (4.1))*, to szereg* $x_1 + x_2 + \dots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg* (a_n) *o tej własności, że* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant k$ $(n \in N)$ *i taki, że*

$$\liminf_n \left(a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \right) = +\infty \quad \textit{lub} \quad \liminf_n \left(a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \right) > 0. \qquad (4.4)$$

DOWÓD

Konieczność. Zakładamy, że szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(X; \| \, \|)$, tzn. że jest zbieżny szereg liczbowy $\|x_1\| + \|x_2\| + \dots$ i dalej postępujemy tak samo jak w pierwszej części dowodu twierdzenia 4.1, tzn. oznaczamy przez s sumę ostatniego szeregu $(s \in R_+)$ i kładziemy

$$a_n := \frac{s - s_n}{\|x_n\|} \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N)$$

(zobacz (4.1)), gdzie

$$s_n = \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \quad \text{dla } n \in N. \qquad (4.5)$$

Bez trudu stwierdzamy, że tak określony ciąg (a_n) ma tę własność, że

$$a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{\|x_{n+1}\|} = 1 \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N),$$

co oznacza, że jest spełniony warunek (4.4).

Wystarczalność. Zakładamy, że jest spełniony warunek (4.4). Jeżeli

$$\liminf_n \left(a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \right) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-a_{n+1}\right)=+\infty$$

i wobec tego

$$\bigwedge_{\delta>0}\bigvee_{k\in N}\bigwedge_{k\leqslant n\in N} a_n\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-a_{n+1}\geqslant\delta.$$

Stąd zaś wynika, że jest spełniony warunek (4.2), a więc zgodnie z twierdzeniem 4.1 szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X},\|\,\|)$.

Natomiast, jeżeli

$$\liminf_n\left(a_n\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-a_{n+1}\right)>0,$$

to istnieje liczba dodatnia g taka, że

$$\liminf_n\left(a_n\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-a_{n+1}\right)=g.$$

Teraz korzystamy z faktu, że jeśli $(p_n)\in c(R)$, to

$$\left(\liminf_n p_n=g\in R\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\left(\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{k\in N}\bigwedge_{k\leqslant n\in N} g-\varepsilon<p_n\right)\wedge\left(\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigwedge_{n\in N}\bigvee_{n<m\in N} p_m<g+\varepsilon\right)\right]$$

(zobacz (2.14)).

Wobec tego, wybierając liczbę $\varepsilon>0$ tak, aby $\delta:=g-\varepsilon>0$ (taka liczba ε istnieje, bowiem g jest z założenia liczbą dodatnią), otrzymujemy, że istnieje $k\in N$ takie, że

$$0<\delta<a_n\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-a_{n+1}\quad \text{dla } n\geqslant k\ (n\in N).$$

To zaś oznacza, że jest spełniony warunek (4.2), a więc na mocy twierdzenia 4.1, szereg $x_1+x_2+\ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X},\|\,\|)$. ■

Jest oczywiste, że uwagi 4.1, 4.2 i 4.3 dotyczące twierdzenia 4.1, bez istotnych zmian, odnoszą się również do twierdzenia 4.2.

Teraz podamy przykłady zastosowań twierdzeń 4.1 i 4.2 w konkretnych zadaniach, mając nadzieję, iż wyjaśnią one również sens wcześniejszych uwag.

Przykłady

4.1. W przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ rozważmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}}.$$

W tym przypadku,

$$\|x_n\| = |x_n| = x_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+2}}$$

i wobec tego

$$\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} = \frac{n!\, e^n (n+1)^{n+3}}{n^{n+2}(n+1)!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} \qquad (n \in N).$$

Położmy teraz $(a_n) := (n^2)$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} &= n^2 \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} - (n+1)^2 = \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - 1\right] < 0 \quad \text{dla } n \in N, \end{aligned}$$

bo ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest silnie rosnący i ma granicę e, a więc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ dla każdego $n \in N$.

Stąd wynika, że w tym przypadku, tj. dla ciągu $(a_n) := (n^2)$, warunek (4.2) nie jest spełniony. Z tego faktu nie można jednak wyciągać żadnych wniosków dotyczących zbieżności (normowej) lub rozbieżności (normowej) rozważanego szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$, bowiem nie oznacza to, że dla innego ciągu (a_n) nierówności (4.2) nie będą spełnione.

Położmy teraz $(a_n) := (n)$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} &= n \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} - (n+1) = \\ &= (n+1)\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right] \geqslant \\ &\geqslant 2\left[\frac{1}{e}(1+1)^{1+1} - 1\right] = 2\left[\frac{4}{e} - 1\right] := \delta > 0 \end{aligned}$$

dla każdego $n \in N$, bowiem tym razem ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ jest silnie malejący, a więc $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) \geqslant (1+1)^{1+1} = 4$ dla każdego $n \in N$.

Oznacza to, że tym razem, tzn. dla ciągu $(a_n) := (n)$, warunek (4.2) jest spełniony i wobec tego, na mocy kryterium Kummera, zadany szereg jest zbieżny.

Dodajmy jednak, iż zbieżności rozpatrywanego szeregu nie można uzasadnić, stosując kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.16), bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \cdot \frac{n^{n+2}}{n!e^n} = \lim_{n\to\infty} e\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$= e \lim_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{-1} = e\cdot e^{-1} = 1.$$

4.2. Rozważmy szereg liczb zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := \sum \frac{1}{n}(\cos n + i\sin n)^n.$$

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

więc w przestrzeni $(\mathbb{C}, |\,|)$ zadany szereg jest normowo, a raczej modułowo rozbieżny (przykład 1.2).

Spróbujmy jednak wykazać jego modułową rozbieżność, stosując twierdzenie 4.1. Oznacza to, iż trzeba pokazać, że dla żadnego ciągu rzeczywistego (a_n), mającego prawie wszystkie wyrazy dodatnie, nie może być spełniona nierówność (4.2). W tym celu przypuśćmy, że dla pewnego ciągu (a_n) mającego prawie wszystkie wyrazy dodatnie jest spełniony warunek (4.2). Oznacza to, że istnieje $k \in N$ takie, że

$$a_n \frac{|z_n|}{|z_{n+1}|} - a_{n+1} = a_n \frac{n+1}{n} - a_{n+1} \geqslant \delta > 0 \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

Nie zmniejszając ogólności rozumowania przyjmijmy $k = 1$. Wobec tego,

$$A_n a_n - \delta := \frac{n+1}{n} a_n - \delta \geqslant a_{n+1} \quad \text{dla } n \in N.$$

Stąd zaś wynika, że

$$A_n A_{n-1} \cdots A_1 a_1 - (A_n A_{n-1} \cdots A_2 + A_n A_{n-1} \cdots A_3 +$$
$$+ \cdots + A_n A_{n-1} + A_n + 1) \cdot \delta \geqslant a_{n+1} \quad (n \in N)$$

czyli

$$(n+1)a_1 - \left(\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n-1} + \frac{n+1}{n} + 1\right)\delta =$$
$$= (n+1)\left[a_1 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\delta\right] \geqslant a_{n+1} \quad (n \in N).$$

Wobec tego,

$$a_1 - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \cdot \delta \geqslant \frac{1}{n+1} a_{n+1} \quad \text{dla każdego } n \in N.$$

Ale ciąg $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$ jest silnie rosnący i nieograniczony z góry (zobacz [5], strona 89), δ zaś jest liczbą dodatnią i dlatego dla wszystkich dostatecznie dużych $n \in N$ musi być $a_{n+1} < 0$, co przeczy temu, iż prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

Przykład ten pokazuje jak żmudne może być stosowanie kryterium Kummera, szczególnie wówczas, gdy chcemy uzasadnić normową rozbieżność niewyszukanego szeregu.

4.3. Niech $(f_n(t))_{n\in N}$ będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych wzorami:

$$f_n(t) := \begin{cases} t\left(\dfrac{2}{\sqrt{n+1}} - t\right) & \text{dla } t \in \left[0, \dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\right], \\ 0 & \text{dla } t \in \left[\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}, 1\right] \end{cases} \quad (n \in N)$$

i rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot f_n(t).$$

Ponieważ

$$\|f_n(t)\|_0 := \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = \frac{1}{n+1} \quad \text{dla } n \in N$$

(zobacz (1.5)), więc

$$\|x_n(t)\|_0 := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{1}{n+1} \quad \text{dla } n \in N.$$

Aby zbadać zbieżność rozważanego szeregu funkcyjnego w przestrzeni $(C([0,1]), \| \|_0)$ (zobacz przykład 1.6), połóżmy $(a_n) = (2n+1)$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} a_n \frac{\|x_n(t)\|_0}{\|x_{n+1}(t)\|_0} - a_{n+1} &= (2n+1) \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \\ &\cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)} \cdot (n+2) - (2n+3) = \\ &= \frac{(2n+2)(n+2)}{n+1} - (2n+3) = 1 \quad \text{dla } n \in N. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że jest spełniony warunek (4.2), a zatem na podstawie kryterium Kummera stwierdzamy, że zadany szereg jest normowo zbieżny w przestrzeni $(C([0,1]), \| \|_0)$.

Dodajmy jednak, że tym razem kryterium d'Alemberta również nie rozstrzyga normowej zbieżności rozważanego szeregu, bowiem w tym przypadku

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{n+1}(t)\|_0}{\|x_n(t)\|_0} &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}\cdot\frac{1}{n+2}\cdot\\ &\quad\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cdot(n+1) =\\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{n+1}{n+2}\to 1,\ \text{dla } n\to\infty.\end{aligned}$$

4.4. Szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3$$

ma wszystkie wyrazy dodatnie i badanie jego zbieżności w przestrzeni $(\mathbb{R},|\,|)$ jest równoważne badaniu jego zbieżności normowej (lub raczej bezwzględnej) w tejże przestrzeni. Możemy zatem próbować zastosować kryterium Kummera. Niech więc

$$x_n := \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3 \quad (n\in N).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n+1}} &= \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n_1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3\cdot\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}\right)^3 =\\ &= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 \quad (n\in N).\end{aligned}$$

Jeśli położymy teraz $(a_n) := (2n+1)^3$, to

$$\begin{aligned}a_n\frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} &= (2n+1)^3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 - (2n+3)^3 = (2n+2)^3-(2n+3)^3 =\\ &= -12n^2-30n-19\to-\infty,\quad \text{gdy } n\to\infty.\end{aligned}$$

Dla ciągu $(a_n) = (2n+1)^3$ warunek (4.5) nie jest więc spełniony. Z tego faktu nie możemy jednak wyciągać wniosku o rozbieżności rozważanego szeregu (zobacz przykład 4.1). Ta nieudana próba może jednak stanowić źródło „poprawy" i przyjęcia $(a_n) = (n)$. Wówczas

$$\begin{aligned}a_n\frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} &= n\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 - (n+1) =\\ &= \frac{n+1}{(2n+1)^3}\left[2^3 n(n+1)^2 - (2n+1)^3\right] =\\ &= \frac{(n+1)(4n^2+2n+1)}{(2n+1)^3}\to\frac{1}{2},\quad \text{gdy } n\to\infty,\end{aligned}$$

co oznacza, że tym razem jest spełniony warunek (4.3). Zgodnie więc z twierdzeniem 4.2 zadany szereg jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Uwaga 4.4. Zbieżność szeregów rozpatrywanych w przykładach 4.3 i 4.4 można rozstrzygnąć, korzystając z nierówności

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n_1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad (n \in N),$$

którą otrzymuje się z oczywistych nierówności:

$$A := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{2n} \quad (n \in N).$$

Podane wyżej przykłady pokazują wyraźnie trudności w stosowaniu twierdzeń 4.1 i 4.2 do badania normowej zbieżności, a zwłaszcza normowej rozbieżności wielu szeregów w rozmaitych przestrzeniach unormowanych. Niżej podajemy twierdzenie, które pozwala nieco uprościć rozstrzyganie problemu normowej rozbieżności szeregów w przestrzeniach unormowanych. Dodajmy, iż twierdzenie to jest również związane z nazwiskiem Kummera i bez przesady można je nazwać ***kryterium normowej rozbieżności szeregów***.

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ *jest przestrzenią unormowaną;* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1)); (a_n) *zaś jest ciągiem rzeczywistym takim, że* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant k$ $(n \in N)$ *oraz szereg*

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{a_n} \tag{4.6}$$

jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$, *to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, *gdy*

$$a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \leqslant 0 \quad \textit{dla } n \geqslant k \ (n \in N). \tag{4.7}$$

Dowód

Z nierówności (4.7) wynika, że

$$\|x_{n+1}\| \geqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \|x_n\| \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

Stąd zaś otrzymujemy, że

$$\|x_{n+1}\| \geqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdots \frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \|x_k\| = (a_k \|x_k\|) \frac{1}{a_{n+1}} \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

Teraz wystarczy zastosować kryterium porównawcze (twierdzenie 2.14) i wykorzystać założenie, iż szereg (4.6) jest rozbieżny, aby stwierdzić, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. ■

Uwaga 4.5. W twierdzeniu 4.3 założenie o rozbieżności szeregu (4.6) jest istotne. Rzeczywiście, przyjmując $a_n = n^2$ $(n \in N)$ stwierdzamy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest zbieżny (przykład 1.5). Poza tym, jeśli $x_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N)$, to

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = n^2 \frac{(n+1)^2}{n^2} - (n+1)^2 = 0 \quad \text{dla } (n \in N),$$

co oznacza, że w tym przypadku warunek (4.7) jest spełniony. Niemniej szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

jest zbieżny.

Z twierdzenia 4.3 wynika ciekawy warunek wystarczający rozbieżności szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \|)$, który można sformułować w tzw. wersji limesowej.

Twierdzenie 4.4. *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *jest przestrzenią unormowaną;* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1)); (a_n) *zaś jest ciągiem rzeczywistym takim, że* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant k$ $(n \in N)$ *oraz szereg* (4.6) *jest rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbb{R}, | |)$, *to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$, *gdy*

$$\limsup_n \left(a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \right) = -\infty \quad \textit{lub} \quad \limsup_n \left(a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} \right) < 0. \tag{4.8}$$

Uzasadnienie twierdzenia 4.4, zwanego ***wersją limesową twierdzenia 4.3 o normowej rozbieżności***, pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Uwaga 4.6. Twierdzenia 4.2 i 4.4 są mocniejsze niż kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.16) w tym sensie, że jeśli potrafimy stwierdzić normową zbieżność (rozbieżność) szeregu za pomocą kryterium d'Alemberta, to również potrafimy to zrobić za pomocą twierdzenia 4.2 (twierdzenia 4.4).

Uzasadnienie uwagi 4.6 jest zawarte w ćwiczeniu 4.1 oraz przykładach 4.1–4.3.

Przykłady

4.5. Aby w przestrzeni $(\mathbb{R}, | |)$ zbadać rozbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+1}}$$

(zobacz też przykład 4.1) połóżmy, tak jak w przykładzie 4.1, $(a_n) = (n)$.

Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (przykład 1.2) oraz

$$\begin{aligned} a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} &= n \cdot \frac{n! e^n}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)! e^{n+1}} - (n+1) = \\ &= (n+1) \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - 1 \right] < 0 \quad (n \in N), \end{aligned}$$

bo $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ dla każdego $n \in N$.

Stąd wynika, że w tym przypadku jest spełniony warunek (4.7), a więc na podstawie twierdzenia 4.3 otrzymujemy, że zadany szereg jest rozbieżny.

Dodajmy, iż rozbieżności rozważanego szeregu nie można stwierdzić za pomocą kryterium d'Alemberta, gdyż w tym przypadku

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n! e^n} = \\ &= e \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right]^{-1} \to e \cdot e^{-1} = 1, \quad \text{gdy } n \to \infty. \end{aligned}$$

4.6. Rozważmy teraz szereg postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} := \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \right) \ln \frac{n}{n-1}.$$

Wówczas

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n+1}{n}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Zauważmy teraz, że jeśli $a_n := n - 1$ dla $n \geqslant 2$, to szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-2}$$

jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ oraz

$$a_n \frac{x_n}{x_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} - n =$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} - \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \left(1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} < 0$$

dla $n \geqslant 2$, bo ciąg $((1+\frac{1}{n})^n)$ jest silnie rosnący.
To zaś oznacza, iż w tym przypadku jest spełniony warunek (4.7), a więc na mocy twierdzenia 4.3 stwierdzamy, że zadany szereg jest rozbieżny (oczywiście w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).

TWIERDZENIE 4.5. (kryterium Raabego[12]). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ *jest przestrzenią unormowaną;* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1))*; to szereg* $x_1 + x_2 + \dots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$*, gdy istnieje liczba* $\rho > 1$ *taka, że*

$$n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) \geqslant \rho \quad \textit{dla } n \geqslant k \ (n \in N). \tag{4.9}$$

Jeśli zaś

$$n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) < 1 \quad \textit{dla } n \geqslant k \ (n \in N), \tag{4.10}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \dots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Kryterium Raabego jest natychmiastowym wnioskiem z twierdzeń 4.1 i 4.3, bowiem aby je uzasadnić wystarczy przyjąć $(a_n) := (n)$ i zastosować wspomniane twierdzenia.

Kryterium Raabego można też sformułować w tzw. wersji limesowej.

TWIERDZENIE 4.6. (kryterium Raabego w wersji limesowej). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ *jest przestrzenią unormowaną;* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1))*, to szereg* $x_1 + x_2 + \dots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$*, gdy*

$$\liminf_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) = +\infty \quad \textit{lub} \quad \liminf_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) > 1. \tag{4.11}$$

[12] **Joseph Ludwig Raabe** (15.05.1801–12.01.1859) – matematyk i fizyk szwajcarski, który zajmował się różnymi działami matematyki: analizą, algebrą, geometrią, zastosowaniami matematyki w innych działach nauki. Odkrył nowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych nazwane później jego imieniem, za pomocą całki oznaczonej sformułował i udowodnił podstawowe wzory trygonometrii sferycznej, otrzymał skończone formuły dla wielomianów Bernoulliego itd.

Jeśli zaś

$$\limsup_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)=-\infty \quad lub \quad \limsup_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)<1, \tag{4.12}$$

to szereg $x_1+x_2+\ldots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X},\|\,\|)$.

Nieskomplikowane uzasadnienie twierdzenia 4.6 pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Zanim podamy przykłady pokazujące zastosowania kryterium Raabego do badania normowej zbieżności lub normowej rozbieżności konkretnych szeregów, przypominamy parę wzorów, nb. dobrze znanych z podstawowego kursu rachunku różniczkowego, które są mocnym „narzędziem” do wyznaczania granic wielu skomplikowanych funkcji lub ciągów. A oto wspomniane wzory:

$$e^x=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{x^k}{k!}+o(x^m) \quad (x\in R), \tag{4.13}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{m}(1)^{k-1}\frac{x^k}{k!}+o(x^m) \quad (x>-1), \tag{4.14}$$

$$(1+x)^a=1+\sum_{k=1}^{m}\frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}x^k+o(x^m) \qquad (x>-1, a\in R)\ (m\in N), \tag{4.15}$$

gdzie $o(x^m)$ oznacza pewną funkcję rzeczywistą zmiennej x o tej własności, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m)}{x^m}=0 \quad (m\in N).$$

Dodajmy, iż wszystkie powyższe związki są po prostu wzorami Maclaurina z resztą w postaci Peano.

Przykłady

4.7. Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty}x_n:=\sum\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)\ln\frac{n}{n-1}.$$

Wówczas

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\ln\frac{n}{n-1}}{\ln\frac{n+1}{n}}=-\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad (n\geqslant 2).$$

Wobec tego, korzystając ze wzorów (4.15) i (4.14), otrzymujemy

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = -\frac{2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \cdot \frac{-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{2}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (n \geqslant 2).$$

Teraz już łatwo obliczamy granicę

$$\limsup_n n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \limsup_n n\left(\frac{2 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Stąd oraz z kryterium Raabego w wersji limesowej (twierdzenie 4.6) wynika, że zadany szereg jest rozbieżny.

Podkreślmy jednak, że zastosowanie kryterium d'Alemberta do badania zbieżności bądź rozbieżności rozważanego szeregu nie daje żadnego rezultatu, bowiem w tym przypadku

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \to 1, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

4.8. Jeżeli

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n := \sum_{n+2}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}},$$

gdzie a jest liczbą dodatnią, to

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{-\frac{1}{n}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{-\frac{1}{n}} \ln a \cdot \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = -\ln a$$

(korzystaliśmy z reguły de l'Hospitala).

Stąd zaś wynika, że w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ zadany szereg jest zbieżny, gdy $a < \frac{1}{e}$ i rozbieżny, gdy $a > \frac{1}{e}$ (zobacz twierdzenie 4.6).

Dodajmy jeszcze, że również w tym przypadku zastosowanie kryterium d'Alemberta nie daje rezultatu, bowiem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a^{\frac{1}{n}} \to 1, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

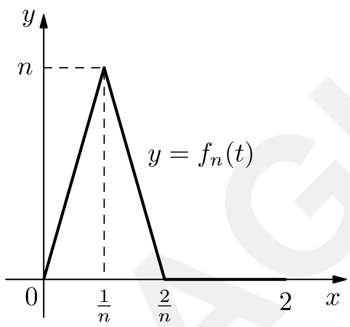
4.9. Niech

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!e^n}\,[f_n(t)]^n$$

gdzie

$$f_n(t) := \begin{cases} n^2 t & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ n^2(\frac{2}{n} - t) & \text{dla } t \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \\ 0 & \text{dla } t \in [\frac{2}{n}, 2], \end{cases}$$

dla $n \in N$ (zobacz rys. 4.1).



Rys. 4.1.

Aby zbadać normową zbieżność rozpatrywanego szeregu funkcyjnego w przestrzeni $(C([0,2]), \| \|_0)$ zauważmy, że

$$\|f_n(t)\|_0 := \max_{t\in[0,2]} |f_n(t)| = n \quad \text{dla } n \in N,$$

a zatem

$$\|x_n(t)\|_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{dla } n \in N$$

i wobec tego

$$n\left(\frac{\|x_n(t)\|_0}{\|x_{n+1}(t)\|_0} - 1\right) = n\left[\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1)!\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} - 1\right] =$$

$$= n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right] \quad (n \in N).$$

Celem wyznaczenia granicy wyżej określonego ciągu stosujemy regułę de l'Hospitala.

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}-1}{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left[-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\cdot\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right]}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot n^2\cdot\left[\frac{n-1}{2n^2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

(zobacz też (4.14). To zaś, na mocy kryterium Raabego w wersji limesowej (twierdzenie 4.6) oznacza, że w przestrzeni $(C([0,1]), \|\ \|_0)$ zadany szereg jest normowo rozbieżny.

4.10. W przykładzie 2.10 pokazaliśmy, że szereg harmoniczny o wykładniku a, tj. szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny, gdy $a \geqslant 2$ oraz rozbieżny, gdy $a \leqslant 1$.

Teraz, korzystając z kryterium Raabego pokażemy, że jest on zbieżny dla każdego $a > 1$. Rzeczywiście, w tym przypadku

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right) = n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^a-1\right] \quad (n\in N).$$

Ale

$$1+\frac{1}{n}\cdot a \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^a \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{n}a} = 1+\frac{a}{n-a} \quad \text{dla } n>a\ (n\in N),$$

bo

$$(1+x)^a \geqslant 1+xa \quad \text{dla } x>-1 \text{ oraz } a\geqslant 1$$

(jest to znana nierówność Bernoulliego) oraz

$$(1+x)^a \leqslant \frac{1}{1-xa} \quad \text{dla } -1<x<\frac{1}{a} \text{ oraz } a>0$$

(ta ostatnia nierówność wynika z nierówności Bernoulliego – zobacz ćwiczenie 4.4).

Wobec tego

$$a \leqslant n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right] \leqslant \frac{an}{n-a} \quad \text{dla } n > a \ (n \in N).$$

Stąd oraz z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że w tym przypadku

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = a > 1,$$

co zgodnie z twierdzeniem 4.6 oznacza, że rozważany szereg jest zbieżny dla każdego $a > 1$.

Uwaga 4.7. Kryterium Raabego w wersji limesowej (twierdzenie 4.6) jest mocniejsze niż bliskie mu kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.14). Rzeczywiście, jeśli kryterium d'Alemberta ustala normową zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni unormowanej $(\mathbf{X}, \| \|)$, tzn. gdy

$$\limsup_n \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} < 1,$$

to

$$\liminf_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) = +\infty.$$

Podobnie, jeśli normowa rozbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ została stwierdzona na mocy kryterium d'Alemberta, tzn. gdy

$$\liminf_n \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1,$$

to

$$\limsup_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}\right) = -\infty.$$

Aby w pełni uzasadnić uwagę 4.7 wystarczy jeszcze raz spojrzeć na przykład 4.8 (zobacz też przykład 4.7).

Kolejne kryterium normowej zbieżności i normowej rozbieżności szeregów otrzymujemy, podobnie jak kryterium Raabego, jako natychmiastowy wniosek z twierdzeń 4.1 i 4.3.

Twierdzenie 4.7. (kryterium Bertranda[13]). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ *jest przestrzenią unormowaną,* (x_n) *zaś jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1)), *to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$, *gdy istnieje liczba dodatnia* δ *taka, że*

$$(\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \delta \quad dla\ n \geqslant k\ (n \in N). \qquad (4.16)$$

Jeśli zaś

$$(\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leqslant 0 \quad dla\ n \geqslant k\ (n \in N), \qquad (4.17)$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$.

Dowód

Niech $a_n := n \ln n$ $(n \in N)$. Wówczas

$$\begin{aligned} a_n \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - a_{n+1} &= (n \ln n)\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - (n+1)\ln(n+1) = \\ &= (n \ln n)\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - (n+1)\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\cdot n\right] = \\ &= (n \ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in N). \end{aligned}$$

Wobec tego, założenie (4.16) oznacza, że dla ciągu $(a_n) = (n \ln n)$ jest spełniony warunek (4.2), który zgodnie z twierdzeniem 4.1 pociąga normową zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\ \|)$.

Dowód drugiej części twierdzenia 4.7 jest bardzo podobny. Przyjmujemy, jak wyżej $(a_n) = (n \ln n)$, i bez trudu stwierdzamy, iż założenie (4.17) oznacza, że jest spełniony warunek (4.7) (zobacz twierdzenie 4.3). To jednak nie wystarcza, aby twierdzić, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo rozbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\ \|)$, bowiem trzeba jeszcze pokazać, że szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \qquad (4.18)$$

[13] **Joseph Louis François Bertrand** (13.03.1822–3.04.1900) – matematyk francuski o wszechstronnych zainteresowaniach, zwany też człowiekiem „z ciągłym myśleniem matematycznym". Autor specjalnych kryteriów zbieżności szeregów liczbowych; hipotezy, iż „między liczbami n oraz $2n - 2$ $(4 \leqslant n \in N)$ leży co najmniej jedna liczba pierwsza" (hipotezę tę udowodnił P. L. Czebyszew); licznych i znaczących prac z zakresu równań różniczkowych dynamiki, teorii prawdopodobieństwa (paradoks Bertranda) i geometrii (zajmował się krzywymi przestrzennymi); wartościowych podręczników dla szkół średnich i wyższych.

zwany ***szeregiem Abela***, jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz jeszcze raz twierdzenie 4.3). Niestety dotychczas nie dowodziliśmy, iż tak jest. Mało tego, rozbieżność szeregu (4.18) wykażemy dopiero w następnym rozdziale (przykład 5.2). Na tym etapie przyjmujemy więc, że skądinąd wiadomo, iż szereg Abela jest rozbieżny. Po tym stwierdzeniu możemy już bez przeszkód korzystać z twierdzenia 4.3, na podstawie którego nierówności (4.17) pociągają normową rozbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \ldots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$. ■

Odpowiednik kryterium Bertranda w wersji limesowej formułujemy niżej.

Twierdzenie 4.8. (kryterium Bertranda w wersji limesowej). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ *jest przestrzenią unormowaną,* (x_n) *zaś jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1))*, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$*, gdy*

$$\left.\begin{aligned} &\liminf_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] = +\infty \\ \textit{lub}\quad & \\ &\liminf_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] > 1 \end{aligned}\right\}. \tag{4.19}$$

Jeśli zaś

$$\left.\begin{aligned} &\limsup_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] = -\infty \\ \textit{lub}\quad & \\ &\limsup_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) - 1\right] < 1 \end{aligned}\right\}, \tag{4.20}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

Elementarne uzasadnienie twierdzenia 4.8 pozostawiam Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Przykłady

4.11. Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} = \sum \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)\left(\ln \frac{n}{n-1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

i zauważmy, że

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{\ln \frac{n}{n-1}}{\ln \frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \cdot \left(\frac{-\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

dla $n \geqslant 2$ (zobacz przykład 4.7).

Teraz korzystamy ze wzorów (4.15) i (4.14):

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{2 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Stąd zaś po wykonaniu dzielenia, zastosowaniu wzoru dwumianowego na $(1+x)^a$ i wykonaniu mnożenia, otrzymujemy

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{9}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Wobec tego

$$(\ln n)\left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = (\ln n)\left[n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)\right) - 1\right] =$$

$$= (\ln n)\left[1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\ln n = \frac{1}{2n}\ln n + \frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln n}{n} \to 0,$$

$$\text{gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, iż w tym przypadku jest spełniony warunek (4.20), a więc na podstawie twierdzenia 4.8 rozważany szereg jest rozbieżny (w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$).
Dodajmy jeszcze, iż zastosowanie kryterium Raabego w wersji limesowej (twierdzenie 4.6) nie pozwala rozstrzygnąć czy rozważany szereg jest rozbieżny bądź zbieżny, bowiem w tym przypadku

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 1, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Uwaga 4.8. Twierdzenie 4.8 jest istotnie ogólniejsze niż kryterium Raabego. Takie stwierdzenie uzasadnia przykład 4.11 oraz fakt, że jeśli

$$\liminf_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) = +\infty \quad \text{lub} \quad \liminf_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1\right) > 1,$$

to

$$\liminf_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)-1\right]=+\infty,$$

zaś gdy

$$\limsup_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)=-\infty \quad \text{lub} \quad \limsup_n n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)<1,$$

to

$$\limsup_n (\ln n)\left[n\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}-1\right)-1\right]=-\infty.$$

Można więc powiedzieć, iż w pewnym sensie twierdzenie 4.8 jest na tyle ogólniejsze od twierdzenia 4.6 na ile kryterium Raabego jest ogólniejsze od kryterium d'Alemberta (zobacz uwagę 4.7).

Uwaga 4.9. W zasadzie, kryteria Raabego i Bertranda otrzymaliśmy wprost z kryterium Kummera przez zastąpienie ciągu rzeczywistego (a_n) mającego prawie wszystkie wyrazy dodatnie odpowiednio ciągiem (n) i ciągiem $(n \ln n)$. W ten sposób uzyskaliśmy dwa nowe kryteria, z których pierwsze jest istotnie ogólniejsze niż kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.16), zaś kryterium Bertranda jest istotnie ogólniejsze niż kryterium Raabego.

Nietrudno zauważyć, iż postępując podobnie możemy z łatwością uzyskać nieskończoną liczbę nowych kryteriów, z których dowolne jest istotnie ogólniejsze niż każde otrzymane wcześniej. Rzeczywiście, w tym celu wystarczy przyjąć kolejno:

$$\begin{aligned}
&(a_n)=(n);\\
&(a_n)=(n\ln n);\\
&(a_n)=(n(\ln n)(\ln(\ln n)));\\
&(a_n)=(n(\ln n)(\ln(\ln n))(\ln(\ln(\ln n)))) \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Otrzymane w ten sposób kryteria rzadko są stosowane w praktyce, gdyż nieczęsto trafiają się szeregi, których zbieżność lub rozbieżność nie może być rozstrzygnięta za pomocą kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) i jego uogólnień (ćwiczenia 2.4 i 2.5), kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.16) oraz kryterium Raabego podczas, gdy można stwierdzić ich zbieżność lub rozbieżność za pomocą kryterium Bertranda bądź jego bezpośrednich uogólnień. Mało tego, już nawet kryterium Bertranda, nie mówiąc już o jego bezpośrednich uogólnieniach, jest prawie zupełnie nieprzydatne do badania zbieżności bądź rozbieżności konkretnych szeregów.

Z kryteriów d'Alemberta, Raabego i Bertranda łatwo można otrzymać nowe kryterium mające bezsprzecznie bardzo ogólny charakter oraz o wiele większą przydatność praktyczną niż np. kryterium Bertranda.

Twierdzenie 4.9. (kryterium Gaussa[14]). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o elementach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe* (zobacz (4.1)) *i takim, że iloraz* $\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|}$ *można przedstawić w postaci*

$$\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} = a + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^2} \quad (n \geqslant k, n \in N), \tag{4.21}$$

gdzie $a, b \in R$, (c_n) *zaś jest ciągiem rzeczywistym ograniczonym, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$, *gdy* $a > 1$ *albo, gdy* $a = 1$ *i* $b > 1$.

Szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest natomiast normowo rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$, *gdy* $a < 1$ *albo, gdy* $a = 1$ *i* $b \leqslant 1$.

Co więcej, jeśli $a < 1$, *to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest poza tym rozbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \ \|)$.

Dowód

Ponieważ (c_n) jest ciągiem ograniczonym, więc z (4.21) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} = a.$$

Zatem przypadki $a > 1$ i $a < 1$ sprowadzają się do kryterium d'Alemberta (twierdzenie 2.16).

Jeśli zaś $a = 1$, to z warunku (4.21) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1 \right) = b.$$

Wobec tego, jeśli $a = 1$, to przypadki $b > 1$ i $b < 1$ sprowadzają się do kryterium Raabego w wersji limesowej (twierdzenie 4.6).

W końcu, jeśli $a = b = 1$, to z założenia (4.21) wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n) \left[n \left(\frac{\|x_n\|}{\|x_{n+1}\|} - 1 \right) - 1 \right] = \lim_{n\to\infty} c_n \cdot \left(\frac{1}{n} \ln n \right) = 0,$$

[14] **Carl Friedrich Gauss** (30.04.1777–23.02.1855) – niemiecki matematyk, fizyk, astronom i geodeta o wszechstronnych zainteresowaniach, który pozostawił trwały dorobek naukowy w takich dziedzinach jak: algebra wyższa, teoria liczb, geometria różniczkowa, rachunek prawdopodobieństwa, teoria szeregów i teoria funkcji eliptycznych, teorie elektryczności, magnetyzmu, potencjału i przyciągania, geodezja, astronomia i in. Niemal wszystkie jego wyniki i to w tak licznych działach matematyki, fizyki, astronomii i geodezji, należą również dzisiaj do podstawowych i są bardzo często cytowane, wcześniej zaś wyznaczały one nowe kierunki badań i dociekań naukowych. To ten genialny matematyk, zwany przez ówczesnych „księciem matematyków", udowodnił podstawowe twierdzenie algebry, podał konstrukcję siedemnastokąta foremnego, uzasadnił bardzo znane dzisiaj twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego, sformułował i udowodnił bardzo ważne kryterium zbieżności szeregów, stworzył podstawy teorii wyznaczania orbit planet (odnalazł też zagubioną planetoidę Ceres), skonstruował (wspólnie z W. Weberem) telegraf elektromagnetyczny, podstawowa jednostka indukcji magnetycznej zwana jest jego imieniem, to on stworzył termin „liczba zespolona", a płaszczyznę takich liczb nazywamy dzisiaj płaszczyzną Gaussa.

bo $\frac{1}{n}\ln n \to 0$, gdy $n \to \infty$, zaś (c_n) jest ciągiem ograniczonym z założenia. A więc w tym przypadku szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \, \|)$ na mocy kryterium Bertranda w wersji limesowej (twierdzenie 4.8). ■

Przykład

4.13. Rozważmy tzw. ***szereg hipergeometryczny*** postaci

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \cdot x^n =$$

$$= 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \ldots,$$

w którym α, β i γ są jakimikolwiek różnymi od $0, -1, -2, \ldots$ liczbami rzeczywistymi, x zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Przyjmując

$$x_0 := 1, \ldots, x_n := \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n \quad (n \in N),$$

stwierdzamy bez trudu, że

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}\, x\right| \to |x|, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

a więc na mocy kryterium d'Alemberta, szereg hipergeometryczny jest bezwzględnie zbieżny, gdy $|x| < 1$ oraz rozbieżny (a zatem i bezwzględnie rozbieżny!), gdy $|x| > 1$ (oczywiście w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$), bez żadnych ograniczeń na α, β oraz γ poza wymienionymi wcześniej.

Pozostaje jeszcze zbadać zbieżność rozważanego szeregu w punktach $x = 1$ i $x = -1$.

Jeśli $x = 1$, to

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \left|\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right| = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

dla dostatecznie dużych $n \in N$ (np. dla $n \geqslant k$),

bo ciąg $\left(\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right)$ ma granicę równą 1 i dlatego ma on prawie wszystkie wyrazy dodatnie.

Wobec tego, w tym przypadku, prawie wszystkie wyrazy rozważanego szeregu są tego samego znaku (dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że są one dodatnie), a poza tym

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} = 1 + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^2} \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N),$$

gdzie:

$$b = -\alpha - \beta + \gamma + 1,$$
$$c_n = \frac{[(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-\gamma) - \alpha\beta]\, n^2 + \alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma-1)n}{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta} \quad (n \geqslant k, n \in N)$$

i ciąg (c_n) jest ograniczony, gdyż ma on granicę właściwą.
Stąd oraz z kryterium Gaussa wynika, że szereg hipergeometryczny jest w punkcie $x = 1$ zbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta > 0$ i rozbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$ (jeśli $x = 1$, to przyjęliśmy, że prawie wszystkie wyrazy rozważanego szeregu są dodatnie!).
W końcu załóżmy, że $x = -1$. Wówczas

$$\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} = \left|\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right| = 1 + \frac{b}{n} + \frac{c_n}{n^2} \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N)$$

i korzystając znowu z kryterium Gaussa stwierdzamy, że szereg hipergeometryczny jest w punkcie $x = -1$ zbieżny bezwzględnie, gdy $\gamma - \alpha - \beta > 0$ i nie jest bezwzględnie zbieżny, gdy $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$.
Dodajmy, iż z powyższych rozumowań nie możemy wyciągać żadnych wniosków dotyczących zbieżności bądź rozbieżności szeregu hipergeometrycznego w punkcie $x = -1$ (dlaczego?).

Szereg hipergeometryczny był przedmiotem badań Gaussa, które – jak się wydaje – były dla niego inspiracją do sformułowania i udowodnienia kryterium zwanego dzisiaj jego imieniem.

Kolejne twierdzenia oraz ich wersje limesowe różnią się od poprzednich przede wszystkim tym, że ich uzasadnienie nie jest oparte na kryterium Kummera (twierdzenie 4.1) lecz bazuje na kryterium porównawczym (twierdzenie 2.14). Ich użyteczność jest więc niemal taka sama jak twierdzenia 2.14. Jednak w wielu przypadkach pozwalają one stosunkowo prosto rozstrzygnąć problem normowej zbieżności bądź normowej rozbieżności konkretnych szeregów.

Twierdzenie 4.10. *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$, *gdy istnieje liczba rzeczywista* a *taka, że*

$$\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) \geqslant a > 1 \quad \textit{dla prawie wszystkich } n \in N. \tag{4.22}$$

Jeśli zaś

$$\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) \leqslant 1 \quad \textit{dla prawie wszystkich } n \in N, \tag{4.23}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\ \|)$.

Dowód

Załóżmy, że jest spełniony warunek (4.22). Wówczas istnieje liczba naturalna k taka, że

$$\|x_n\| \leqslant \left(1 - a\frac{\ln n}{n}\right)^n \quad \text{dla } n \geqslant k \ (n \in N).$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

a zatem istnieje liczba naturalna l taka, że $|a\frac{\ln n}{n}| < 1$ dla $n > l$ $(n \in N)$.

Z tego powodu, wcześniejszą nierówność możemy zapisać w postaci

$$\|x_n\| \leqslant \exp\left[n \cdot \ln\left(1 - a\frac{\ln n}{n}\right)\right] \quad \text{dla } n > m := \max(k, l) \ (n \in N).$$

Teraz korzystamy ze związków (4.14), (4.13) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &\leqslant \exp\left\{n \cdot \left[-a\frac{\ln n}{n} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{n^a} \cdot \exp\left[-\frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^a} \cdot \left[1 - \frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{n^a} - \frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}}\right) \quad \text{dla } n \geqslant m \ (n \in N).
\end{aligned}$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}}\right)}{\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}}} = 0,$$

a zatem istnieje liczba p taka, że

$$o\left(\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}}\right) < \frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}} \quad \text{dla } n \geqslant p \ (n \in N)$$

(dlaczego?).

Dlatego też

$$\|x_n\| < \frac{1}{n^a} - \frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}} + \frac{a^2}{2}\frac{\ln^2 n}{n^{1+a}} = \frac{1}{n^a} \quad \text{dla } n > r := \max(m, p) \ (n \in N).$$

Stąd zaś oraz z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) wynika normowa zbieżność szeregu $x_1 + x_2 + \dots$ w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$, bowiem szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny, gdy $a > 1$ (przykład 2.10).

Załóżmy teraz, że jest spełniony warunek (4.23). Wówczas, postępując niemal tak samo jak wyżej, otrzymujemy, że istnieje takie $m \in N$, że

$$\|x_n\| \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{\ln^2 n}{n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \quad \text{dla } n > m \ (n \in N).$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)}{\frac{\ln^2 n}{n^2}} = 0,$$

a zatem istnieje liczba naturalna p taka, że $o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) > -\frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n^2}$ dla $n > p$ $(n \in N)$ (dlaczego?). Dlatego też,

$$\|x_n\| > \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\ln^2}{n^2}\right) \quad \text{dla } n > q := \max(m, p) \ (n \in N).$$

Zauważmy jeszcze, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = 0$$

i wobec tego istnieje liczba naturalna r taka, że

$$\left|\frac{\ln^2 n}{n}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{dla } n > r \ (n \in N).$$

Teraz już łatwo stwierdzamy, że

$$\|x_n\| > \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\ln^2 n}{n^2}\right) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{dla } n > s := \max(q, r).$$

Stąd zaś oraz z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) wynika, że szereg $x_1 + x_2 + \dots$ jest normowo rozbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \| \|)$, bowiem szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny (przykład 1.2). ∎

Twierdzenie 4.10 można również sformułować w tzw. wersji limesowej.

TWIERDZENIE 4.11. *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$, *gdy*

$$\liminf_n \frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) = +\infty \quad \textit{lub} \quad \liminf_n \frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) > 1. \tag{4.24}$$

Jeśli zaś

$$\limsup_n \frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) = -\infty \quad \textit{lub} \quad \limsup_n \frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{\|x_n\|}\right) < 1 \tag{4.25}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Uzasadnienie tegoż twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Przykłady

4.14. Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=3}^{\infty} x_n := \sum_{n=3}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left[\left(1 - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)\frac{\ln n}{\ln n - 1}\right]^n \cdot \left[1 - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] = \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)\left(1 + \frac{1}{\ln n - 1}\right)\right]^n \cdot \left[1 - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] = \\
&= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{(\ln n - 1)\ln(n+1)}{\ln(n+1) - \ln n}}\right)^{\frac{(\ln n - 1)\ln(n+1)}{\ln(n+1) - \ln n}}\right]^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n}{(\ln n - 1)\ln(n+1)}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\ln(n+1)}\right] \to \\
&\to e^0 \cdot 1 = 1,
\end{aligned}$$

gdy $n \to \infty$, co oznacza, że w tym przypadku kryterium d'Alemberta, a więc również kryterium Cauchy'ego (zobacz uwagę 2.12) nie rozstrzyga problemu zbieżności rozważanego szeregu.
Ale

$$\frac{n}{\ln n}(1 - \sqrt[n]{x_n}) = \frac{n}{\ln n}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)\right] = \frac{n}{\ln^2 n} \to +\infty, \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

a więc na podstawie twierdzenia 4.11 zadany szereg jest zbieżny (oczywiście w przestrzeni $(\mathbb{R}, | |)$).

4.15. Niech teraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n.$$

Nietrudno zauważyć, że kryterium Cauchy'ego, a więc tym bardziej kryterium d'Alemberta nie rozstrzygają problemu zbieżności zadanego szeregu (zobacz uwagę 2.13).

Ale

$$\frac{n}{\ln n}\left(1 - \sqrt[n]{x_n}\right) = \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{\ln n}{n} = 1 \quad \text{dla } n \in N,$$

a więc na mocy twierdzenia 4.10 zadany szereg jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

TWIERDZENIE 4.12. (kryterium logarytmiczne). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, *gdy istnieje liczba rzeczywista* a *taka, że*

$$\frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} \leqslant -a < -1 \quad \textit{dla prawie wszystkich } n \in N. \tag{4.26}$$

Jeśli zaś

$$\frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} \geqslant -1 \quad \textit{dla prawie wszystkich } n \in N, \tag{4.27}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \|\,\|)$.

DOWÓD

Z warunku (4.26) wynika, że

$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{n^a} \quad (a > 1) \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N.$$

Stąd oraz z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14) wynika, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, bowiem szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny dla każdego $a > 1$ (zobacz, np. przykład 4.10).

Jeśli zaś jest spełniony warunek (4.27), to

$$\|x_n\| \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N.$$

A więc znowu na podstawie kryterium porównawczego otrzymujemy, że szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ nie jest normowo zbieżny w przestrzeni $(\mathbf{X}, \|\,\|)$, bo szereg harmoniczny o wykładniku 1 jest rozbieżny (przykład 1.2). ■

Kryterium logarytmiczne, podobnie jak wiele wcześniejszych twierdzeń, można też sformułować w tzw. wersji limesowej.

Twierdzenie 4.13. (kryterium logarytmiczne w wersji limesowej). *Jeżeli* $(\mathbf{X}, \| \|)$ *jest przestrzenią unormowaną oraz* (x_n) *jest ciągiem o wyrazach w zbiorze* X *mającym prawie wszystkie wyrazy niezerowe, to szereg* $x_1 + x_2 + \ldots$ *jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$, *gdy*

$$\limsup_n \frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} = -\infty \quad \textit{lub} \quad \limsup_n \frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} < -1. \tag{4.28}$$

Jeśli zaś

$$\liminf_n \frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} = +\infty \quad \textit{lub} \quad \liminf_n \frac{\ln \|x_n\|}{\ln n} > -1, \tag{4.29}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ *nie jest normowo zbieżny w przestrzeni* $(\mathbf{X}, \| \|)$.

Uzasadnienie powyższego twierdzenia pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykłady

4.16. Jeżeli

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}},$$

to

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} = -\frac{(\ln n) \ln [(\ln n)]}{\ln n} = -\ln [\ln(\ln n)] < -\ln \left[\ln \left(\ln e^{e^{e^2}}\right)\right] =$$
$$= -2 < -1 \quad \text{dla } n > e^{e^{e^2}} \quad (n \in N).$$

Stąd na podstawie twierdzenia 4.12 stwierdzamy, że zadany szereg jest zbieżny.

4.17. Jeżeli

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}},$$

to

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} = -\frac{[\ln(\ln n)] \ln(\ln n)}{\ln n} = \frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n}.$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\ln(\ln n)]^2}{\ln n} = 0$$

(dlaczego?), a zatem

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \geqslant -1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N$$

(dlaczego?) i wobec tego, na mocy kryterium logarytmicznego, zadany szereg jest rozbieżny.

4.18. Rozważmy teraz szereg postaci

$$\sum_{n=2}^{\infty} x_n = \sum \frac{1}{n \ln^b n},$$

gdzie b jest liczbą dodatnią ($b > 0$). Wówczas

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} = -\frac{\ln n + b\ln(\ln n)}{\ln n} = -1 - b\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \quad (n \geqslant 2).$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0, \quad \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} > 0 \quad \text{dla } n \geqslant 2 \text{ oraz } b > 0,$$

a zatem nie może istnieć $a > 0$ takie, że

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} \leqslant -a < -1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N,$$

a ponadto nie może być również spełniona nierówność

$$\frac{\ln x_n}{\ln n} \geqslant -1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N$$

(dlaczego?).

Stąd wynika, że kryterium logarytmiczne nie pozwala rozstrzygnąć ani zbieżności, ani rozbieżności rozważanego szeregu.

Później wykażemy, iż szereg ten jest zbieżny, gdy $b > 1$ i rozbieżny, gdy $b \in]0, 1]$ (przykład 5.16).

5. Szeregi generowane przez ciągi nierosnące o wyrazach nieujemnych

Szeregi generowane przez ciągi nierosnące o wyrazach nieujemnych tworzą bardzo ważną i dość obszerną podklasę szeregów o wyrazach nieujemnych. Ich liczne zastosowania w różnych działach matematyki oraz informatyki sprawiły, iż nie sposób pominąć je we współczesnym wykładzie analizy matematycznej. Omawianie wspomnianych szeregów poprzedzamy twierdzeniem, które ma podstawowe znaczenie w całej teorii tychże szeregów. Z niego bowiem, jako niemal natychmiastowe wnioski, otrzymuje się wiele różnych kryteriów zbieżności takich szeregów. Kryteria te znajdują wielorakie zastosowania, np. w teorii przybliżeń liczb niewymiernych liczbami wymiernymi.

TWIERDZENIE 5.1. *Jeżeli* $a_1, a_2, \ldots$ *jest ciągiem nierosnącym o wyrazach nieujemnych, to dla każdego odwzorowania* $\mu\colon N \to N$, *które jest silnie rosnące i takie, że* $\mu(n) > n$ *dla każdej liczby naturalnej* n, *spełnione są następujące nierówności:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\mu(n)-1} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\mu(k)}[\mu(k+1) - \mu(k)], \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\mu(n)} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{\mu(1)} a_k + \sum_{k=2}^{n} a_{\mu(k)}[\mu(k) - \mu(k-1)] \quad (n > 1) \tag{5.2}$$

dla $n \in N$.

DOWÓD

Niech μ będzie dowolnym odwzorowaniem zbioru liczb naturalnych N w siebie, mającym własności wymienione w założeniu. Wówczas $\mu(k) < \mu(k+1)$ oraz $\mu(k)$, $\mu(k+1) \in N$ dla każdego $k \in N$, a zatem do przedziału $[\mu(k); \mu(k+1)[$ należy dokładnie $\mu(k+1) - \mu(k) \in N$ różnych liczb naturalnych. Ponadto, dla każdej liczby naturalnej $j \in [\mu(k); \mu(k-1)[$ spełniona jest nierówność: $a_{\mu(k)} \geqslant a_j$ $(k \in N)$, bo (a_n) jest ciągiem nierosnącym. Wobec tego

$$\sum_{j=\mu(k)}^{\mu(k+1)-1} a_j \leqslant a_{\mu(k)}[\mu(k+1) - \mu(k)] \quad \text{dla każdego } k \in N.$$

Zauważmy też, że

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\mu(n)-1} a_k,$$

bo $\mu(n)-1 \geqslant n$ oraz (a_n) jest ciągiem o wyrazach nieujemnych. Teraz ostatnie dwie nierówności uwzględniamy w oczywistej równości

$$\sum_{k=1}^{\mu(n)-1} a_k = \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k + \sum_{j=\mu(1)}^{\mu(2)-1} a_j + \sum_{j=\mu(2)}^{\mu(3)-1} a_j + \ldots + \sum_{j=\mu(n-1)}^{\mu(n)-1} a_j \quad (n \in N)$$

i otrzymujemy (5.1).

Aby uzasadnić nierówność (5.2) zauważmy, że do przedziału $]\mu(k-1);\mu(k)]$ należy dokładnie $\mu(k)-\mu(k-1) \in N$ różnych liczb naturalnych oraz, że dla każdej liczby naturalnej $j \in\,]\mu(k-1);\mu(k)]$ spełniona jest nierówność: $a_j \geqslant a_{\mu(k)}$ $(1 < k \in N)$.

A zatem

$$\sum_{j=\mu(k-1)+1}^{\eta(k)} a_j \geqslant a_{\mu(k)}[\mu(k)-\mu(k-1)] \quad (1 < k \in N).$$

Stąd oraz z trywialnej równości

$$\sum_{k=1}^{\mu(n)} a_k = \sum_{k=1}^{\mu(1)} a_k + \sum_{j=\mu(1)+1}^{\mu(2)} a_j + \sum_{j=\mu(2)+1}^{\mu(3)} a_j + \cdots + \sum_{j=\mu(n-1)+1}^{\mu(n)} a_j$$

wynika natychmiast nierówność (5.2). ■

Teraz, zgodnie z zapowiedzią, pokażemy w jaki sposób można wykorzystać twierdzenie 5.1 w formułowaniu i uzasadnianiu wielu kryteriów zbieżności jakże ważnej klasy szeregów liczbowych.

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli ciąg* $(a_n) \in c(R_+ \cup \{0\})$ *jest nierosnący oraz odwzorowanie* $\mu\colon N \to N$ *jest silnie rosnące i takie, że* $\mu(n) > n$ *dla każdego* $n \in N$, *to w przestrzeni* $(\mathbb{R}, |\,|)$:

1° *zbieżność szeregu*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\mu(k)}[\mu(k+1)-\mu(k)] \tag{5.3}$$

pociąga zbieżność szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *oraz*

2° *zbieżność szeregu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *pociąga zbieżność szeregu*

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{\mu(k)}[\mu(k)-\mu(k-1)]. \tag{5.4}$$

Dowód

Zauważmy, że szereg postaci (5.3) jest szeregiem o wyrazach nieujemnych. A zatem jego zbieżność oznacza, że ciąg

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{\mu(k)}[\mu(k)-\mu(k-1)]\right)_{n\in N}$$

jest ograniczony z góry (zobacz twierdzenie 1.4).

Teraz korzystamy z nierówności (5.1) (założenia twierdzenia 5.1 są oczywiście spełnione!) i wnioskujemy, że ciąg sum cząstkowych ciągu $(a_n)_{n\in N}$ jest również ograniczony z góry, a to zgodnie z twierdzeniem 1.4 oznacza, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny.

Załóżmy teraz, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. Ponieważ jest to szereg o wyrazach nieujemnych, więc ciąg sum cząstkowych ciągu (a_n) jest ograniczony z góry, tzn.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M.$$

Tym bardziej więc

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{n\in N} \sum_{k=1}^{\mu(n)} a_k \leqslant M.$$

Stąd oraz z nierówności (5.2) wnioskujemy, że ciąg

$$\left(\sum_{k=2}^{n} a_{\mu(k)}\,[\mu(k)-\mu(k-1)]\right)_{n\in N}$$

jest również ograniczony z góry, co zgodnie z twierdzeniem 1.4 oznacza, że szereg (5.4) jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. ■

Przykłady

5.1. W przykładzie 2.10 pokazaliśmy, że szereg harmoniczny o wykładniku a, tj. szereg postaci

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny, gdy $a \geqslant 2$ oraz rozbieżny, gdy $a \leqslant 1$.

Teraz wykażemy, że jest on zbieżny dla każdego $a > 1$. W tym celu zauważmy najpierw, że ciąg $\left(\frac{1}{n^a}\right)_{n\in N} \in (R_+ \cup \{0\})$ jest nierosnący dla każdego $a > 1$. Połóżmy też $\mu(n) := 2^n$ dla każdego $n \in N$. Tak określone odwzorowanie $\mu\colon N \to N$ ma wszystkie własności wyszczególnione w twierdzeniu 5.2, a poza tym szereg (5.3) ma w tym przypadku postać

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2^k\right)^a} \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^k$$

i jest on oczywiście zbieżny, gdyż jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2^{a-1}}$ mniejszym od 1 i większym od 0, dla każdego $a > 1$ (zobacz przykład 1.1).

Stąd na mocy twierdzenia 5.2 (warunek 1°) wnioskujemy, iż szereg harmoniczny o wykładniku większym od 1 jest zbieżny.

Dodajmy, że do takiego samego wniosku doszliśmy wcześniej, korzystając z kryterium Raabego (zobacz przykład 4.10).

5.2. Rozważmy ***szereg Abela***

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k},$$

którego wyrazy są nieujemne i tworzą ciąg nierosnący. Pokażemy, że szereg ten jest rozbieżny, pomimo że dla dostatecznie dużych $k \in N$ jego wyrazy są znacznie mniejsze niż wyrazy szeregu harmonicznego. W tym celu zauważmy, że odwzorowanie $\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := 10^n \in N$ spełnia założenia twierdzenia 5.2, zaś szereg (5.4) ma w tym przypadku postać

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10^k \log 10^k} \left(10^k - 10^{k-1}\right) = \frac{9}{10} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

i jest on oczywiście rozbieżny (zobacz przykład 1.2). Stąd oraz z twierdzenia 5.2 (warunek 2°) wynika, że zadany szereg jest rzeczywiście rozbieżny.

W podobny sposób stwierdzamy, że szereg $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$, zwany również ***szeregiem Abela***, jest rozbieżny.

Uwaga 5.1. Ponieważ dwa szeregi różniące się skończoną ilością wyrazów są albo równocześnie zbieżne, albo równocześnie rozbieżne (twierdzenie 2.1), więc twierdzenie 5.2 można również stosować w przypadku, gdy

$$\bigvee_{p\in N} \bigwedge_{p\leqslant n\in N} (a_n \geqslant 0 \wedge a_n \geqslant a_{n+1}) \tag{5.5}$$

oraz

$$\bigvee_{r\in N} \bigwedge_{r\leqslant n\in N} [\mu(n) > n \wedge \mu(n) < \mu(n+1)]\,. \tag{5.6}$$

Uwaga 5.2. Łatwo sprawdzić, że na przykład odwzorowania postaci:

$$
\begin{aligned}
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := n + p;\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := s \cdot n;\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := n^s;\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := s^n;\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := s^{s^n};\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := n!;\\
&\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := n^n,
\end{aligned}
$$

gdzie $p \in N$ oraz $1 < s \in N$, spełniają warunek (5.6). Wobec tego, przyjmując w miejsce μ jedno z wyżej określonych odwzorowań, możemy z twierdzenia 5.2 otrzymać wiele różnych warunków wystarczających zbieżności bądź rozbieżności specjalnych szeregów liczbowych, których wyrazy spełniają warunek (5.5).

Uwaga 5.3. Można pokazać, że jeśli są spełnione założenia twierdzenia 5.2, to zbieżność szeregu (5.3) pociąga zbieżność szeregu (5.4), lecz nie na odwrót (zobacz ćwiczenie 5.1).

Uwaga 5.4. Jeśli są spełnione założenia twierdzenia 5.2, to żadnego z warunków 1° lub 2° nie można odwrócić. Innymi słowy, założenia twierdzenia 5.2 gwarantują, że zbieżność szeregu (5.3) jest jedynie warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym zbieżności szeregu $\sum\limits_{n\in N} a_n$. Podobnie, zbieżność szeregu (5.4) jest tylko warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym zbieżności szeregu generowanego przez ciąg (a_n) liczb nieujemnych.

Podane niżej przykłady uzasadniają uwagę 5.4.

Przykłady

5.3. Niech $a_n = \frac{1}{n^2}$ oraz $\mu(n) := 2^{2^n}$ dla $n \in N$. Wówczas założenia twierdzenia 5.2 są spełnione, ale szereg (5.3), który w tym przypadku ma postać

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{2^k}\right)^2}\left[2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right),$$

jest rozbieżny, bo

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right) = 1$$

(zobacz twierdzenie 2.2), podczas, gdy szereg $\sum\limits_{k\in N} \frac{1}{k^2}$ jest zbieżny (zobacz przykład 5.1).

Stąd wynika, że jeśli są spełnione założenia twierdzenia 5.2, to zbieżność szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ nie musi pociągać zbieżności szeregu (5.3) lub inaczej, zbieżność szeregu (5.3) nie jest konieczna dla zbieżności szeregu $\sum_{n\in N} a_n$.

5.4. Rozważmy szereg

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k},$$

który jest rozbieżny (przykład 5.2) i ma wyrazy nieujemne tworzące ciąg nierosnący. Połóżmy też $\mu(n) := 10^{10^n}$ $(n \in N)$. Wówczas wszystkie założenia twierdzenia 5.2 są spełnione i szereg (5.4) ma w tym przypadku następującą postać

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10^{10^k} \log 10^{10^k}} \left[10^{10^k} - 10^{10^{k-1}}\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10^{10^k} 10^k} \left[10^{10^k} - 10^{10^{k-1}}\right] =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{9\cdot 10^{k-1}+k}}\right].$$

Z kryterium porównawczego (twierdzenie 2.14 i uwaga 2.8) wynika, że szereg ten jest zbieżny, bo

$$\frac{1}{10^k} - \frac{1}{10^{9\cdot 10^{k-1}+k}} \leqslant \left(\frac{1}{10}\right)^k \quad \text{dla } k \in N$$

(zobacz przykład 1.1).

Przykład 5.4 pokazuje, iż założenia twierdzenia 5.2 nie gwarantują, że zbieżność szeregu (5.4) jest warunkiem wystarczającym zbieżności szeregu.

Uwaga 5.4 i uzasadniające ją przykłady 5.3 i 5.4 w istocie pokazują „słabość” twierdzenia 5.2. Nietrudno bowiem zauważyć, że jeśli dla jakiegoś odwzorowania $\mu\colon N \to N$, spełniającego założenia twierdzenia 5.2, szeregi (5.3) i (5.4) są równe (tak jest np. dla odwzorowania $\mu\colon N \ni n \to \mu(n) := n+1$), to zbieżność jednego z nich jest warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ o wyrazach nieujemnych tworzących ciąg nierosnący.

Spostrzeżenie to można łatwo sformułować dla znacznie szerszej klasy odwzorowań μ. Odnotujemy je w postaci kolejnej uwagi.

Uwaga 5.5. Jeżeli odwzorowanie $\mu\colon N \to N$ spełniające założenia twierdzenia 5.2 jest takie, że zbieżność szeregu (5.4) pociąga zbieżność szeregu (5.3) (zobacz uwagę 5.3), to zbieżność jednego z tych szeregów jest warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ o wyrazach nieujemnych tworzących ciąg nierosnący.

Dokładniejsza analiza uwagi 5.5 prowadzi już bezpośrednio do kolejnego twierdzenia.

Twierdzenie 5.3. (warunek konieczny i wystarczający zbieżności szeregów generowanych przez ciągi nierosnące liczb nieujemnych). *Jeżeli ciąg* (a_n) *oraz odwzorowanie* $\mu\colon N \to N$ *mają własności* (5.5) *i* (5.6)*, a ponadto*

$$\bigvee_{M>0} \ \bigvee_{t\in N} \ \bigwedge_{t\leqslant n\in N} \ \mu(n+1) - \mu(n) \leqslant M\left[\mu(n) - \mu(n-1)\right], \tag{5.7}$$

to szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg postaci* (5.3)*.*

Elementarny dowód twierdzenia 5.3, oparty wyłącznie na twierdzeniu 5.2 (zobacz też uwagi 5.1, 5.3 i 5.5) oraz kryterium porównawczym (twierdzenie 2.14 oraz uwaga 2.8), pomijamy.

Uwaga 5.6. Warunek (5.7) oznacza, że różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu $(\mu(n))_{n\in N}$ nie może się zwiększać zbyt gwałtownie w porównaniu z ciągiem wszystkich liczb naturalnych.

Uwaga 5.7. Spośród odwzorowań wyszczególnionych w uwadze 5.2 tylko pierwsze cztery spełniają założenia twierdzenia 5.3, ostatnie trzy zaś już nie mają tej własności.

Uwagi 5.6 i 5.7 wyjaśniają również dlaczego w ogóle możliwa była konstrukcja przykładów 5.3 i 5.4.

Uwaga 5.8. Twierdzenie 5.3 zwane jest też ***twierdzeniem ogólnym o zagęszczaniu szeregów*** i w swej najpopularniejszej wersji jest ono formułowane oraz dowodzone w przypadku, gdy $\mu(n) := 2^n$ $(n \in N)$, tj. gdy mamy do czynienia z ***twierdzeniem Cauchy'ego o zagęszczaniu szeregów***.

Uwaga 5.9. Założenie o monotoniczności ciągu (a_n) (zobacz warunek (5.5)) nie może być pominięte i to zarówno w twierdzeniu 5.3 jak i w twierdzeniu 5.2.

Uwagę 5.9 uzasadniają proste przykłady.

Przykłady

5.5. Szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{2k}$$

jest rozbieżny (dlaczego?), jego wyrazy są nieujemne, $\left(\frac{1-(-1)^n}{2n}\right)_{n\in N}$ nie jest nierosnący.

Przyjmując $\mu(n) := 2n$ $(n \in N)$ otrzymujemy, że szeregi (5.3) i (5.4) mają wszystkie wyrazy równe 0 i w tym przypadku są one oba zbieżne. Jeśli zaś przyjmiemy $\mu(n) := 2n + 1$ $(n \in N)$, to szeregi (5.3) i (5.4) mają odpowiednio postać:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \quad \text{i} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{2k+1}$$

i są one rozbieżne.

5.6. Szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^2}$$

jest oczywiście zbieżny, jego wyrazy są nieujemne, a ciąg $\left(\frac{1-(-1)^n}{2n}\right)_{n\in N}$ nie jest monotoniczny. Ale jeśli $\mu(n) := 2n$ $(n \in N)$, to szeregi (5.3) i (5.4) mają wszystkie wyrazy równe 0 i w tym przypadku są oba zbieżne. Jeśli zaś przyjmiemy $\mu(n) := 2n + 1$ $(n \in N)$, to szeregi (5.3) i (5.4) mają odpowiednio postać:

$$4 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} \quad \text{i} \quad 4 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$$

i oba są zbieżne.

Teraz na kilku przykładach pokażemy w jaki sposób można wykorzystać twierdzenie 5.3 do badania zbieżności wybranych szeregów liczbowych.

Przykłady

5.7. Rozważmy szereg

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)\log(\log k)},$$

którego wyrazy – dla dostatecznie dużych $k \in N$ – są znacznie mniejsze nie tylko od wyrazów rozbieżnego szeregu harmonicznego, ale również od rozbieżnego szeregu Abela (zobacz przykład 5.2) i zastosujmy do tegoż szeregu uogólnione twierdzenie o zagęszczaniu (twierdzenie 5.3), przyjmując $\mu := 10^n$ $(n \in N)$. Wówczas szereg (5.3) ma postać

$$\frac{1}{10^k(\log 10^k)\log(\log 10^k)}\left(10^{k+1} - 10^k\right) = 9\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$$

i jest on rozbieżny (zobacz przykład 5.2).

Stąd oraz z twierdzenia 5.3 wynika, że rozważany szereg jest rozbieżny.

5.8. Zbadajmy zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{\log k}$$

w zależności od parametru a, o którym zakładamy, że jest dodatni.

Przyjmując $\mu := 10^n$ $(n \in N)$ zauważmy, że w tym przypadku szereg (5.3) ma postać

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^{\log 10^k} \left(10^{k+1} - 10^k\right) = 9 \sum_{k=1}^{\infty} (10a)^k$$

i jest on zbieżny, gdy $a \in]0; \frac{1}{10}[$ oraz rozbieżny dla $a \geqslant \frac{1}{10}$ (zobacz przykład 1.1). Stąd na mocy twierdzenia 5.3 wnioskujemy, że zadany wcześniej szereg jest zbieżny dla $a \in]0; \frac{1}{10}[$ oraz rozbieżny, gdy $a \in [\frac{1}{10}; 1]$. Jeśli $a > 1$, to wprawdzie odpowiedni szereg (5.3) jest rozbieżny, ale nie można korzystać z twierdzenia 5.3, gdyż wówczas ciąg $(a^{\log n})_{n \in N}$ jest rosnący, a więc nie jest on nierosnący (zobacz uwagę 5.9). Mimo tego, zadany szereg jest rozbieżny dla $a > 1$, bowiem wówczas

$$\lim_{n \to \infty} a^{\log n} = +\infty$$

(zobacz twierdzenie 2.2, warunek (2.3)).

5.9. Dla zbadania zbieżności szeregu

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\left(k - \sqrt{k}\right)^{\sqrt{k}}}$$

zastosujemy twierdzenie 5.3, przyjmując $\mu(n) := n^2$ $(n \in N)$. Wówczas szereg (5.3) ma postać

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - k)^k} \left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{k^k (k-1)^k}$$

i jest on zbieżny, bo

$$\frac{2n+1}{n^n (n-1)^n} \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^n (n-1)^n} = \frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (n > 2)$$

oraz szereg $\sum\limits_{n \in N} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (zobacz twierdzenie 2.14, uwagę 2.8 oraz przykład 5.1). Teraz wystarczy jeszcze stwierdzić, że ciąg $\left(\frac{1}{\left(n - \sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}}\right)_{n \in N}$ jest nierosnący, a jego wyrazy są nieujemne (proste uzasadnienie tych faktów pozostawiam Czytelnikowi) i zastosować twierdzenie 5.3, aby przekonać się, iż zadany szereg jest zbieżny.

5.10. Rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(k+1)}$$

o wyrazach nieujemnych tworzących ciąg nierosnący i połóżmy $\mu(n) := 2^n$ $(n \in N)$. Wówczas szereg (5.3) ma postać

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi \cdot 2^k}{2(2^k+1)} \cdot \left(2^{k+1} - 2^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \operatorname{ctg} \frac{2^k}{2(2^k+1)} \pi.$$

Ostatni szereg jest jednak rozbieżny, bo

$$\lim_{n\to\infty} 2^k \operatorname{ctg} \frac{2^k}{2(2^k+1)} \pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sin \frac{2^n}{2(2^n+1)}\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2^n}{2(2^n+1)}\pi\right)}{\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{2^n}{2(2^n+1)}\right)} \cdot \frac{2^n \pi}{2(2^n+1)} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \neq 0$$

(zobacz twierdzenie 2.2, warunek 2.3).

Stąd oraz z twierdzenia 5.3 wynika, że zadany wcześniej szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 5.1 może być również pomocne w formułowaniu i uzasadnianiu innych kryteriów zbieżności omawianych szeregów liczbowych. Niżej prezentujemy kilka z nich.

Twierdzenie 5.4. (kryterium zbieżności szeregów generowanych przez nierosnące ciągi liczb dodatnich). *Załóżmy, że (a_n) jest nierosnącym ciągiem liczb dodatnich oraz, że odwzorowanie $\mu\colon N \to N$ jest silnie rosnące i takie, że $\mu(n) > n$ dla każdego $n \in N$. Wówczas*:

1° *jeżeli istnieje liczba q taka, że dla każdego $n \in N$ spełnione są nierówności*

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n} [\mu(n+1) - \mu(n)] \leqslant q < 1, \tag{5.8}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i jego suma S może być oszacowana z góry

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1}{1-q} \cdot \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k; \tag{5.9}$$

2° *jeśli dla każdego wskaźnika $n > 1$ spełnione są nierówności*

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n} [\mu(n+1) - \mu(n)] \geqslant 1, \tag{5.10}$$

to szereg $x_1 + x_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Dowód

Ponieważ założenia twierdzenia 5.4 gwarantują, iż są spełnione również założenia twierdzenia 5.1, więc w każdym razie możemy korzystać z nierówności (5.1) i (5.2).

Ad 1°. Z nierówności (5.8) i (5.1) wynika, że

$$(1-q)\sum_{k=1}^{n-1} s_k \leqslant \sum_{k=1}^{\mu(1)-1}, \quad \text{czyli} \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leqslant \frac{1}{1-q}\sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k \quad (n>1).$$

Stąd oraz z twierdzenia 1.4 ((a_n) jest ciągiem liczb dodatnich!) wynika, że szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$, oszacowanie (5.9) jest zaś naturalną konsekwencją tegoż faktu oraz ostatniej nierówności.

Ad 2°. Uwzględniając założenie (5.10) w nierówności (5.2), otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\mu(n)} a_k \geqslant \sum_{k=1}^{\mu(1)} a_k + \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{\mu(1)} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n>1).$$

Wobec tego, przypuszczenie, iż szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny i ma sumę $s \in R$, prowadzi do wniosku:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\mu(n)} a_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{\mu(1)} a_k + \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right), \quad \text{czyli} \quad s \geqslant \sum_{k=2}^{\mu(1)} a_k + s,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że liczby $a_1, a_2, \ldots$ są dodatnie.

A zatem szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ musi być rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. ∎

Uwaga 5.10. Twierdzenie 5.4 przenosi się bez trudu na ciągi (a_n), które są nierosnące i mają prawie wszystkie wyrazy dodatnie oraz na odwzorowania μ spełniające warunek (5.6). Dodajmy też, że w twierdzeniu 5.4 nie żąda się, aby odwzorowanie μ spełniało warunek (5.7). Wobec tego, zamiast μ można przyjąć, np. dowolne z odwzorowań wyszczególnionych w uwadze 5.2.

Uwaga 5.11. Nie można osłabić warunku (5.8), zastępując go żądaniem

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\,[\mu(n+1)-\mu(n)] \leqslant 1 \quad \text{dla } n \in N.$$

Wówczas bowiem, przyjmując np. $a_n = 1$ oraz $\mu(n) = n+1$ $(n \in N)$ otrzymalibyśmy, iż szereg $1 + 1 + \ldots$ jest zbieżny, co jest oczywistą nieprawdą.

Uwaga 5.12. Twierdzenie 5.4, z wyjątkiem oszacowania (5.9), pozostaje prawdziwe, jeśli zażądamy, aby nierówności (5.8) i (5.10) były spełnione jedynie dla prawie wszystkich liczb naturalnych.

UWAGA 5.13. Twierdzenie 5.4 można również sformułować dla ciągów nierosnących (a_n) o prawie wszystkich wyrazach nieujemnych, tj. takich, które spełniają warunek (5.5). W takim przypadku, aby można pozostawić bez zmian tezę sformułowaną w punkcie 1° wspomnianego twierdzenia, należy założenie (5.8) zastąpić warunkiem

$$a_{\mu(n)}\,[\mu(n+1)-\mu(n)] \leqslant q a_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N, \text{ gdzie } 0 \leqslant q < 1.$$

Podobnie, dla zachowania tezy sformułowanej w punkcie 2°, wystarczy warunek (5.10) zastąpić założeniem

$$\sum_{k=2}^{\mu(1)} a_k > 0 \quad \text{oraz} \quad a_{\mu(n)}\,[\mu(n+1)-\mu(n)] \geqslant a_n \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N.$$

Teraz, na kilku przykładach, pokażemy w jaki sposób można wykorzystać twierdzenie 5.4 do badania zbieżności konkretnych szeregów liczbowych.

Przykłady

5.11. Aby zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^k}{e^k - e^{k-1}}$$

(o wyrazach dodatnich i tworzących ciąg nierosnący!) połóżmy $\mu(n) = 2n$ $(n \in N)$. Wówczas

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\,[\mu(n+1)-\mu(n)] = \frac{2n \cdot 2^{2n}}{e^{2n}-e^{2n-1}} \cdot \frac{e^n - e^{n-1}}{n \cdot 2^n} \cdot (2n+2-2n) =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^n \leqslant 4 \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^5 < 1$$

dla $n \geqslant 5$. Stąd zaś oraz z twierdzenia 5.4 (zobacz też uwagę 5.12) wynika, że zadany szereg jest zbieżny.

5.12. Rozważmy szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2k}}{k - \ln k},$$

którego wyrazy $a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{n - \ln n}$ $(n \in N)$ są dodatnie i ciąg (a_n) jest rosnący. Kładąc, podobnie jak w poprzednim przykładzie $\mu(n) = 2n$ $(n \in N)$, otrzymujemy

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\,[\mu(n+1)-\mu(n)] = \frac{\sin \frac{\pi}{4n}}{2n - \ln(2n)} \cdot \frac{n - \ln n}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot 2 =$$
$$= \frac{\sin \frac{\pi}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{2n - \ln n^2}{2n - \ln(2n)} < \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{4n}} < \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \quad (n \in N).$$

Stąd, na mocy twierdzenia 5.4 wnioskujemy, że zadany szereg jest zbieżny.

5.13. Szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \ln k}{k^2}$$

ma wszystkie wyrazy dodatnie. Nietrudno też stwierdzić, że ciąg

$$(a_n) = \left(\frac{n - \ln n}{n^2}\right)$$

jest nierosnący. Kładąc więc $\mu(n) := 3n$ $(n \in N)$, możemy stosować twierdzenie 5.4

$$\begin{aligned}\frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] &= \frac{3n - \ln(3n)}{9n^2} \cdot \frac{n^2}{n - \ln n} \cdot 3 = \\ &= \frac{3n - \ln(3n)}{3n - \ln n^2} \geqslant 1 \quad \text{dla } n \geqslant 3.\end{aligned}$$

Z tego powodu, zadany szereg jest rozbieżny.

Twierdzenie 5.4 można też sformułować w innej wersji, w której warunki (5.8) i (5.10) są zastąpione nierównościami odnoszącymi się do granic ciągów. Taka postać twierdzenia 5.4, zwana ***kryterium zbieżności szeregów generowanych przez nierosnące ciągi liczb dodatnich w wersji limesowej***, jest często przydatna w konkretnych zadaniach. Wynika to stąd, iż zwykle łatwiej jest wyznaczyć granicę określonego ciągu liczbowego (o ile taka istnieje!) niż „sensownie” oszacować go z góry.

TWIERDZENIE 5.5. *Niech (a_n) będzie nierosnącym ciągiem liczb dodatnich, $\mu\colon N \to N$ niech zaś będzie odwzorowaniem silnie rosnącym oraz takim, że $\mu(n) > n$ dla prawie wszystkich $n \in N$. Wówczas:*

1° *jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] := g < 1, \tag{5.11}$$

to szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i jego suma S może być oszacowana z góry w następujący sposób:

$$S \leqslant \frac{1}{1-g} \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k; \tag{5.12}$$

2° *jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\mu(n)}}{a_n}\left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] := G, \quad \text{gdzie } G > 1 \text{ lub } G = +\infty,$$

to szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$.

Dowód

Ad 1°. Załóżmy, że jest spełniony warunek (5.11) i niech ε_0 będzie dowolną liczbą dodatnią taką, że $q := g + \varepsilon_0 < 1$. Wówczas, zgodnie z definicją granicy (w sensie Cauchy'ego), nierówność

$$\left| \frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] - g \right| < \varepsilon_0$$

jest spełniona dla prawie wszystkich $n \in N$. Wobec tego,

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] < g + \varepsilon_0 = q < 1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N.$$

Stąd, na mocy twierdzenia 5.4 (zobacz też uwagę 5.12) wnosimy, iż szereg jest zbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ i jego suma spełnia nierówność

$$S \leqslant \frac{1}{1-q} \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k = \frac{1}{1-(g+\varepsilon_0)} \sum_{k=1}^{\mu(1)-1} a_k.$$

Ale ε_0 mogło być dowolną liczbą dodatnią byle spełniającą nierówność $g + \varepsilon_0 < 1$. Powyższe oszacowanie sumy S jest więc też prawdziwe, jeśli ε_0 zastąpimy jakąkolwiek liczbą ε taką, że $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. To spostrzeżenie uzasadnia nierówność (5.12), bowiem S jest liczbą.

Ad 2°. Jeżeli $G = +\infty$, to wprost z definicji granicy ciągu liczbowego (w jakiej przestrzeni metrycznej?) wynika, że

$$\frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n) - \mu(n-1)\right] \geqslant M = 1 \quad \text{dla prawie wszystkich } n \in N.$$

Jeśli zaś G jest liczbą większą od 1, to również z definicji granicy ciągu, ale tym razem np. w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$, wynika że dla każdej liczby dodatniej ε_0 takiej, że $1 \leqslant g - \varepsilon_0$, nierówność

$$1 \leqslant g - \varepsilon_0 < \frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n) - \mu(n-1)\right] < g + \varepsilon_0$$

jest spełniona dla prawie wszystkich $n \in N$.

W obu przypadkach jest więc spełniony warunek (5.10) i zgodnie z twierdzeniem 5.4 (zobacz też uwagę 5.12) szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$. ■

Uwaga 5.14. Jeżeli są spełnione wszystkie założenia twierdzenia 5.5, ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n+1) - \mu(n)\right] = 1 \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{\mu(n)}}{a_n} \left[\mu(n) - \mu(n-1)\right] = 1,$$

to o zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ nie można nic powiedzieć bez dodatkowych badań. Aby się o tym przekonać wystarczy na przykład przyjąć $a_n = \frac{1}{n^a}$ ($n \in N$, $a > 0$) oraz położyć $\mu(n) = n + 1$ ($n \in N$).

5.14. Wiemy już, że szereg

$$\sum_{n\in N} \sin\frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny dla każdej liczby $a > 1$ (zobacz przykład 2.11). Teraz sprawdzimy czy ten szereg jest również zbieżny, gdy parametr a należy do przedziału $]0;1]$. W tym celu zauważmy najpierw, iż ciąg $\left(\sin\frac{1}{n^a}\right)_{n\in N}$ jest malejący i ma wszystkie wyrazy dodatnie dla każdego $a > 0$. Kładąc więc $\mu(n) = 2n$ $(n \in N)$, możemy stosować twierdzenie 5.5. Wówczas

$$G = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n}\,[2n - 2(n-1)] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{(2n)^a}}{\sin\frac{1}{n^a}} \cdot 2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{(2n)^a}}{\frac{1}{(2n)^a}} \cdot \frac{1}{2^a n^a} \cdot \frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}} \cdot n^a \cdot 2 = 2^{1-a}.$$

Stąd wynika, że jeśli $G = 2^{1-a} > 1$, tzn. gdy $0 < a < 1$, to na mocy twierdzenia 5.5 (teza 2°) zadany szereg jest rozbieżny.

Jeśli $a = 1$, to rozpatrywany szereg jest również rozbieżny, bowiem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0$$

i szereg $\sum\limits_{n\in N} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (zobacz drugie kryterium porównawcze sformułowane w ćwiczeniu 2.4).

Co więcej, zadany szereg jest też rozbieżny dla każdej wartości $a \leqslant 0$, gdyż w tym przypadku nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu (zobacz twierdzenie 2.2, warunek (2.3)).

W ten sposób wykazaliśmy, iż szereg

$$\sum_{n\in N} \sin\frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny wyłącznie dla liczb $a > 1$.

5.15. Dla zbadania zbieżności szeregu

$$\sum_{n\in N} \frac{1}{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln n}}$$

połóżmy $\mu(n) = n^2$ $(n \in N)$ i zastosujmy twierdzenie 5.5. Wówczas

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n^2}}{a_n}\left[(n+1)^2 - n^2\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{\ln n}}{\left(\sqrt{n^2}\right)^{\ln n^2}} \cdot (2n+1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}\ln n}}{n^{1\ln n}} \cdot (2n+1) = \lim_{n\to\infty} \left[2 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}\ln n - 1}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}\ln n}}\right] = 0 < 1.$$

Wobec tego rozważany szereg jest zbieżny i jego suma S spełnia nierówność

$$S \leqslant \frac{1}{1-0}\sum_{k=1}^{1-1}\frac{1}{\left(\sqrt{k}\right)^{\ln k}} = 1$$

(zastosowaliśmy tutaj konwencję, iż $\sum\limits_{k=1}^{0} a_k := 1$).

Przed sformułowaniem następnych twierdzeń zauważmy, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych (a_n) można wskazać nieskończenie wiele funkcji rzeczywistych f określonych na przedziale $[1;+\infty[$ i takich, że $f(n) = a_n$ dla każdego $n \in N$. Funkcje takie mogą być zarówno ciągłe jak i nieciągłe, całkowalne lub niecałkowalne, monotoniczne itd. Dla przykładu, ciągowi $\left(\frac{1}{n}\right)$ można przypisać funkcję $f\colon [1;+\infty[\ni x \to f(x) := \frac{1}{x}$ lub też funkcję

$$f\colon [1;+\infty[\ni x \to f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dla } x \in N,\\ 0 & \text{dla } x \in [1;+\infty[\setminus N \end{cases}$$

oraz wiele, wiele innych. Podobnie, ciągowi geometrycznemu $(q^n)_{n\in N}$ można przypisać funkcję określoną wzorem $f(x) = q^x$ $(x \geqslant 1)$ oraz na przykład funkcję

$$f\colon [1;+\infty[\ni x \to f(x) := \begin{cases} q^x & \text{dla } x \in N,\\ \sin x & \text{dla } x \in [1;+\infty[\setminus N. \end{cases}$$

Twierdzenie 5.6. (kryterium całkowe). *Jeżeli odwzorowanie* $f\colon [1;+\infty[\to R$ *jest nieujemne i nierosnące, to szereg*

$$\sum_{n\in N} f(n) := \sum_{n\in N} a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg o wyrazach

$$A_n := \int_1^n f(x)dx \geqslant 0 \quad (n \in N)$$

jest ograniczony z góry.

Przed dowodem powyższego kryterium sformułujemy kilka uwag, które – być może – usuną wątpliwości uważnego Czytelnika już w trakcie jego czytania.

Uwaga 5.15. Niemal w każdym obszerniejszym podręczniku analizy matematycznej można znaleźć stwierdzenie, iż *funkcja rzeczywista f monotoniczna i ograniczona w przedziale $[a,b]$ jest w tym przedziale całkowalna* (w sensie Riemanna), *tzn. istnieje całka*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Wobec tego, założenia twierdzenia 5.6 gwarantują, iż wielkości A_n $(n \in N)$ istnieją i są one liczbami rzeczywistymi (oczywiście nieujemnymi).

Uwaga 5.16. Warunek, iż ciąg (A_n) jest ograniczony z góry można zastąpić żądaniem, aby istniała całka niewłaściwa

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Trywialne uzasadnienie tejże uwagi pomijamy.

Dowód twierdzenia 5.6

Ponieważ f jest funkcją niemalejącą, więc $f(x) \geqslant f(m) = a_m$ dla $x \in [m-1; m]$ oraz $f(x) \leqslant f(m) = a_m$ dla $x \in [m; m+1]$ $(2 \leqslant m \in N)$. Wobec tego, na mocy znanej własności całki oznaczonej, otrzymujemy nierówności:

$$\int_m^{m+1} f(x)dx \leqslant a_m \leqslant \int_{m-1}^{m} f(x)dx \quad (m = 2, 3, \dots),$$

a stąd

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} f(x)dx = A_{n+1} - A_2 \leqslant a_2 + a_3 + \dots + a_n = s_n - a_1 \leqslant \\ \leqslant \int_1^n f(x)dx = A_n \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{5.13}$$

gdzie: $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Jeśli więc ciąg (A_n) jest ograniczony z góry, to tę samą własność ma też ciąg sum cząstkowych (s_n). Jeśli zaś (s_n) jest ciągiem ograniczonym z góry, to również ciąg

$$\left(\int_2^{n+1} f(x)dx \right)_{n \in N}$$

jest ograniczony z góry, a tym samym ciąg (A_n) jest ograniczony z góry (dlaczego?).

Po tym ustaleniu wystarczy tylko zastosować twierdzenie 1.4, aby zakończyć dowód kryterium całkowego. ■

Uwaga 5.17. Twierdzenie 5.6 pozostaje prawdziwe, jeśli przedział $[1; +\infty[$ zastąpimy jakimkolwiek przedziałem niewłaściwym postaci $[a; +\infty[$ $(a \in R)$, pozostałe zaś założenia pozostawimy bez zmian.

Kolejne twierdzenie jest w istocie wnioskiem z kryterium całkowego, gdyż w jego uzasadnieniu można z powodzeniem wykorzystać istotne fragmenty dowodu tegoż kryterium.

TWIERDZENIE 5.7. *Jeżeli są spełnione wszystkie założenia twierdzenia 5.6, to ciąg różnic* $(s_n - A_n)_{n\in N}$*, gdzie* $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in N)$*, jest nierosnący oraz zbieżny, zaś jego granica należy do przedziału* $[a_1 - A_2; a_1]$*, przy czym* $a_1 - A_2 \geqslant 0$.

DOWÓD
Ponieważ

$$(s_n - A_n) - (s_{n+1} - A_{n+1}) = (A_{n+1} - A_n) - (s_{n+1} - s_n) = \\ = \int\limits_n^{n+1} f(x)dx - a_{n+1} \geqslant 0 \quad (n \in N)$$

(bo $f(x) \geqslant f(n+1) = a_{n+1}$ dla $x \in [n; n+1]$, gdyż f jest funkcją nierosnącą), więc ciąg $(s_n - A_n)_{n\in N}$ jest nierosnący.

Poza tym, z nierówności (5.13) wynika, że $s_n - A_n \leqslant a_1$ oraz, że

$$a_1 - A_2 \leqslant s_n - A_{n+1} \leqslant s_n - A_n \quad (\text{bo } A_{n+1} \geqslant A_n).$$

Wobec tego,

$$a_1 - A_2 \leqslant s_n - A_n \leqslant a_1, \tag{5.14}$$

a stąd otrzymujemy, że ciąg $(s_n - A_n)_{n\in N}$ jest zbieżny (jako ciąg monotoniczny i ograniczony) oraz, że jego granica należy do przedziału $[a_1 - A_2; a_1]$.

Nierówność $a_1 - A_2 \geqslant 0$ wynika zaś z faktu, że

$$A_2 = \int\limits_1^2 f(x)dx \leqslant \int\limits_1^2 f(1)dx = f(1) = a_1$$

(f jest funkcją nierosnącą!). ■

UWAGA 5.18. Jeśli odwzorowanie $f\colon [1; +\infty[\to R$ jest nieujemne i nierosnące oraz szereg

$$\sum_{n\in N} f(n) := \sum_{n\in N} a_n$$

jest zbieżny i ma sumę równą S, to $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, gdzie $s_n := a_1 + \cdots + a_n$ $(n \in N)$. Poza tym, na mocy kryterium całkowego istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Stąd zaś, na mocy twierdzenia 5.7 otrzymujemy, że

$$0 \leqslant a_1 - A_2 \leqslant s - A \leqslant a_1$$

i wobec tego $A \leqslant s \leqslant A + a_1$. Przepisując ostatnią nierówność w innej postaci stwierdzamy, że w tym przypadku

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)dx + f(1). \tag{5.15}$$

UWAGA 5.19. Załóżmy, że odwzorowanie $f\colon [1;+\infty[\to R$ jest nieujemne i nierosnące w całej swej dziedzinie i zauważmy, że jeśli szereg

$$\sum_{n \in N} f(n)$$

jest zbieżny, to dla każdego $n \in N$ zbieżny jest również szereg

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k),$$

zwany ***n. resztą szeregu*** $f(1) + f(2) + \ldots$, i to niezależnie od tego, czy funkcja f spełnia wcześniejsze założenia.

Okazuje się jednak, że jeśli odwzorowanie f ma wszystkie własności wyszczególnione na początku tej uwagi oraz szereg $f(1) + f(2) + \ldots$ jest zbieżny, to jego n. reszta

$$r_n := f(n+1) + f(n+2) + \ldots \quad (n \in N)$$

spełnia nierówność

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant r_n \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx + f(n+1) \quad (n \in N). \tag{5.16}$$

Uzasadnienie oszacowania (5.16) wynika niemal natychmiast z uwagi 5.18 i jego detale pozostawiam Czytelnikowi.

Przykłady

5.16. Zbadajmy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$$

w zależności od parametru a, o którym zakładamy, iż jest on liczbą dodatnią i różną od 1 (zobacz przykład 5.2).

Zauważmy, że odwzorowanie

$$f\colon [2;+\infty[\ \ni x \to f(x) := \frac{1}{x \ln^a x}$$

przyjmuje wartości

$$f(n) := a_n = \frac{1}{n \ln^a n} \quad (2 \leqslant n \in N, a > 0).$$

Poza tym,

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^a x} dx = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{1}{a-1} \left[\frac{1}{\ln^{a-1} y} - \frac{1}{\ln^{a-1} 2} \right] \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{\ln^{a_1} 2}, & \text{gdy } a > 1, \\ +\infty, & \text{gdy } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Wobec tego, na mocy kryterium całkowego (zobacz twierdzenie 5.6 oraz uwagę 5.16) wnosimy, że zadany szereg jest rozbieżny, gdy $a \in]0;1]$ (zobacz jeszcze raz przykład 5.2) i zbieżny, gdy $a > 1$.

5.17. Aby zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}$$

połóżmy

$$f(x) := \frac{1}{x^2 - \ln x} \quad \text{dla } x \in [2;+\infty[$$

i zauważmy, że

$$0 \leqslant \int\limits_2^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \ln x} \leqslant \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{2}x^2} = \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{2}{y} + 1 \right) = 1.$$

Wobec tego, całka niewłaściwa

$$\int\limits_2^{+\infty} f(x)dx$$

jest zbieżna, a więc na mocy kryterium całkowego zadany szereg jest zbieżny.

5.18. Rozważmy jeszcze raz szereg harmoniczny o wykładniku $a > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

(zobacz przykłady 1.2, 1.5, 2.10, 4.10 i 5.1), którego zbieżność i rozbieżność można również łatwo rozstrzygnąć za pomocą kryterium całkowego, bowiem

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{y\to+\infty} \begin{cases} \ln y, & \text{gdy } a = 1 \\ \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{y^{a-1}}\right), & \text{gdy } a > 0 \text{ i } a \neq 1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} +\infty, & \text{gdy } 0 < a \leqslant 1, \\ \frac{1}{a-1}, & \text{gdy } a > 1. \end{cases}$$

Dodajmy, iż zadany szereg harmoniczny jest rozbieżny, gdy $a \leqslant 0$, bowiem w tym przypadku nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów (zobacz twierdzenie 2.2, wzór (2.3)). Podkreślmy też, że jeśli a jest liczbą niedodatnią, to nie można stosować kryterium całkowego (dlaczego?).
Zastosowanie zaś twierdzenia 5.7 do szeregu rozbieżnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pokazuje, iż ciąg

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)_{n\in N}$$

jest nierosnący i zbieżny do liczby, która z pewnością należy do przedziału $[1 - \ln 2; 1]$.
Jeśli zaś $a > 1$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

jest zbieżny. Możemy więc stosować zarówno oszacowanie (5.15), jak i nierówność (5.16):

$$\frac{1}{a-1} \leqslant S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \leqslant \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a}{a-1},$$
$$\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{a-1}} \leqslant r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leqslant \frac{1}{a-1}\frac{1}{(n+1)^{a-1}} + \frac{1}{(n+1)^a} =$$
$$= \frac{n+a}{(a-1)(n+1)^a} \quad (a > 1).$$

W przypadku, gdy $0 < a < 1$, zastosowanie twierdzenia 5.7 uzasadnia zbieżność ciągu

$$\left(1 + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} - \int\limits_1^n \frac{dx}{x^a}\right)_{n \in N} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} - \frac{1}{n-1}\left[1 - n^{1-a}\right]\right)_{n \in N}$$

do liczby g spełniającej nierówność

$$1 - \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^a} = 1 - \frac{1}{a-1}\left(1 - 2^{1-a}\right) \leqslant g \leqslant 1.$$

5.19. Oszacowania (5.14), (5.15) i (5.16) znajdują zastosowania nie tylko w licznych zadaniach analizy matematycznej, ale również są „silnym narzędziem" w metodach numerycznych, a zwłaszcza w teorii błędów. Zilustrujemy to na prostym przykładzie.

Wiemy już, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

jest zbieżny i potrafimy oszacować jego sumę S

$$\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} \leqslant S \leqslant \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3},$$

chociaż jej dokładnej wartości nie znamy. Okazuje się jednak, iż potrafimy liczbę S wyznaczyć z określoną dokładnością, np. równą $0,001$. W tym przypadku bowiem wystarczy przyjąć $r_n = 0,001$ i położyć $f(x) = \frac{1}{x^4}$ dla $x \geqslant 1$. Wówczas nierówność (5.16) ma postać

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} \leqslant r_n = 0,001 \leqslant \int\limits_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x} + \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{n+4}{3(n+1)^4}$$

i jest ona spełniona dla $n = 6$. Oznacza to, że wystarczy obliczyć sumę sześciu pierwszych wyrazów rozważanego szeregu, aby wyznaczyć sumę S z dokładnością do 0,001. Wobec tego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \approx 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} \approx$$

$$\approx 1 + 0{,}0625 + 0{,}01234567901 + 0{,}00390625 +$$

$$+ 0{,}0016 + 0{,}0007716049383 \approx 1{,}081123534 \approx 1{,}081 \quad \text{(z niedomiarem).}$$

Podobny zakres zastosowań co kryterium całkowe (zobacz twierdzenie 5.6 oraz uwagi 5.15 i 5.16) ma kolejne kryterium. Różni się ono od kryterium całkowego tym, iż w jego sformułowaniu nie występują całki.

Twierdzenie 5.8. (uogólnione kryterium Jermakowa[15]). *Zakładamy, że odwzorowanie*

$$f\colon [1;+\infty[\to R$$

jest dodatnie i nierosnące, odwzorowanie $\mu\colon [1;+\infty[\to R$ *jest zaś takie, że* $\mu'(x) > 0$ *oraz* $\mu(x) > x$ *dla* $x \geqslant 1$*. Wówczas:*

1° *jeśli istnieje stała* $q < 1$ *taka, że nierówność*

$$\frac{f(\mu(x))\mu'(x)}{f(x)} \leqslant q \tag{5.17}$$

jest spełniona dla dostatecznie dużych $x \geqslant 1$ (np. dla $x \geqslant a \geqslant 1$), *to szereg*

$$\sum_{n+1}^{\infty} f(n) \tag{5.18}$$

jest zbieżny;

2° *jeśli natomiast*

$$\frac{f(\mu(x))\mu'(x)}{f(x)} \geqslant 1 \tag{5.19}$$

dla wszystkich dostatecznie dużych $x \geqslant 1$ (np. dla $x \geqslant b \geqslant 1$), *to szereg* (5.18) *jest rozbieżny.*

Dowód

Ad 1°. Z własności odwzorowań f i μ oraz z nierówności (5.17) wynika, że

$$\int\limits_{\mu(a)}^{\mu(x)} f(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(\mu(t))\mu'(t)dt \leqslant q \int\limits_{a}^{b} f(t)dt \quad (x \geqslant a \geqslant 1)$$

(Czytelnikowi proponuję sformułowanie odpowiednich kryteriów całkowalności funkcji i szczegółowe uzasadnienie istnienia wszystkich całek występujących w ostatnim zapisie).

---

[15] **Wasylij Pietrowicz Jermakow** (11.03.1845–16.03.1922) – matematyk rosyjski, który przede wszystkim zajmował się równaniami różniczkowymi, rachunkiem wariacyjnym, analizą matematyczną oraz specjalnym działem metod numerycznych, zwanym dawniej teorią przybliżeń obliczeniowych. W 1870 roku sformułował on i udowodnił twierdzenie o zbieżności pewnych szeregów o wyrazach dodatnich, zwane powszechnie kryterium Jermakowa. Jego pasją była dydaktyka oraz chęć poprawienia jakości wykładów z matematyki.

Wobec tego,

$$
\begin{aligned}
(1-q)\int\limits_{\mu(a)}^{x} f(t)dt &\leqslant (1-q)\int\limits_{\mu(a)}^{\mu(x)} f(t)dt \leqslant q\left(\int\limits_{a}^{x} f(t)dt - \int\limits_{\mu(a)}^{\mu(x)} f(t)dt\right) = \\
&= q\left(\int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt + \int\limits_{\eta(a)}^{x} f(t)dt - \int\limits_{\mu(a)}^{\mu(x)} f(t)dt\right) = \\
&= q\left(\int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt - \int\limits_{x}^{\mu(x)} f(t)dt\right) \leqslant q\int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt \quad (x \geqslant a \geqslant 1)
\end{aligned}
$$

bo $\mu(x) > x$ oraz f jest funkcją dodatnią. Stąd wynika, że

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \int\limits_{a}^{x} f(t)dt &= \int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt + \int\limits_{\mu(a)}^{x} f(t)dt \leqslant \int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt + \frac{q}{1-q}\int\limits_{a}^{\mu(a)} f(t)dt = \\
&= \frac{1}{1-q}\int_{a}^{\mu(a)} f(t)dt = \mathrm{const} \quad (x \geqslant a \geqslant 1),
\end{aligned}
$$

a więc całka niewłaściwa

$$
\int\limits_{a}^{+\infty} f(t)dt
$$

jest zbieżna. Zgodnie z twierdzeniem 5.6 (zobacz też uwagi 5.15 i 5.16) oznacza to, że szereg (5.18) jest zbieżny.

Ad 2°. Z nierówności (5.19) wynika, że

$$
\int\limits_{\mu(b)}^{\mu(x)} f(t)dt = \int\limits_{b}^{x} f(\mu(t))\mu'(t)dt \geqslant \int\limits_{b}^{x} f(t)dt \quad (x \geqslant b \geqslant 1).
$$

Wobec tego,

$$
\int\limits_{x}^{\mu(x)} f(t)dt = \int\limits_{x}^{\mu(b)} f(t)dt + \int\limits_{\mu(b)}^{\mu(x)} f(t)dt \geqslant \int\limits_{x}^{\mu(b)} f(t)dt + \int\limits_{b}^{x} f(t)dt = \int\limits_{b}^{\mu(b)} f(t)dt := c > 0
$$

bo $b < \mu(b)$ oraz f jest funkcją dodatnią.

Niech teraz

$$
x_1 := b, \quad x_{n+1} := \mu(x_n) \quad \text{dla } n \in N.
$$

Wówczas, korzystając z ostatniej nierówności, otrzymujemy

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}=\mu(x_n)} f(t)dt \geqslant c \quad (n \in N),$$

a stąd

$$\int_{x_1=b}^{x_{n+1}=\mu(x_n)} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \geqslant n \cdot c$$

i w rezultacie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{b}^{x_{n+1}} f(t)dt \geqslant \lim_{n\to\infty} n \cdot c = +\infty,$$

co oznacza, że całka niewłaściwa

$$\int_{b}^{+\infty} f(t)dt$$

jest rozbieżna (dlaczego $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = +\infty$?). Zgodnie więc z twierdzeniem 5.6 (zobacz też uwagi 5.15 i 5.16) szereg (5.18) jest rozbieżny. ■

UWAGA 5.20. Twierdzenie 5.8 można udowodnić w sposób elementarny, bez korzystania z pojęcia całki. Dowód taki jest jednak trochę dłuższy i bardziej skomplikowany. Wtedy bowiem poszczególne całki są zastąpione odpowiednimi sumami całkowymi.

UWAGA 5.21. Można założyć, że odwzorowanie f jest nieujemne, ale wówczas warunki (5.17) i (5.19) należy zastąpić nierównościami:

$$f(\mu(x))\mu'(x) \leqslant qf(x) \quad \text{i} \quad f(\mu(x))\mu'(x) \geqslant f(x) \quad \text{(dla dostatecznie dużych } x \geqslant 1\text{)},$$

pozostałe zaś założenia twierdzenia 5.8 należy pozostawić bez zmian.

Dowód kryterium sformułowanego w uwadze 5.21 nie różni się istotnie od dowodu kryterium całkowego, bowiem odwzorowanie f, które jest nieujemne i nierosnące ma tę własność, iż warunek „$f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \geqslant 1$" powoduje, że „$f(x) = 0$ dla każdego $x \geqslant x_0$".

UWAGA 5.22. Łatwo sprawdzić, że na przykład odwzorowania określone wzorami:

$$\begin{aligned} &\mu(x) = e^x; \\ &\mu(x) = x + a; \\ &\mu(x) = bx \quad (b > 0); \end{aligned}$$

$$\mu(x) = x^c \quad (c > 1);$$
$$\mu(x) = d^{d^x} \quad (d > 0);$$
$$\mu(x) = x^x \quad (x \geqslant 1)$$

mają wszystkie własności wyszczególnione w twierdzeniu 5.8.

W wielu podręcznikach dotyczących szeregów cytowane jest twierdzenie 5.8 jedynie w przypadku, gdy $\mu(x) = e^x$ $(x \geqslant 1)$. Takie kryterium zwane jest wówczas ***kryterium Jermakowa***. To spostrzeżenie uzasadnia nazwanie twierdzenia 5.8 ***uogólnionym kryterium Jermakowa***.

Uwaga 5.23. Twierdzenie 5.8 pozostaje w ścisłym związku z twierdzeniem 5.4 i jest w pewnym sensie jego kontynuacją, lecz nie uogólnieniem (dlaczego?). Ustalenie tegoż związku pozostawiam Czytelnikowi.

Niżej podajemy wybrane przykłady zastosowań twierdzenia 5.8. Dodajmy jednak, iż zbieżność rozważanych w nich szeregów można też rozstrzygnąć, stosując kryterium całkowe.

Przykłady

5.20. Aby zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)\ln(\ln n)}$$

(zobacz przykład 5.7) zastosujemy twierdzenie 5.8, kładąc $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)\ln(\ln x)}$ oraz $\mu(x) = e^x$. Wówczas wyrażenie

$$\frac{f(e^x)\mu'(x)}{f(x)} = \ln(\ln x) \to +\infty, \quad \text{gdy } x \to +\infty$$

i dla dostatecznie dużych x jest ono nie mniejsze od 1, a zatem zadany szereg jest rozbieżny.

5.21. Rozpatrzmy teraz szereg

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)\ln^a(\ln n)} \quad (a > 1).$$

Przyjmując, że $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)\ln^a(\ln x)}$ $(a > 1)$ oraz $\mu(x) = e^x$, otrzymujemy

$$\frac{f(e^x)\mu'(x)}{f(x)} = \frac{\ln^a(\ln x)}{\ln^{a-1} x} \to +\infty, \quad \text{gdy } x \to +\infty \ (a > 1).$$

Stąd zaś, na podstawie twierdzenia 5.8 wynika, że rozważany szereg jest zbieżny dla każdego $a > 1$.

5.22. Zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^a n}{n^2} \quad (a > 0)$$

można również rozstrzygnąć, stosując kryterium Jermakowa:

$$\frac{f(e^x)\mu'(x)}{f(x)} = \frac{x^{2+a}}{e^x} \cdot \frac{1}{\ln^a x} \to +\infty, \quad \text{gdy } x \to +\infty \ (a > 0).$$

Stąd już łatwo wnioskujemy, że zadany szereg jest zbieżny dla każdego $a > 0$.

Przypomnijmy jeszcze, że jeśli $(a_n)_{n \in N}$ jest ciągiem o wyrazach nieujemnych oraz $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = g$, gdzie $g > 0$ lub $g = +\infty$, to szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest rozbieżny w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\,|)$ (zobacz ćwiczenie 2.6). Jeśli zaś $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, to szereg $a_1 + a_2 + \dots$ może być zarówno zbieżny jak i rozbieżny (zobacz ćwiczenie 2.6, punkty c) oraz d)). Możemy więc powiedzieć, iż warunek $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ nie jest konieczny, ani też wystarczający dla zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \dots$ o wyrazach nieujemnych. Niżej wykażemy, iż dla specjalnych szeregów warunek $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ jest konieczny dla ich zbieżności.

Twierdzenie 5.9. (warunek konieczny zbieżności szeregów generowanych przez ciągi nierosnące o wyrazach nieujemnych). *Jeśli* $(a_n)_{n \in N}$ *jest ciągiem nierosnącym o wyrazach nieujemnych i szereg* $a_1 + a_2 + \dots$ *jest zbieżny w przestrzeni* $(\mathbb{R}, |\,|)$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \tag{5.20}$$

Dowód

Ponieważ szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, więc

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{p \in N} \bigwedge_{p \leqslant n \in N} \bigwedge_{k \in N} a_{n+1} + \dots + a_{n+k} < \frac{\varepsilon}{2},$$

(zobacz twierdzenie 2.2, warunek (2.2)). Ale $(a_n)_{n \in N}$ jest ciągiem nierosnącym o wyrazach nieujemnych, a zatem

$$ka_{n+k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \leqslant n \in N, k \in N).$$

Wobec tego, przyjmując w ostatniej nierówności $k = n$ oraz $k = n + 1$, otrzymujemy: $2na_{2n} < \varepsilon$ oraz $2(n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ $(p \leqslant n \in N)$. Stąd zaś wynika, że $2na_{2n} < \varepsilon$ oraz $(2n+1)a_{2n+1} < \varepsilon$ dla $n \geqslant p$ (dlaczego?) i dlatego

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{m=2p \in N} \bigwedge_{m<n \in N} na_n < \varepsilon,$$

co jest równoważne stwierdzeniu, iż $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. ∎

Uwaga 5.24. Warunek (5.20) nie jest wystarczający dla zbieżności szeregów nawet o wyrazach nieujemnych tworzących ciąg nierosnący. Aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć szereg Abela

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},$$

który jest rozbieżny (zobacz przykład 5.2), ale

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Literatura

[1] Chinczyn A.: *Osiem wykładów z analizy matematycznej.* (przekład z ros.) Warszawa, PZWS 1953

[2] Dieudonné J.: *Fundations of modern analysis.* New York and London, Academic Press 1960

[3] Fichtenholz G. M.: *Rachunek różniczkowy i całkowy.* (przekład z ros.) Tom II, Wyd. 4. Warszawa, PWN 1966

[4] Górniewicz L., Ingarden R. S.: *Analiza matematyczna dla fizyków.* Tom I. Toruń, skrypt Uniwersytetu Mikołaja Kopernika 1994

[5] Knopp E.: *Szeregi nieskończone.* (przekład z niem.) Warszawa, PWN 1956

[6] Kołodziej W.: *Wybrane rozdziały analizy matematycznej.* Warszawa, PWN 1970

[7] Kołodziej W.: *Analiza matematyczna.* Warszawa, PWN 1978

[8] Malec M.: *Elementarny wstęp do współczesnej analizy matematycznej.* Kraków, Wydawnictwa AGH 1996

[9] Malec M.: *Szeregi w przestrzeniach unormowanych.* Kraków, Wydawnictwa AGH 1997

[10] Sikorski R.: *Funkcje rzeczywiste.* Tom II. Warszawa, PWN 1959

[11] Siwek E.: *Analiza matematyczna.* Część I. Wyd. 2. Katowice, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego 1976

[12] Schwartz L.: *Kurs analizy matematycznej.* (przekład z franc.) Tom. I. Warszawa, PWN 1979

Skorowidz rzeczowo-osobowy