

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki

Katedra Automatyki

Rozprawa doktorska

Odporne algorytmy sterowania rozproszonego

mgr inż. Andrzej Tutaj

Promotor:

prof. dr hab. inż. Wojciech Grega

Kraków, Jasło

16 października 2008

Składam serdeczne podziękowania mojemu Promotorowi, profesorowi Wojciechowi Gredze, za nieocenioną pomoc, którą otrzymałem od niego podczas tworzenia niniejszej rozprawy, a także za ogromną ilość czasu, którą mi poświęcił i życzliwość, którą mi okazał.

Andrzej Tutaj

Spis treści

Spis treści	2
Wykaz używanych oznaczeń matematycznych	6
Lista symboli stosowanych na schematach blokowych	8
Objaśnienia skrótowców występujących w tekście	9
I Wprowadzenie	12
I.1 Organizacja i zawartość rozprawy	12
I.2 Ewolucja systemów rozproszonych	13
I.3 Formalna definicja rozproszonego systemu sterowania	16
I.4 Charakterystyka systemów rozproszonych	18
I.4.1 Ethernet w automatyce	21
I.4.2 Skutki ograniczeń w transmisji danych	22
I.5 Projektowanie rozproszonych układów regulacji	28
I.5.1 Wykorzystanie modeli matematycznych	30
I.5.2 Komputerowe symulatory systemów rozproszonych	31
I.6 Teza rozprawy	33
I.7 Metodyka badań	34
I.8 Uwagi dotyczące terminów stosowanych w pracy	34
II Stan wiedzy	36
II.1 Doskonalenie metod transmisji w sieciach telekomunikacyjnych	36
II.1.1 RETHER – Real-Time Ethernet	36
II.1.2 RTnet – sieć czasu rzeczywistego dla systemu RTAI	37
II.1.3 Przełącznik sieci Ethernet z kolejką komunikatów krytycznych czasowo	37
II.2 Doskonalenie metod i algorytmów sterowania	39

II.2.1	Usunięcie niestacjonarności systemu przez zastosowanie kolejek FIFO	39
II.2.2	Pomiar opóźnień i zastosowanie techniki <i>gain scheduling</i>	40
II.2.3	Ograniczenie ruchu w sieci dzięki zastosowaniu obserwatorów stanu	40
II.2.4	Systemy przełączane z opóźnieniami opisanymi łańcuchami Markowa	42
II.2.5	Sterowanie w systemach z utratą danych w sieci telekomunikacyjnej	43
II.3	Współprojektowanie (co-design) algorytmów automatyki i sieciowych	45
II.3.1	Harmonogram uzależniony od parametrów układów regulacji	45
II.3.2	Harmonogram uzależniony od sygnałów w układach regulacji	47
II.4	Niekonwencjonalne algorytmy sterowania	48
II.5	Stabilność rozproszonych układów regulacji	48
III Algorytmy sterowania w systemach rozproszonych		49
III.1	Kompensacja wpływu opóźnień komunikacyjnych	50
III.1.1	Opóźnienie zmienne, mniejsze od okresu próbkowania	51
III.1.1.1	Sterowanie niezwłoczne – brak estymacji	56
III.1.1.2	Stabilność liniowych dyskretnych układów niestacjonarnych	60
III.1.1.3	Wydłużanie opóźnień – estymacja stanu	64
III.1.1.4	Sterowanie niezwłoczne – estymacja jednopunktowa	66
III.1.1.5	Sterowanie niezwłoczne – estymacja trójpunktowa	73
III.1.1.6	Eksperymenty symulacyjne	78
III.1.1.7	Eksperymenty laboratoryjne	81
III.1.1.8	Ilościowe porównanie jakości regulacji	85
III.1.1.9	Jakościowe porównanie właściwości układów	89
III.1.1.10	Opóźnienie zmienne sygnału sterującego	89
III.1.1.11	Opóźnienia zmienne sygnałów pomiarowego i sterującego	92
III.1.1.12	Uwagi końcowe	92
III.1.2	Zastosowanie buforów ujednociających opóźnienia	93
III.1.2.1	Bufor typu B1	96
III.1.2.2	Bufor typu B2	97
III.1.2.3	Bufor typu B3	98
III.1.2.4	Bufor typu B4	99
III.1.2.5	Bufor typu B5	103

III.1.2.6	Stabilność układów regulacji z buforami	106
III.1.2.7	Uwagi końcowe	108
III.2	Ograniczenie częstotliwości przesłań pakietów w sieci telekomunikacyjnej	110
III.2.1	Grupowanie próbek sterowań i pomiarów	111
III.2.1.1	Dopasowanie częstotliwości metodą odrzucania próbek	112
III.2.1.2	Dopasowanie częstotliwości metodą grupowania próbek	113
III.2.1.3	Algorytmy kompensatorów dynamicznych	114
III.2.1.4	Wyniki symulacji komputerowych	121
III.2.1.5	Wyniki doświadczeń laboratoryjnych	123
III.2.1.6	Uwagi końcowe	127
III.2.2	Niejednoczesne próbkowanie wyjść obiektu wielowymiarowego	130
III.2.2.1	Harmonogramy próbkowania	131
III.2.2.2	Obiekt regulacji	132
III.2.2.3	Wskaźnik jakości	133
III.2.2.4	Regulator i estymator stanu	134
III.2.2.5	Rozszerzone równanie stanu	136
III.2.2.6	Modele matematyczne układu dla różnych harmonogramów	138
III.2.2.7	Przykład doboru harmonogramu suboptymalnego	148
III.2.2.8	Uwagi końcowe	151
III.2.3	Ulepszony ekstrapolator pierwszego rzędu	152
III.2.3.1	Dyskretno-ciągły układ regulacji	152
III.2.3.2	Sposoby przetwarzania dyskretno-ciągłego	154
III.2.3.3	Modele układów regulacji z ekstrapolatorami	156
III.2.3.4	Regulator liniowo-kwadratowy	161
III.2.3.5	Kryteria porównania jakości regulacji	163
III.2.3.6	Porównanie działania ekstrapolatorów	164
III.3	Uodparnianie rozproszonego układu regulacji na utratę pakietów w sieci	166
III.3.1	Sieć telekomunikacyjna umieszczona na drodze sygnału sterującego	168
III.3.1.1	Algorytmy kompensatora i aktuatora	170
III.3.1.2	Wyniki badań symulacyjnych	173
III.3.1.3	Wyniki eksperymentów	177

III.3.1.4	Stabilność układu regulacji z prognozowaniem sterowań	180
III.3.1.5	Podsumowanie i uwagi końcowe	184
III.3.2	Sieć telekomunikacyjna włączona na drodze sygnału pomiarowego	185
III.3.3	Sieci telekomunikacyjne w torach pomiarowym i sterującym	186
IV	Podsumowanie	188
	Dodatki	191
D.1	Zawartość M-pliku poszukującego rozwiązania układu LMI	191
D.2	Wyznaczanie transmitancji regulatorów metodą lokowania biegunów	191
D.3	Wyprowadzenie warunku porównywalności układów regulacji	193
D.4	Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem ZOH	196
D.5	Model matematyczny układu regulacji z ekstrapolatorem FOH	198
D.6	Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem FOH	199
D.7	Model matematyczny układu regulacji z ekstrapolatorem IFOH	201
D.8	Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem IFOH	202
	Bibliografia	205

Wykaz używanych oznaczeń matematycznych

- A, B, C, D – macierze w równaniach stanu z czasem ciągłym
- \mathbb{C} – zbiór liczb zespolonych
- \mathbb{C}° – wnętrze koła o jednostkowym promieniu i środku w punkcie $0 + j \cdot 0$ na płaszczyźnie zespolonej
- $\det A, |A|$ – wyznacznik macierzy A
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ – macierz diagonalna z elementami a_1, \dots, a_n na przekątnej głównej
- dt – różniczka zmiennej niezależnej t
- $\Delta x[k]$ – różnica w przód: $\Delta x[k] = x[k+1] - x[k]$
- $\nabla f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ – gradient skalarnej funkcji f wektorowego argumentu x
- e – podstawa logarytmu naturalnego
- $E\{X\}$ – wartość oczekiwana zmiennej losowej X
- Φ, Γ, C, D – macierze w równaniach stanu z czasem dyskretnym
- $G(s)$ – transmitancja obiektu z czasem ciągłym
- $G[z]$ – transmitancja obiektu z czasem dyskretnym
- $Hf(x), \nabla^2 f(x)$ – hesjan skalarnej funkcji f wektorowego argumentu x
- $\text{Im } s$ – część urojona liczby zespolonej s
- j, j – oznaczenie jednostki urojonej, $j = \sqrt{-1}$
- J – wskaźnik jakości
- k – numer (indeks) dyskretnych chwil czasu t_k ($k \in \mathbb{Z}$ lub $k \in \mathbb{N}$)
- $k|m$ – oznaczenie podzielności liczby k przez m ($k, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$)
- K – macierz wzmocnień wielowymiarowego regulatora proporcjonalnego od stanu lub wyjścia
- L – macierz sprzężenia od wyjścia obiektu w identycznościowym obserwatorze Luenbergera
- $\lambda(A)$ – zbiór wartości własnych macierzy A
- $|\lambda(A)|$ – zbiór modułów wartości własnych macierzy A
- \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych łącznie z zerem ($0 \in \mathbb{N}$)
- p, n, q – liczba wejść, zmiennych stanu i wyjść systemu dynamicznego
- Q, R, S – macierze wagowe w kwadratowym całkowym (lub sumacyjnym) wskaźniku jakości
- Q_c – macierz sterowalności liniowego systemu dynamicznego
- Q_o – macierz obserwowalności liniowego systemu dynamicznego
- \mathbb{R} – zbiór liczb rzeczywistych

- $\operatorname{Re} \lambda(A)$ – zbiór części rzeczywistych wartości własnych macierzy A
 $\operatorname{Re} s$ – część rzeczywista liczby zespolonej s
 $\operatorname{rank} A$ – rząd macierzy A
 $|s|$ – moduł liczby zespolonej s
 t – czas z dziedziny ciągłej ($t \in \mathbb{R}$ lub $t \in [0, \infty)$)
 $\operatorname{tr} A$ – ślad macierzy A
 T – okres próbkowania (dyskretyzacji w czasie) sygnału z czasem ciągłym
 τ – opóźnienie komunikacyjne, czas trwania pewnej akcji lub czas obliczeń
 τ^S, τ^A – czas trwania akcji czujnika i urządzenia wykonawczego
 τ^C – czas obliczeń wykonywanych przez kompensator dynamiczny lub regulator
 τ^N – opóźnienie przesyłu pakietu w sieci telekomunikacyjnej
 $v(x)$ – funkcjonal Lapunowa lub kandydat na funkcjonal Lapunowa
 $w(z)$ – wielomian charakterystyczny macierzy
 $x[k], u[k], y[k]$ – wektor stanu, sygnały wejściowy i wyjściowy systemu dynamicznego z czasem dyskretnym
 $x(t), u(t), y(t)$ – wektor stanu, sygnały wejściowy i wyjściowy systemu dynamicznego z czasem ciągłym
 $\hat{x}, \hat{\hat{x}}$ – estymata lub prognoza zmiennej x
 \tilde{x} – błąd estymacji zmiennej x (różnica między estymatą a wartością rzeczywistą)
 \bar{x} – rozszerzony wektor stanu
 $\lceil x \rceil$ – zaokrąglenie w górę

Lista symboli stosowanych na schematach blokowych

- A** – *Acutator* – urządzenie wykonawcze
- Ar** – *Arbiter* – układ arbitrażu
- B** – *Buffer* – bufor
- C** – *Controller* – regulator, kompensator dynamiczny
- DC** – *Dynamic Compesator* – kompensator dynamiczny
- E** – *Estimator, Predictor* – urządzenie estymujące, urządzenie prognozujące
- H** – *Hold* – zatrzask (analogowy lub cyfrowy)
- I** – *Interface* – sprzęg (interfejs)
- LC** – *Local Computer* – komputer lokalny (miejscowy)
- OC** – *Other Computer* – dodatkowy (inny, trzeci) komputer
- M** – *Model* – model obiektu
- MB** – *Message Box* – skrzynka pocztowa
- MS** – *Multiport Switch, Multiplexer* – przełącznik wielobiegunowy, multiplekser
- N** – *Network* – sieć telekomunikacyjna
- NA** – *Actuator Network* – sieć telekomunikacyjna współpracująca z urządzeniem wykonawczym
- NS** – *Sensor Network* – sieć telekomunikacyjna współpracująca z czujnikiem
- P** – *Plant* – obiekt regulacji
- PC** – *Continuous Plant* – obiekt regulacji opisany modelem matematycznym z czasem ciągłym
- PD** – *Discrete Plant* – obiekt regulacji opisany modelem matematycznym z czasem dyskretnym
- Q** – *Queue* – kolejka
- R** – *Reference Source* – zadajnik (źródło sygnału wartości zadanej)
- RC** – *Remote Computer* – komputer zdalny (odległy)
- RI** – *Resettable Integrator* – kasowalny (zerowalny) integrator
- S** – *Sensor, Sampler* – czujnik, urządzenie próbkujące
- SP** – *Smith Predictor* – predyktor Smitha
- SS** – *Settings Source* – nastawnik (źródło nastaw dla regulatora)
- T** – *Timer* – zegar
- TA** – *Actuator Timer* – zegar taktujący urządzenie wykonawcze
- TB** – *Buffer Timer* – zegar taktujący bufor
- TC** – *Controller Timer* – zegar taktujący regulator lub kompensator
- Ts** – *Sensor Timer* – zegar taktujący czujnik

Objaśnienia skrótowców występujących w tekście

- ABS – *Anti-Blocking Brake System* – system chroniący przed poślizgiem przy hamowaniu
- ADC, A/C – *Analog-Digital Converter* – przetwornik analogowo-cyfrowy
- ADS – *Asynchronous Dynamical System* – asynchroniczny system dynamiczny
- API – *Application Programming Interface* – interfejs programowy użytkownika
- ARP – *Address Resolution Protocol* – protokół zapytania o adres sprzętowy (MAC) karty sieciowej w węźle, gdy znany jest adres IP węzła sieciowego
- (AS) – *Asymptotically Stable* – asymptotycznie stabilny
- ASIC – *Application Specific Integrated Circuit* – elektroniczny układ scalony zaprojektowany do realizacji z góry ściśle określonego zadania¹
- BIBO – *Bounded Input, Bounded Output* – ograniczone wejście, ograniczone wyjście
- BMI – *Bilinear Matrix Inequality* – biliniowa nierówność macierzowa
- CIP – *Common Industrial Protocol* – wspólny protokół przemysłowy
- CRC – *Cyclic Redundancy Check* – cykliczny kod nadmiarowy
- CSMA/AMP – *Carrier Sense Multiple Access with Arbitration on Message Priority* – wielodostęp z nasłuchiowaniem i arbitrażem w oparciu o priorytety wiadomości
- CSMA/BA – *Carrier Sense Multiple Access with Bitwise Arbitration* – wielodostęp z nasłuchiowaniem i rozstrzygnięciem bitowym
- CSMA/CA – *Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance* – wielodostęp z nasłuchiowaniem i unikaniem kolizji
- CSMA/CD – *Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection* – wielodostęp z nasłuchiowaniem i wykrywaniem kolizji
- DAC, C/A – *Digital-Analog Converter* – przetwornik cyfrowo-analogowy
- DC – *Direct Current* – prąd stały
- DCS – *Distributed Control System* – rozproszony układ sterowania (lub regulacji)
- DDC – *Direct Digital Control* – bezpośrednie sterowanie cyfrowe
- DNCS – *Distributed Networked Control System* – rozproszony sieciowy układ sterowania
- FIFO – *First-In, First-Out* – kolejka zachowująca kolejność elementów
- FOH – *First Order Hold* – ekstrapolator pierwszego rzędu
- GPRS – *General Packet Radio Service* – usługa pakietowego przesyłu danych w sieci GSM
- GSM – *Global System for Mobile Communications* – naziemny system telefonii komórkowej

¹<http://pl.wikipedia.org/wiki/ASIC>

- HVAC – *Heating, Ventilation, Air Conditioning* – ogrzewanie, wentylacja, klimatyzacja
- ICMP – *Internet Control Message Protocol* – protokół wykorzystywany w diagnostyce sieci komputerowych i routingu
- IDE – *Integrated Development Environment* – zintegrowane środowisko programistyczne
- ICCS – *Integrated Communication and Control Systems* – zintegrowany system komunikacji i sterowania
- IPOH – *Improved First Order Hold* – ulepszony ekstrapolator pierwszego rzędu
- IMC – *Internal Model Control* – sterowanie z wewnętrznym (wbudowanym) modelem
- LMI – *Linear Matrix Inequality* – liniowa nierówność macierzowa
- LQ – *Linear-Quadratic* – liniowo-kwadratowy
- MFC – *Microsoft Foundation Class (Library)* – biblioteka programistyczna Visual C++
- MIMO – *Multiple Input, Multiple Output* – obiekt o wielu wejściach i wielu wyjściach (wielowymiarowy²)
- (NAS) – *Non-asymptotically Stable* – stabilny, lecz nie asymptotycznie (S\NS)
- NBCS – *Network-Based Control System* – system sterowania oparty na sieci
- NCS – *Networked Control System* – sieciowy układ sterowania (lub regulacji)
- NIC – *Network Interface Controller/Card* – karta sieciowa
- (NS) – *Unstable, Nonstable* – niestabilny
- ODVA – *Open DeviceNet Vendors Association* – Otwarte Stowarzyszenie Dostawców DeviceNet
- PID – *Proportional-Integral-Derivative Controller* – regulator z akcjami proporcjonalną, całkującą i różniczkującą
- PLC – *Programmable Logic Controller* – programowalny sterownik logiczny
- QoS – *Quality of Service* – jakość usług
- RMS – *Root Mean Square* – średnia kwadratowa
- RT – *Real Time* – czas rzeczywisty
- RTAI – *Real-Time Application Interface* – interfejs aplikacji czasu rzeczywistego
- RTW – *Real-Time Workshop* – przybornik programu MATLAB wykorzystywany do automatycznej generacji kodu na podstawie schematu blokowego w *Simulinku*
- RTWT – *Real-Time Windows Target* – przybornik programu MATLAB umożliwiający automatyczne tworzenie aplikacji czasu rzeczywistego dla systemu operacyjnego *MS Windows*, na podstawie kodu wygenerowanego w oparciu o schemat blokowy w *Simulinku*
- S&H – *Sample and Hold* – próbkowanie z podtrzymaniem
- SISO – *Single Input, Single Output* – obiekt o jednym wejściu i jednym wyjściu
- SOH – *Second Order Hold* – ekstrapolator drugiego rzędu
- TCP/IP – *Transfer Control Protocol / Internet Protocol* – połączeniowy protokół internetowy
- TDMA – *Time Division Multiple Access* – wielodostęp z podziałem czasu

²Według niektórych źródeł obiektem wielowymiarowym jest jedynie taki obiekt o wielu wejściach i wyjściach, w którym występują sprzężenia skróśne.

UDP/IP – *User Datagram Protocol / Internet Protocol* – bezpołączeniowy protokół internetowy

VLAN – *Virtual Local Area Network* – wirtualna sieć lokalna

WLAN – *Wireless Local Area Network* – bezprzewodowa sieć lokalna

ZOH – *Zero Order Hold* – ekstrapolator zerowego rzędu

Rozdział I

Wprowadzenie

Istotną część współcześnie projektowanych i budowanych systemów automatyki to układy rozproszone. Do przesyłania informacji wykorzystuje się w nich cyfrowe sieci telekomunikacyjne: dedykowane (np. CAN, ProfiBus, WorldFip, LonWorks, ControlNet, DeviceNet) bądź ogólnego przeznaczenia (np. Ethernet, Wi-Fi, Internet, GSM/GPRS). Systemy te znajdują zastosowanie zarówno w automatyce przemysłowej (procesy ciągłe, wsadowe, linie montażowe), jak i w automatyzacji środków transportu (lądowego, wodnego, powietrznego) oraz budynków różnorodnego przeznaczenia (mieszkalnych, produkcyjnych, komunalnych).

Możliwości zastosowania w systemach rozproszonych klasycznych metod projektowania algorytmów regulacji są istotnie ograniczone. Metody te nie uwzględniają bowiem zjawisk związanych z przesyłem przez sieć telekomunikacyjną sygnałów występujących w układzie sterowania. Pominięcie obecności sieci na etapie doboru struktury i nastaw regulatorów prowadzi zwykle do pogorszenia jakości regulacji czy wręcz utraty stabilności systemu. Z drugiej strony, wykorzystanie uproszczonej wiedzy o własnościach sieci komunikacyjnej daje rozwiązania charakteryzujące się znaczną zachowawczością. Dlatego konieczne jest stworzenie metod sterowania, uwzględniających nie tylko własności obiektu regulacji, ale również charakter, strukturę i warunki pracy sieci telekomunikacyjnej użytej do wymiany informacji. Metod, które pozwolą na uzyskanie wysokiej jakości regulacji, zapewniając jednocześnie pewność działania i niezawodność systemu.

Cel, jaki postawił sobie Autor niniejszej rozprawy, to opracowanie algorytmów sterowania systemów dynamicznych z wykorzystaniem rozproszonych struktur układów regulacji. W pracy przedstawiono uzyskane algorytmy i zawarto wyniki badań wykazujące ich podwyższoną odporność na efekty wnoszone przez rozproszony charakter aplikacji sterującej. Uwzględniono w szczególności stałe i zmienne opóźnienia w przepływie sygnałów, ograniczoną częstotliwość przesłań sieciowych i zjawisko utraty danych. Praca, obok rozważań teoretycznych, zawiera wyniki symulacji komputerowych oraz eksperymentów, a w wielu miejscach zamieszczono w niej uwagi i wskazówki implementacyjne.

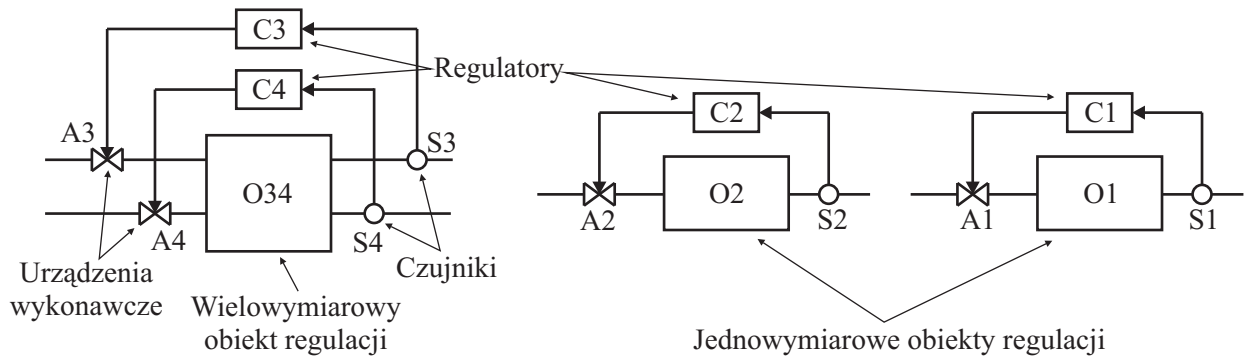
I.1 Organizacja i zawartość rozprawy

Organizacja niniejszej pracy jest następująca: w obecnym rozdziale, *Wprowadzenie*, zamieszczono ogólną charakterystykę rozproszonych układów regulacji oraz sformułowano tezę rozprawy. Rozdział drugi, *Stan wiedzy*, przybliży aktualny światowy zasób wiedzy w dyscyplinie, której dotyczy niniejsza rozprawa. Ze względu na ramy i charakter opracowania, przegląd ten nie jest kompletny. Autor

starał się jednak tak dobrać zawarty w nim materiał, by zasygnalizować najważniejsze kierunki i trendy badań w dziedzinie systemów rozproszonych. Następny rozdział, *Algorytmy sterowania w systemach rozproszonych*, stanowi zasadniczą część niniejszej pracy. Mieści on opisy oraz wyniki badań przeprowadzonych przez Autora. Jest podzielony na szereg podrozdziałów, prezentujących odmienne metody rozwiązywania różnych problemów sterowania, spotykanych w systemach rozproszonych. Podziału na podrozdziały dokonano według klucza zorientowanego w pierwszej kolejności (zasadniczo) na problemy, a w drugiej (pomocniczo) – na metody ich rozwiązywania. Autor starał się zachować logiczny układ i kolejność tematów, tak by kolejne podrozdziały bazowały na poprzednich. Rozprawę zamyka rozdział *Podsumowanie*, w którym zawarto uwagi końcowe, odniesiono się do tej pracy oraz nakreślono kierunki dalszych badań.

I.2 Ewolucja systemów rozproszonych

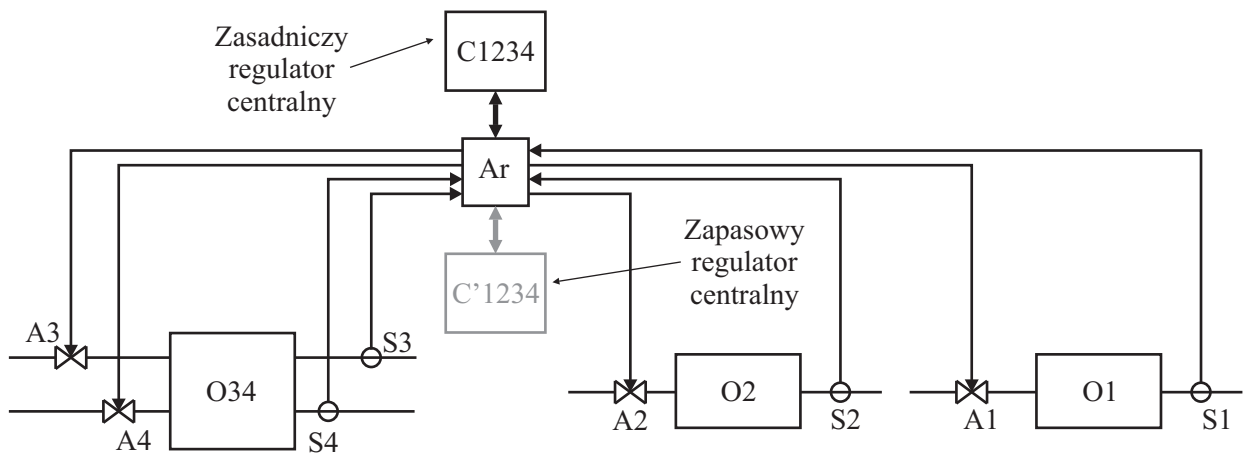
W początkowym okresie rozwoju automatyki systemy sterowania w przemyśle miały prostą konstrukcję i stanowiły zbiór w znacznym stopniu niezależnych (autonomicznych), nie współpracujących ze sobą bezpośrednio układów regulacji automatycznej (rysunek I.1). Były to z reguły najprostsze układy regulacji jednowymiarowej (o jednym wejściu i jednym wyjściu), rzadziej – wielowymiarowej, a niekiedy również układy kaskadowe [113]. Wykorzystywano w nich regulatory o działaniu ciągłym (analogowe) o nieskomplikowanych funkcjach, głównie PID. Podobnie analogowe były wszystkie przesyłane i przetwarzane w tych systemach sygnały.



Rys. I.1: Zbiór niezależnych układów regulacji.

Gdy pojawiły się układy cyfrowe i mikrokomputery, a ich ceny i niezawodność osiągnęły akceptowalny poziom, zaadaptowano je dla potrzeb automatyki. Jedną z dróg ich wykorzystania polegała na zastępowaniu regulatorów analogowych ich funkcjonalnymi odpowiednikami cyfrowymi. Drugą drogą to wykorzystanie komputerów do budowy systemów bezpośredniego sterowania cyfrowego (DDC – *Direct Digital Control*) [141]. Dzięki znacznej dostępnej mocy obliczeniowej, układy takie mogły realizować skomplikowane funkcje i przetwarzać większą liczbę sygnałów procesowych. Możliwa była realizacja układów regulacji wielowymiarowej (o wielu wejściach i wielu wyjściach). Systemy te miały charakter *scentralizowany* – jeden komputer realizował szereg różnych zadań i przetwarzał wiele zmiennych (rysunek I.2). Poza komputerem wszystkie sygnały z czujników i do urządzeń wykonawczych przesyłane były w postaci analogowej.

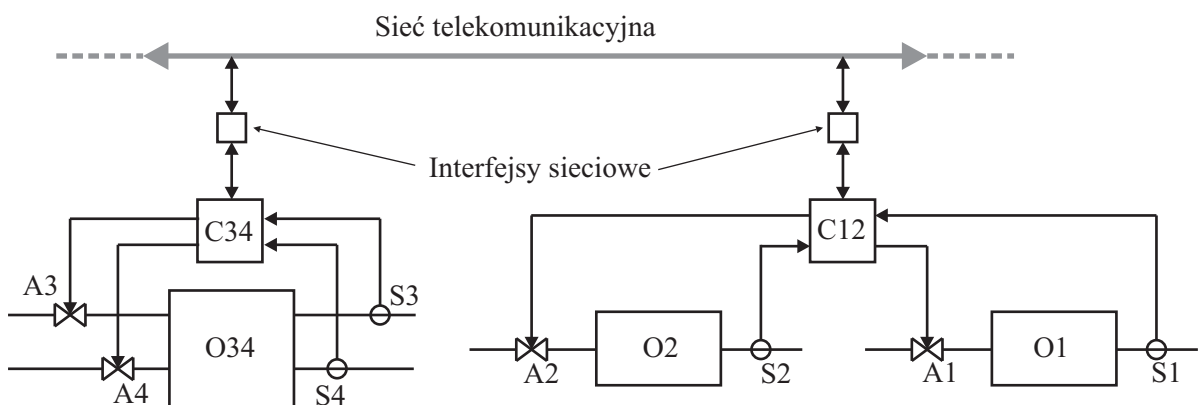
Podstawową wadą sterowania scentralizowanego była wrażliwość układu regulacji na awarie jednego obecnego w nim komputera, skutkującą nieprawidłową pracą całego systemu. By zabezpieczyć



Rys. I.2: Scentralizowany układ regulacji.

się przed taką ewentualnością, zaczęto stosować zapasowy komputer (*back-up*), który był w stanie przejąć funkcję zasadniczego sterownika w razie jego awarii. Do realizacji tego celu konieczne było stosowanie arbitrów, wykrywających fakt awarii i przełączających sterowniki (zasadniczy i zapasowy). Zastosowanie dwóch komputerów i organizacja komunikacji między nimi stanowiły zapowiedź nadejścia rozproszonych struktur sterowania.

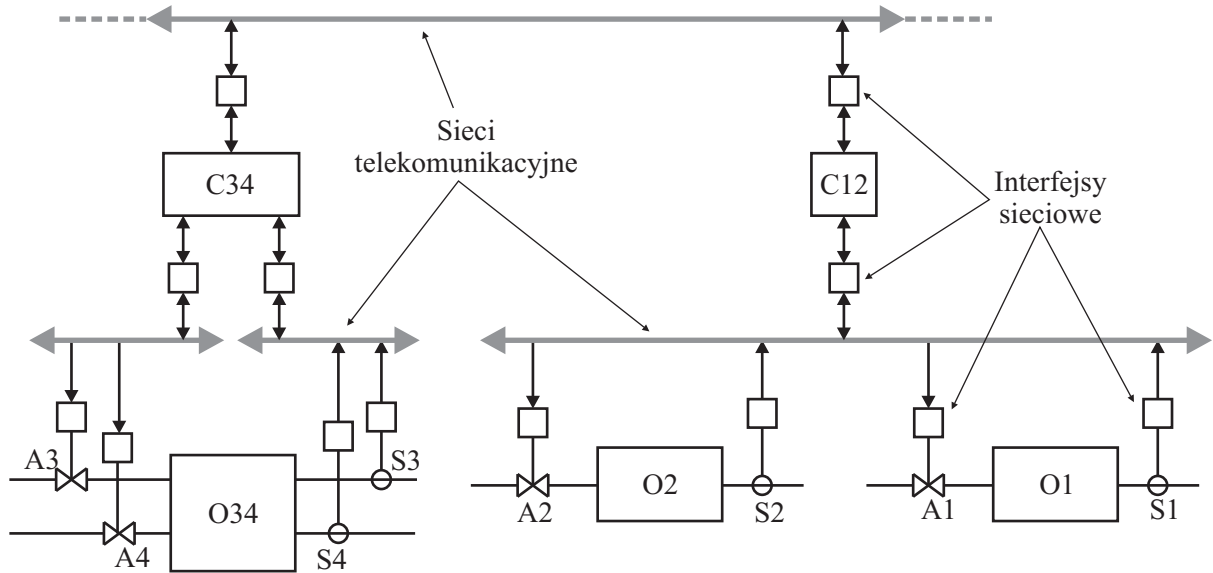
Z czasem wymaganie większej niezawodności, przy rosnącym zagęszczeniu układów regulacji i wobec malejących cen sprzętu, doprowadziło do dekompozycji większych systemów na mniejsze podsystemy składowe. Sercem każdego z nich był komputer przemysłowy lub programowalny sterownik logiczny (PLC). By umożliwić komunikację między odrębnymi składnikami systemu, wprowadzono przemysłowe sieci telekomunikacyjne (*fieldbus*). Pośredniczyły one tylko w przesyłaniu ograniczonej ilości danych „wyższego poziomu” między sterownikami czy komputerami (rysunek I.3). Sygnały procesowe od czujników i do urządzeń wykonawczych w dalszym ciągu przesyłane były w postaci analogowej. Ta konfiguracja, którą nazwiemy *zdecentralizowaną*, miała w pewnym stopniu charakter rozproszony.



Rys. I.3: Zdecentralizowany układ regulacji.

Dalszy spadek cen układów elektroniki cyfrowej oraz jej rozwój doprowadziły do powstania w pełni *rozproszonych* systemów sterowania. W systemach takich cyfrową siecią telekomunikacyjną połączone są nie tylko sterowniki, ale także czujniki i urządzenia wykonawcze (rysunek I.4). Ich sygnały

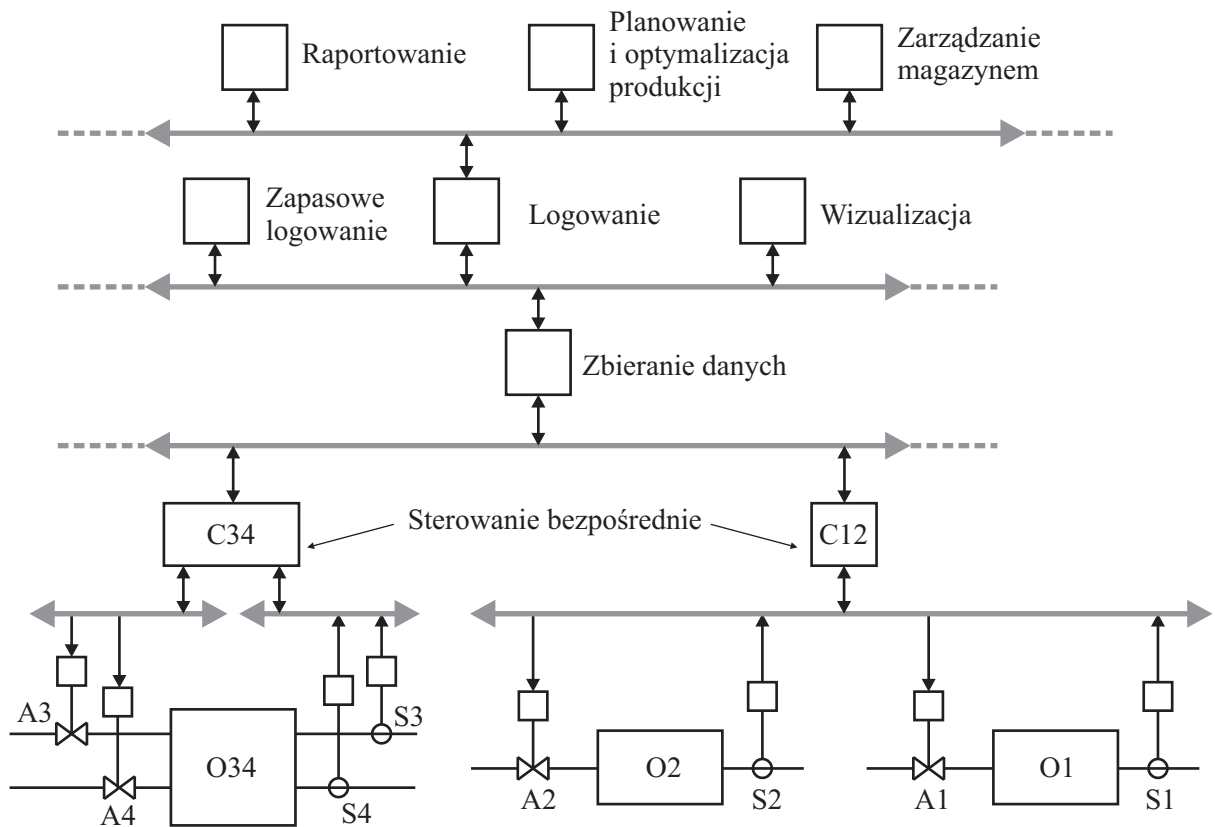
przesyłane są w postaci cyfrowej. Sieć pośredniczy więc nie tylko w komunikacji między sterownikami, ale też w przepływie znacznej zwykle ilości danych procesowych, a więc danych „najniższego poziomu”. Oznacza to, że sieć jest włączona w pętle sprzężeń zwrotnych układów regulacji. Często funkcje komunikacji pomiędzy sterownikami są rozdzielone od funkcji wymiany danych z czujnikami i urządzeniami wykonawczymi; realizują je odrębne sieci transmisyjne, zwykle różnych typów. Taka struktura systemu pociąga za sobą konieczność wyposażenia każdego czujnika i urządzenia wykonawczego w interfejs komunikacyjny, stąd często określa się je mianem „inteligentnych”.



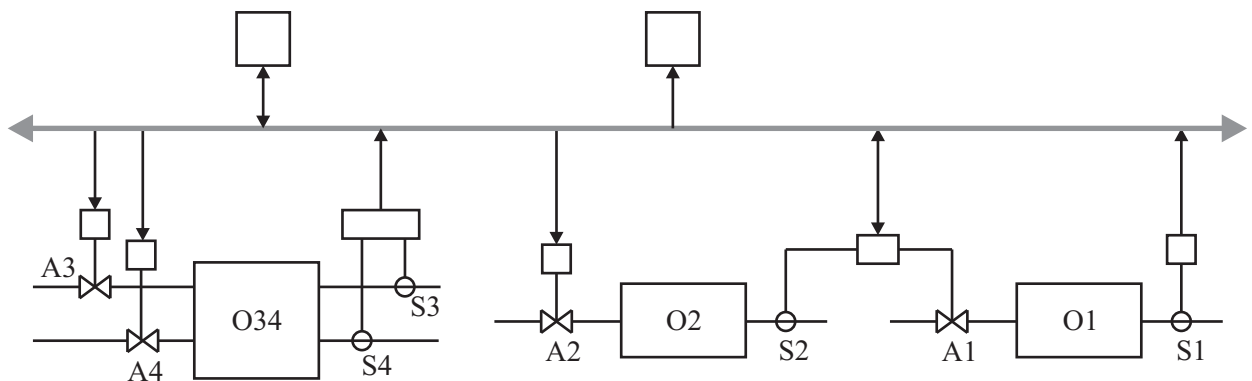
Rys. I.4: Rozproszony (sieciowy) układ regulacji.

Dane procesowe o pracy systemu są często zapisywane i przechowywane do późniejszego wykorzystania. Są też wykorzystywane do wizualizacji przebiegu procesu, do wykrywania sytuacji awaryjnych oraz do wspomagania podejmowania decyzji produkcyjnych. Ostatnie z podanych zastosowań wymaga zazwyczaj wstępnej obróbki danych procesowych i ich agregacji. Każde z wymienionych zadań jest z reguły realizowane przez odrębną jednostkę obliczeniową. W takim przypadku system sterowania rozbudowuje się, dodając komputery-serwery zbierające dane ze sterowników, często wstępnie je przetwarzające i udostępniające następnym jednostkom. W tym ostatnim zadaniu pośredniczy kolejna sieć komputerowa. Tak powstały układ ma zazwyczaj strukturę hierarchiczną, w której granice między poziomami hierarchii wyznaczone są przez kolejne sieci telekomunikacyjne użyte w systemie. Przykład takiego systemu przedstawiony jest na rysunku I.5. Dla zwiększenia przejrzystości na schemacie pominięto część bloków reprezentujących interfejsy sieciowe.

W niektórych rozwiązaniach w systemie rozproszonym nie są wyraźnie oddzielone funkcje regulatorów, czujników i urządzeń wykonawczych. Zamiast tego układ traktuje się jako zbiór połączonych siecią telekomunikacyjną, równouprawnionych węzłów, z których każdy może pełnić jedną lub kilka spośród wymienionych wyżej ról (rysunek I.6). Sytuację taką spotyka się między innymi w systemach automatyzacji budynków [109].



Rys. I.5: Rozproszony układ regulacji o strukturze hierarchicznej.



Rys. I.6: Rozproszony układ regulacji jako zbiór równouprawnionych węzłów sieciowych.

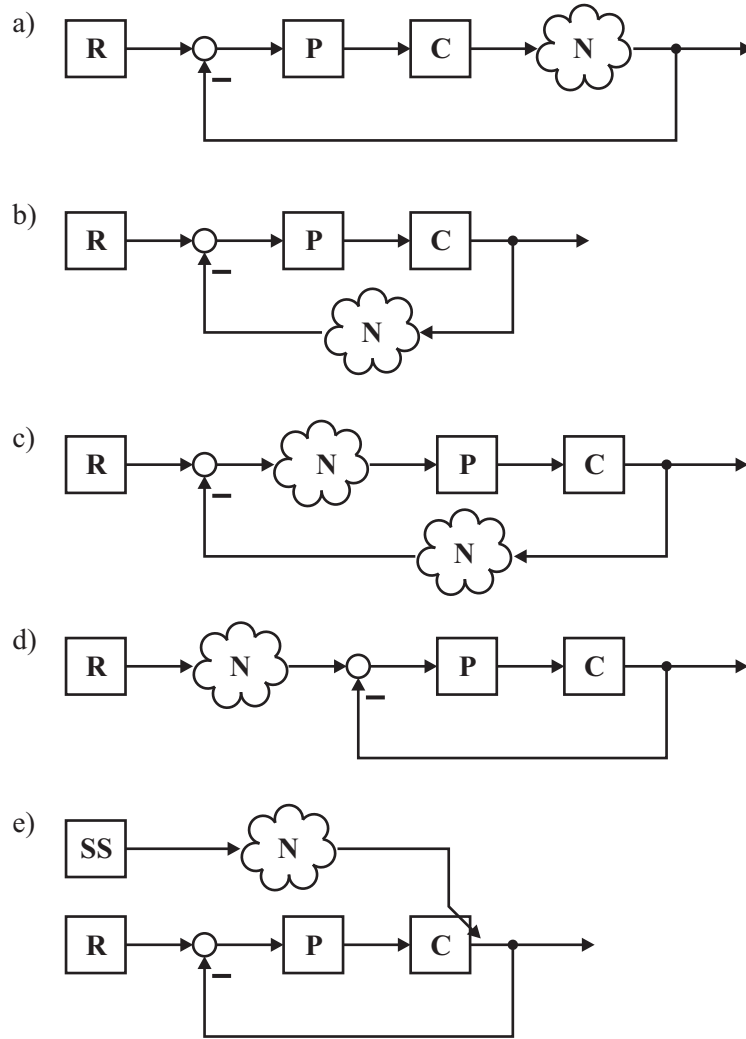
I.3 Formalna definicja rozproszonego systemu sterowania

Poniżej zamieszczono dwie najpopularniejsze definicje rozproszonego systemu sterowania, zaczerpnięte z literatury [77, 127].

Definicja I.1 *Rozproszonym systemem sterowania nazywamy układ sterowania automatycznego, w którym pętla sprzężenia zwrotnego zamyka się przez sieć telekomunikacyjną. [127]*

Definicja I.2 *Rozproszonym systemem sterowania nazywamy układ sterowania automatycznego, którego elementy (regulatory, czujniki, urządzenia wykonawcze), które wyposażono w interfejsy sieciowe, połączone są za pośrednictwem sieci telekomunikacyjnej [77].*

Powyższe definicje można traktować jako równoważne i będą one obowiązywać w dalszej części niniejszej rozprawy. Na rysunkach I.7a–I.7c przedstawiono schematy blokowe przykładowych systemów rozproszonych. Warto tu wspomnieć, że niektórzy badacze wprowadzają odmienną, szerszą definicję rozproszonego układu regulacji jako takiego, w którym przynajmniej jeden z sygnałów (wartość zadana, nastawy regulatora, sterowanie, pomiar) przesyłany jest za pośrednictwem sieci. W myśl tej definicji systemami rozproszonymi są również układy przedstawione na rysunkach I.7d–I.7e, chociaż pętla sprzężenia zwrotnego nie jest w nich zamknięta przez sieć.



Rys. I.7: Schematy blokowe przykładowych rozproszonych systemów sterowania (**N** – sieć telekomunikacyjna, **C** – regulator (kompensator), **P** – obiekt, **R** – zadajnik (źródło wartości zadanej), **SS** – nastawnik (źródło nastaw regulatora)).

Wielu autorów zamiast terminu *rozproszone systemy sterowania* (DCS – *Distributed Control Systems*) stosuje nazwę *sieciowe systemy sterowania* (NCS – *Networked Control Systems*) [30]. Choć w niektórych pracach odmiennie definiuje się oba te pojęcia [63,141] (DCS to system przedstawiony na rysunku I.4, a NCS – na rysunku I.6), my potraktujemy je jako synonimy. Inne spotykane w literaturze nazwy to *rozproszone sieciowe układy sterowania* (DNCS – *Distributed Networked Control Systems*) [98], *systemy sterowania oparte na sieci* (NBCS – *Network-Based Control Systems*) [70] oraz *zintegrowane systemy komunikacji i sterowania* (ICCS – *Integrated Communication and Con-*

trol Systems) [133]. Terminu *Distributed Control System* nie należy mylić z *Distributed Computing System* [73]. Choć oba opisane są przez taki sam akronim (DCS) i w obu występują węzły sieciowe wymieniające dane za pośrednictwem sieci telekomunikacyjnej, to jedynie w przypadku *distributed control system* zasadniczym, jasno określonym celem jest sterowanie.

W niniejszej rozprawie, ilekroć zajdzie potrzeba odróżnienia rozproszonego systemu regulacji od układu, w którym wszystkie sygnały są przesyłane bez pośrednictwa sieci, ten ostatni określany będzie przymiotnikiem *klasyczny*.

I.4 Charakterystyka systemów rozproszonych

Współcześnie najważniejsze (choć nie jedyne) obszary zastosowań rozproszonych systemów sterowania obejmują następujące dziedziny:

1. Automatykacja procesów przemysłowych:
 - (a) sterowanie procesami ciągłymi (przemysł chemiczny),
 - (b) sterowanie procesami wsadowymi,
 - (c) automatyzacja linii produkcyjnych i montażowych (przemysł motoryzacyjny),
 - (d) zarządzanie produkcją i wspomaganie magazynowania.
2. Automatykacja budynków (tak zwane *inteligentne budynki* [80]):
 - (a) sterowanie oświetleniem sztucznym (elektrycznym) i naturalnym (słonecznym),
 - (b) sterowanie wentylacją, ogrzewaniem i klimatyzacją (HVAC – *Heating, Ventilation, Air Conditioning*) [47],
 - (c) kontrola i ograniczenie dostępu, sprzężone z systemem alarmowym,
 - (d) rejestracja czasu pracy personelu,
 - (e) systemy przeciwpożarowe.
3. Układy automatyki pokładowej pojazdów (samochodów, samolotów, statków) [36, 75]:
 - (a) sterowanie pracą silnika,
 - (b) układy antypoślizgowe, wspomagające układ hamulcowy (ABS),
 - (c) nawigacja satelitarna,
 - (d) systemy multimedialne,
 - (e) centralny zamek, elektrycznie opuszczane szyby,
 - (f) klimatyzacja, ogrzewanie i wentylacja.
4. Sterowanie ruchem drogowym w miastach [51].
5. Systemy monitorowania stanu rzek oraz zbierania informacji pogodowych [24].

Rozpiętość terytorialna systemów rozproszonych może być bardzo różna. W przypadku układu automatykacji samochodu osobowego czy obrabiarki sterowanej numerycznie, wynosi kilka metrów; przy automatyzacji budynku lub przemysłowej linii produkcyjnej – kilkaset, a jeśli system rozproszony użyty jest to zbierania danych pogodowych – wiele tysięcy kilometrów. Różne są też sposoby przesyłania danych w systemach rozproszonych oraz rodzaje używanych mediów i protokołów komunikacyjnych. Wykorzystywane są sieci przemysłowe, zwane też magistralami polowymi (*fieldbus*),

sieci „biurowe”, np. Ethernet, Internet, a także łączność bezprzewodowa, na przykład technologia *Wi-Fi* przy małych zasięgach czy GSM/GPRS dla systemów o dużej rozpiętości terytorialnej. Niekiedy w przesyłanie danych zaangażowana jest łączność satelitarna. Różne są też wymagania co do szybkości transmisji, ilości przesyłanych danych i niezawodności systemu. W przypadku sterowania turbiną parową, przerwy w działaniu systemu są niedopuszczalne, natomiast w przypadku systemu zbierającego dane pogodowe, krótkotrwałe przerwy w pracy można zaakceptować.

Sieci telekomunikacyjne stosowane w rozproszonych systemach sterowania można podzielić na dwie podstawowe grupy:

1. Sieci i magistrale przemysłowe (*Control Networks*).
2. Sieci ogólnego przeznaczenia, przewodowe i bezprzewodowe (*Data Networks*).

Pierwsze z nich zapewniają pewną (w znaczeniu: deterministyczną) transmisję w czasie rzeczywistym i przystosowane są do przesyłania z dużą częstotliwością małych porcji danych. Są wobec tego stosowane głównie na poziomie sterowania bezpośredniego, do zbierania danych z czujników pomiarowych oraz wysyłania sterowań do urządzeń wykonawczych. Z kolei sieci ogólnego przeznaczenia nie gwarantują niezawodnej dostawy danych w nieprzekraczalnym czasie, ale mogą przysłać dużymi porcjami znaczne ilości danych. W układach automatyki stosowane są na wyższych poziomach hierarchii – raczej w zadaniach wizualizacji, archiwizacji danych, zarządzaniu, niż w sterowaniu bezpośrednim. Wyjątek stanowi sieć Ethernet, o której powiemy szerzej w podrozdziale I.4.1. W tabeli I.1 zebrano przykładowe typy i podstawowe własności sieci telekomunikacyjnych najczęściej wykorzystywanych w automatyzacji [45].

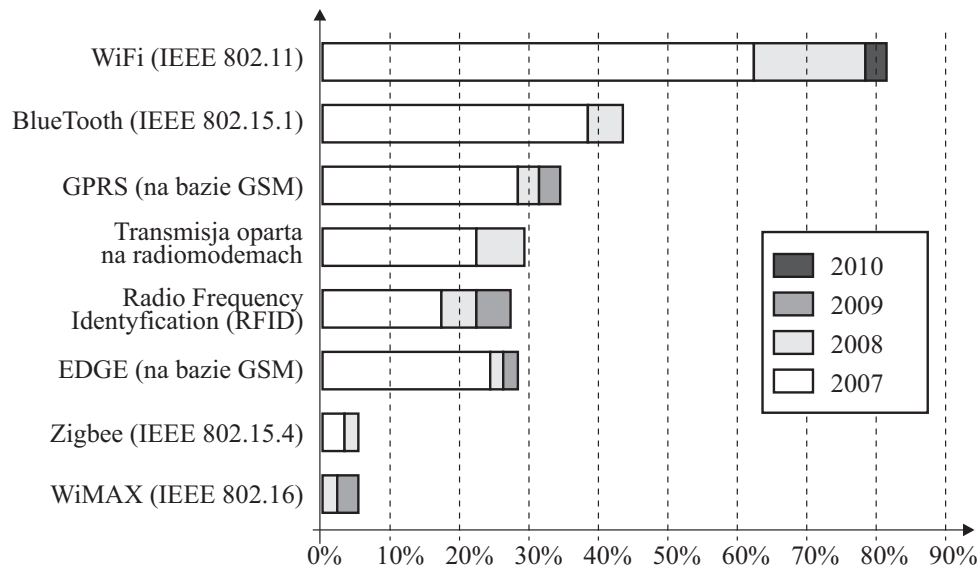
W przemyśle udział klasycznych układów regulacji automatycznej systematycznie maleje. Ustępują one pola systemom rozproszonym. Wśród tych ostatnich natomiast coraz silniejszą pozycję zyskują rozwiązania wykorzystujące łączność bezprzewodową, choć wciąż są w mniejszości. Wykres przedstawiony na rysunku I.8, zaczerpniętym z artykułu [62], przedstawia dane faktyczne oraz prognozy dotyczące popularności konkurencyjnych technologii bezprzewodowych w polskich przedsiębiorstwach.

O coraz powszechniejszym zastosowaniu systemów rozproszonych zadecydowały ich liczne zalety w porównaniu z systemami klasycznymi. Poniżej zebrano najważniejsze z nich:

1. Użycie magistralowej sieci transmisji danych umożliwia często redukcję okablowania i zmniejszenie związanych z nim kosztów.
2. Występująca w systemach rozproszonych decentralizacja sterowania zwiększa odporność całości na awarie poszczególnych składników.
3. Zmiana konfiguracji układu nie wymaga prowadzenia nowych przewodów i ogranicza się do modyfikacji programowych, a nie sprzętowych.
4. Ceny systemów rozproszonych stają się konkurencyjne w stosunku do klasycznych.
5. Ułatwione jest tworzenie hierarchicznej struktury sterowania i integracja z systemami nadrzędnymi.
6. Łatwość rezerwowania (redundowania) układów.

Tab. I.1: Przykłady sieci telekomunikacyjnych stosowanych w rozproszonych systemach sterowania.

Nazwa	Charakterystyka
CAN	Technologia początkowo stosowana głównie do budowy sieci pokładowych w samochodach. Jako medium wykorzystuje skręconą parę przewodów. Zaimplementowano w niej protokół dostępu do medium CSMA/BA (<i>Carrier Sense Multiple Access with Bitwise Arbitration</i>). Ma topologię magistralową. Adresy (a zarazem priorytety) przypisane są wiadomościom, a nie węzłom.
ControlNet	Technologia będąca członkiem rodziny CIP (<i>Common Industrial Protocol</i>). Jako medium sieć ta wykorzystuje kabel koncentryczny ze złączami BNC. Determinizm czasowy komunikacji osiągnięto dzięki ścisłemu harmonogramowaniu transmisji krytycznych czasowo na etapie konfiguracji sieci. Istnieje możliwość pełnej redundancji (rezerwowania) okablowania.
EIB	Sieć z przesyłem danych w trybie <i>peer to peer</i> . Wykorzystuje protokół dostępu do danych CSMA/CA. Dopuszcza trzy topologie: magistralową, gwiazdową, oraz drzewiastą, które mogą być łączone. Maksymalna liczba węzłów w sieci to 57 375. Stosowana w automatyzacji budynków.
Ethernet	Sieć wykorzystująca protokół dostępu do medium CSMA/CD (<i>Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection</i>), nie zapewniający determinizmu czasowego. Popularna, szeroko rozpowszechniona. Osprzęt sieciowy tani, łatwo dostępny, oferowany przez wielu producentów. Występuje w kilku odmianach różniących się użytym medium (przewód koncentryczny, skręcone pary przewodów), topologią (magistralowa, gwiazdowa / drzewiasta) oraz prędkością transmisji (10Mbit/s, Fast, Gigabit, 10 gigabit). Obecnie używana głównie w wersji <i>Switched Ethernet</i> .
EtherNet/IP	Protokół przeznaczony do zastosowań w automatyzacji procesów, bazuje na TCP/IP. Korzysta ze standardowego sprzętu sieciowego Ethernet. Jest jednym z filarów (obok DeviceNet i ControlNet) protokołu CIP (<i>Common Industrial Protocol</i>).
GSM/GPRS	Technologia GPRS (<i>General Packet Radio Service</i>), korzystająca z GSM (<i>Global System for Mobile Communications</i>) umożliwia przesyłanie danych pakietowych za pośrednictwem sieci telefonii komórkowych. Nie jest przeznaczona do zadań automatyki i nie zapewnia determinizmu czasowego. Jej atrakcyjność wynika natomiast ze znacznego zasięgu terytorialnego i bezprzewodowego charakteru, który umożliwia budowanie rozległych systemów sterowania lub akwizycji danych bez konieczności ponoszenia dodatkowych nakładów na infrastrukturę.
Internet	Szeroko rozpowszechniona sieć o praktycznie nieograniczonej rozległości terytorialnej. Cechuje ją różnorodność wykorzystywanych warstw fizycznych, brak gwarancji udanej transmisji, brak odporności na ingerencję osób trzecich.
LIN	Sieć wykorzystywana w motoryzacji do wymiany małych ilości danych z inteligentnymi czujnikami i urządzeniami wykonawczymi. W skład pojedynczego segmentu sieci wchodzi jeden węzeł typu <i>master</i> oraz do szesnastu węzłów typu <i>slave</i> . Wymian danych odbywa się na zasadzie odpytywania. LIN wykorzystywana jest zwykle pomocniczo jako „podsieć” w stosunku do sieci CAN.
LonWorks	Sieć stosowana głównie w automatyzacji budynków. Dopuszcza dowolną (mieszaną) topologię. Jako medium komunikacyjne może wykorzystywać między innymi parę skręconych przewodów, instalację energetyczną, światłowody, łączność radiową i w podczerwieni. Używa protokołu dostępu do danych CSMA/CA (<i>Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance</i>). Dopuszcza różne tryby adresowania, kilka typów transmisji, możliwy jest fizyczny podział sieci na domeny.
PROFINET	Sieć przeznaczona do zastosowań w automatyzacji procesów. Wykorzystuje Fast Ethernet, ale wymaga specjalizowanych układów scalonych w węzłach sieciowych. Korzysta z technologii VLAN. Realizuje przesłania czasu rzeczywistego (<i>Real-Time</i>) z podziałem czasu (szczelinami czasowymi) oraz przesłania niekrytyczne czasowo, korzystając z TCP/IP.
Wireless LAN (WLAN)	Sieć bezprzewodowa, pozwalająca na komunikację w dwóch trybach. Jeden z nich, zwany <i>ad-hoc</i> umożliwia połączenie „jeden do jednego” (<i>peer to peer</i>). By go zrealizować, wystarczą dwa węzły sieci bezprzewodowej. Drugi tryb wykorzystuje punkt dostępowy, dołączony do przewodowej sieci Ethernet. Główne wady to ograniczony zasięg, podatność na zakłócenia i występowanie zaników transmisji. Ochrona danych możliwa jest dzięki mechanizmom szyfrowania.



Rys. I.8: Obecność standardów technologii bezprzewodowych w polskich przedsiębiorstwach (stan faktyczny w roku 2007 i prognozy na lata 2008–2010). Na podstawie [62].

7. Możliwość tworzenia systemów o znacznej rozpiętości terytorialnej.

Z obecnością medium transmisyjnego w układzie sterowania wiążą się też wady. Oto niektóre z nich:

1. Ograniczone są maksymalne długości medium transmisyjnego sieci (kabla) oraz liczba węzłów sieciowych, które mogą z nią współpracować. W układzie regulacji przekłada się to na limitowanie liczby czujników, urządzeń wykonawczych i regulatorów oraz rozpiętości przestrzennej systemu.
2. Każda zmiana konfiguracji układu wymaga użycia zaawansowanych narzędzi programowych.
3. Brak przejrzystości struktury sieci – rozkład przestrzenny sieci nie mówi nic o strukturze logicznej układu regulacji.
4. Wprowadzenie sieci telekomunikacyjnej do pętli sprzężenia zwrotnego układu automatycznej regulacji jest źródłem szeregu ograniczeń, którym podlega przesył sygnałów. Wymieniono je i omówiono w podrozdziale I.4.2. Obecność tych ograniczeń stwarza konieczność stosowania specjalnych algorytmów sterowania, które są tematem niniejszej rozprawy.

I.4.1 Ethernet w automatyce

W ostatnich latach najwięksi producenci systemów automatyki przemysłowej odchodzą od specjalizowanych sieci czasu rzeczywistego na rzecz Ethernetu. Pozwala to na stosowanie zunifikowanych rozwiązań sieciowych w ramach całego przedsiębiorstwa. Wykorzystanie Ethernetu do sterowania budzi szerokie zainteresowanie uczonych i inżynierów [41, 95, 99, 104–106, 111]. Należy jednak pamiętać, że Ethernet nie powstał z myślą o zastosowaniach w automatyzacji procesów i wobec tego nie gwarantuje transmisji z zachowaniem reżimów czasu rzeczywistego. Problem ten po części rozwiązało pojawienie się przełączanego Ethernetu (*Switched Ethernet*) [12, 21, 69], po części zaś – opracowanie przez producentów szeregu modyfikacji protokołów, sprzętu i oprogramowania sieciowego pod kątem zastosowania w przemyśle [53]. W ten sposób powstały między innymi dwa konkurencyjne

systemy sieciowe bazujące na technologii Ethernet: EtherNet/IP oraz PROFINET. Pierwsza z technologii jest rozwijana przez organizację *Open DeviceNet Vendors Association*, zaś druga – przez stowarzyszenie *PROFIBUS & PROFINET International (PI)*.

Spełnienie ostrych reżimów czasu rzeczywistego w sieci PROFINET [37] osiągnięto przez zastosowanie statycznego harmonogramowania zadań transmisji krytycznych czasowo oraz przez zastąpienie (w węzłach sieciowych) popularnych scalonych interfejsów sieci Ethernet układami specjalizowanymi w technologii ASIC (*Application Specific Integrated Circuit*). Zamiana ta musi dotyczyć jednocześnie wszystkich współpracujących elementów sieci. Zwiększa to cenę urządzeń, ale jednocześnie pozwala na odmienne traktowanie pakietów sieciowych niosących informacje czasu rzeczywistego, a odmienne – pakietów niekrytycznych czasowo, które również mogą być przesyłane przez sieć. PROFINET wykorzystuje technologię VLAN (*Virtual Local Area Network*), pozwalającą między innymi na nadawanie poszczególnym pakietom danych różnych priorytetów.

Sieć EtherNet/IP nie bazuje bezpośrednio na Ethernetie, lecz na protokołach UDP/IP oraz TCP/IP, wykorzystywanych powszechnie w sieciach ethernetowych oraz w Internecie [29, 101]. EtherNet/IP jest jednym z filarów (obok DeviceNet i ControlNet) przemysłowego protokołu CIP (*Common Industrial Protocol*), który z punktu widzenia użytkownika pozwala na jednolite traktowanie zadania przesyłu danych, bez względu na typ użytej sieci. Ponieważ EtherNet/IP wykorzystuje popularne w Internecie protokoły UDP i TCP, bazujące na nim systemy mogą mieć praktycznie nieograniczoną rozpiętość terytorialną, wyznaczoną zasięgiem sieci Internet.

EtherNet/IP oraz PROFINET nie są jedynymi rozwiązaniami wykorzystującymi technologię sieci Ethernet. W tabeli I.2, pochodzącej ze strony internetowej <http://www.real-time-ethernet.de>, zebrano najpopularniejsze standardy przemysłowego Ethernetu. Są wśród nich zarówno produkty komercyjne jak i darmowe. Część z nich stworzona została przez wielkie korporacje, a część jest rozwijana na uniwersytetach.

I.4.2 Skutki ograniczeń w transmisji danych

Gdy dwa współpracujące z sobą elementy układu regulacji – na przykład czujnik i regulator – połączone są bezpośrednio za pomocą dedykowanej linii danych, przesył sygnałów między nimi podlega jedynie ograniczeniom związanym z czasem propagacji sygnału. W przypadku sygnałów analogowych (na przykład prądowego $4 \div 20$ mA), regulator otrzymuje praktycznie natychmiastowo i w sposób ciągły w czasie pełną informację o wartości interesującej go wielkości fizycznej. Jeśli jednak na drodze przesyłu sygnału pojawi się sieć telekomunikacyjna, wymiana danych podlegać będzie szeregowi ograniczeń, wpływających pośrednio na jakość regulacji. Dalej wymieniono i scharakteryzowano najistotniejsze z nich:

1. Systemy rozproszone są z natury systemami dyskretnymi.

Dyskretyzacja transmitowanych sygnałów zachodzi zarówno w czasie, jak i co do wartości. Wynika to z cykliczności przesyłaniem danych w sieci i z jej cyfrowego charakteru. Skwantowane próbki sygnału są bowiem przesyłane jako odrębne datagramy (pakiety danych), transmitowane ze skończoną częstotliwością, ograniczoną możliwościami sieci. Dyskretyzacja nie stanowi jednak większego problemu z punktu widzenia zadania sterowania. Zjawisko kwantowania war-

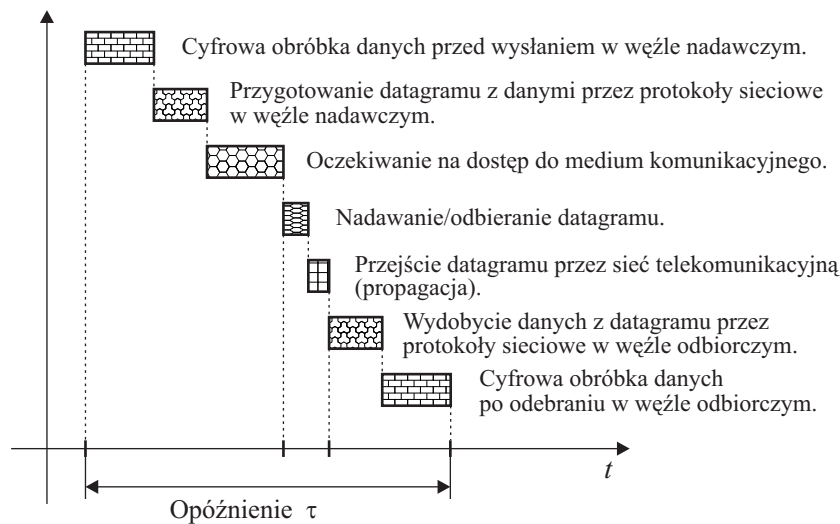
Tab. I.2: Przemysłowe odmiany sieci Ethernet. Źródło: www.real-time-ethernet.de.

Nr	Nazwa	Organizacja / Główny producent
1	EtherCAT (Ethernet for Control Automation Technology)	ETG / Beckhoff
2	Ethernet/IP z CIP Sync	ODVA / Rockwell Automation
3	ETHERNET Powerlink (EPL)	EPG / B&R
4	IEEE 1588: Precision Time Protocol (PTP)	IEEE / -
5	PROFINET	PNO / SIEMENS
6	Modbus RTPS (Real-Time Publish-Subscribe Protocol)	Modbus-IDA / Schneider Electric
7	SERCOS-III	SI / -
8	SynqNet	SynqNet User Group / Motion Engineering Inc. (MEI), USA
9	JetSync	- / Jetter, Germany
10	PowerDNA (Distributed Network Automation and Control)	- / United Electronic Systems (UEI), USA
11	SynUTC	- / Oregano Systems, Austria
12	Switch mit Zeit-Server	- / Ontime Networks, Norway
13	RTnet (Open Source)	- / Real-Time Systems Group of University Hannover, Germany
14	Vnet/IP	- / Yokogawa, Japan
15	TCnet	- / Toshiba, Japan
16	EPA (Ethernet for Plant Automation)	- / ZHEJIANG SUPCON INSTRUMENT, China
17	SafetyNET p	Safety Network International / Pilz, Germany
18	VARAN (Versatile Automation Random Access Network)	VNO / Sigmatek, Austria
19	DART-EC (Deterministic Automotive Real Time – Ethernet Chained)	- / ETAS, Germany
20	RTEX (Realtime Express)	- / Panasonic
21	Mechatrolink III	Mechatrolink Members Association / Yaskawa Electric, Japan
22	HSCI (HEIDENHAIN Serial Controller Interface)	- / Heidenhain, Germany
23	RAPIEnet (Real-time Automation Protocols for Industrial Ethernet)	- / Hanyang University, Korea
24	AFDX (Avionics Full Duplex Switched Ethernet)	- / ARINC, USA
25	TTEthernet	- / TTEch, Austria
26	CC-Link IE (Industrial Ethernet)	CLPA / Mitsubishi

tości sygnałów można bowiem najczęściej bezkarnie zaniedbać, jeśli tylko dostatecznie duża jest rozdzielczość reprezentacji liczb w zapisie binarnym. Z kolei problem dyskretyzacji czasu został rozwiązany przez klasyczną teorię sterowania (systemy dyskretne).

2. Transmisja danych przez sieć wnosi opóźnienia, zazwyczaj zmienne w czasie.

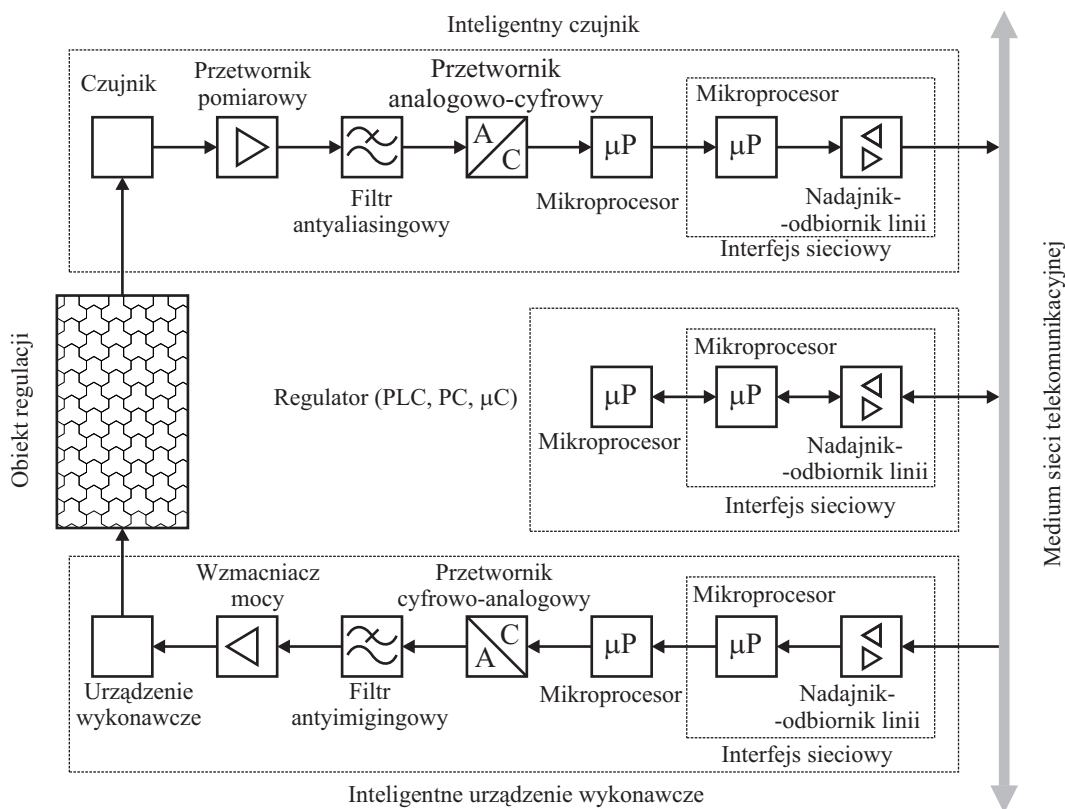
Zmienne opóźnienia komunikacyjne są jednym z głównych problemów występujących w rozproszonych układach sterowania i mogą się przyczyniać do pogorszenia jakości regulacji oraz warunków stabilności. Ich głównymi źródłami są: konieczność oczekiwania przez poszczególne węzły sieci na dostęp do medium transmisyjnego, czas nadawania pakietu oraz czas potrzebny obu węzłom zaangażowanym w przesył pojedynczej porcji danych – nadawczemu i odbiorczemu – na obróbkę pakietu sieciowego. Charakter opóźnień zależy mocno od używanego w danej sieci protokołu kontroli dostępu do medium lub algorytmu harmonogramowania zadań transmisji. Najważniejsze składniki opóźnień sieciowych przedstawiono na rysunku I.9, zaś budowę wewnętrzną typowych węzłów systemu rozproszonego – na rycinie I.10.



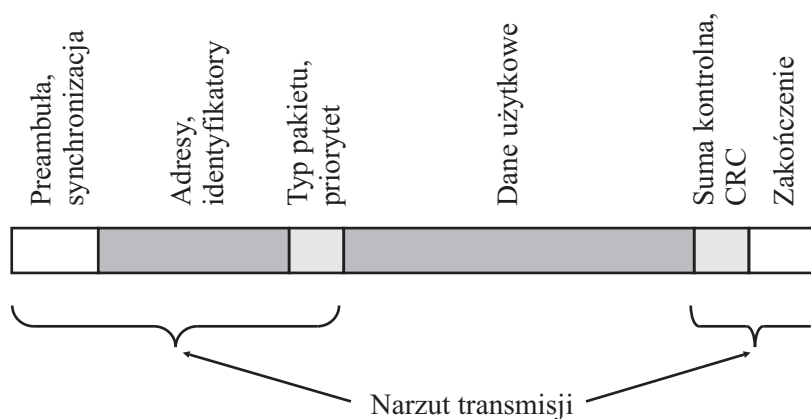
Rys. I.9: Składniki opóźnień komunikacyjnych w rozproszonym układzie regulacji.

Opóźnienia transmisji zależą między innymi od rozmiaru (ilości) użytecznych informacji przesyłanych w pojedynczym pakiecie, ale też od narzutu (*overhead*) dodatkowych danych, umieszczanych w datagramie (rysunek I.11). Narzut ten jest najmniejszy w sieciach przemysłowych, projektowanych z myślą o przesyłaniu małych porcji danych procesowych, zaś największy w sieciach ogólnego przeznaczenia (Ethernet), przewidzianych raczej do transmisji jednorazowo długich ciągów danych.

Opóźnienia transmisji mogą wykazywać różny charakter, w zależności od protokołu sieciowego oraz przyjętego sposobu taktowania (wyzwalania) poszczególnych węzłów systemu (zegarem lub zdarzeniami). Na rysunku I.12 przedstawiono przykładowy przebieg całkowitego opóźnienia na drodze czujnik–sieć–regulator w przypadku, gdy każdy ze współpracujących elementów taktowany jest własnym zegarem, a okresy poszczególnych zegarów są różne [131, 132]. Mimo współmierności okresów taktowania T_S (czujnika), T_N (sieci) i T_C (regulatora), przebieg wynikowych opóźnień transmisji jest nieregularny, choć okresowy i deterministyczny. W przypadku niektórych typów sieci (na przykład Ethernet) z niedeterministycznymi protokołami dostępu



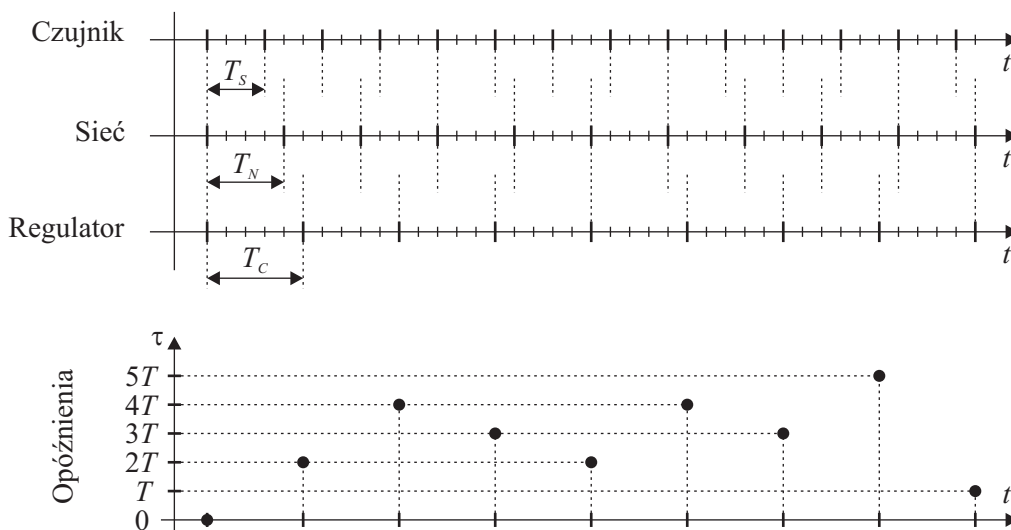
Rys. I.10: Uproszczona budowa wewnętrzna typowych węzłów sieciowych (czujnik, regulator, urządzenie wykonawcze) rozproszonego układu regulacji.



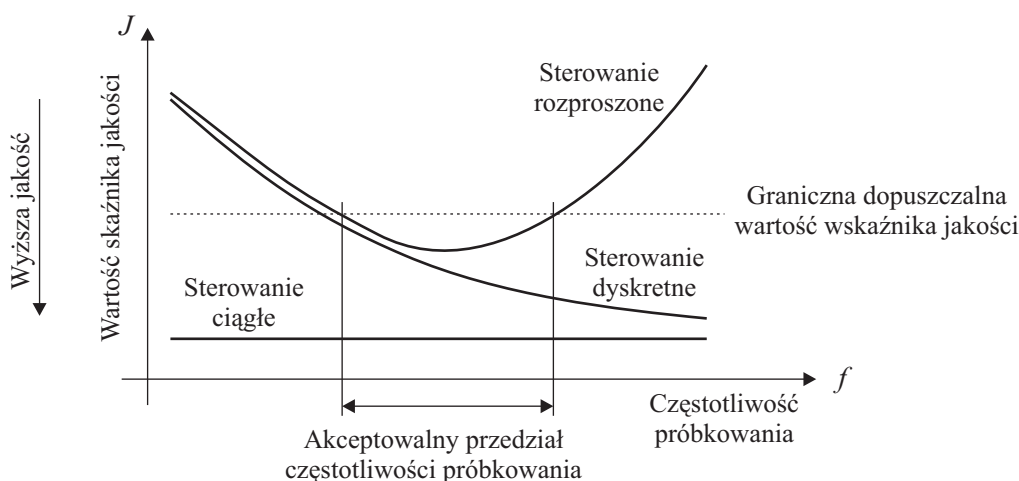
Rys. I.11: Budowa typowego datagramu sieciowego.

do medium (CSMA/CS), przebieg opóźnień jest na tyle skomplikowany i trudny do przewidywania, że przy jego analizie stosuje się najczęściej metody probabilistyczne.

W sieciach, w których harmonogram dostępu do medium nie ma charakteru statycznego, lecz ustalany jest dynamicznie, wielkości i charakter opóźnień mogą istotnie zależeć od obciążenia sieci. W rozproszonym układzie sterowania obciążenie to zależy z kolei wprost od przyjętej częstotliwości próbkowania. Zwiększanie tej częstotliwości z jednej strony polepsza jakość regulacji (ze względu na zwiększenie ilości informacji dostępnej regulatorowi), z drugiej strony, po przekroczeniu pewnej granicznej wartości, może wpłynąć na jej istotne pogorszenie (ze względu na zwiększenie opóźnień transmisji, spowodowanych wzmożonym ruchem w sieci).



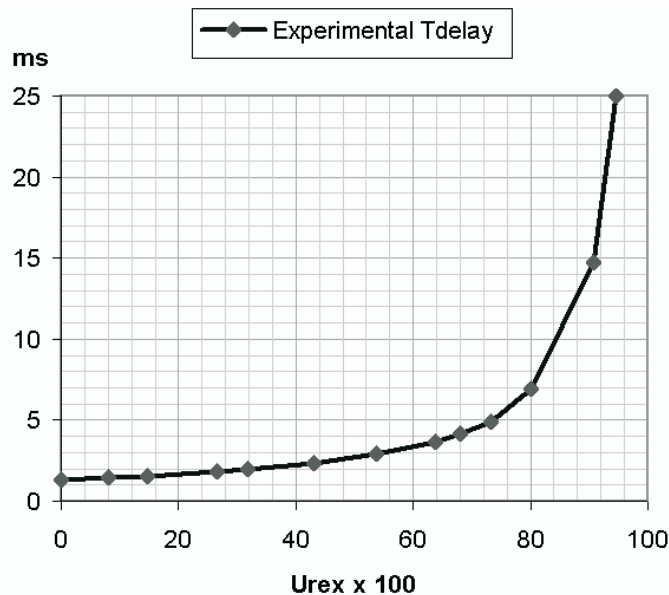
Rys. I.12: Opóźnienia komunikacyjne w układzie z różnymi okresami próbkowania poszczególnych elementów: $T_S = 3T$, $T_N = 4T$, $T_C = 5T$.



Rys. I.13: Porównanie zależności jakości regulacji od częstotliwości próbkowania w klasycznym dyskretnym układzie regulacji i w systemie rozproszonym.

Przypadek ten zilustrowano na rysunku I.13, zaczerpniętym z pracy [79]. Krzywa wyrażająca zależność jakości regulacji od częstotliwości próbkowania, reprezentująca układ rozproszony, posiada tutaj ekstremum (minimum). Jeśli przyjmie się graniczną dopuszczalną wartość wskaźnika jakości w układzie regulacji, to odpowiadająca mu na wykresie pozioma prosta (linia przerywana na rysunku I.13) wraz z krzywą ekstremalną wyznaczą akceptowalny zakres częstotliwości próbkowania.

Przykładem sieci telekomunikacyjnej, w której wielkość opóźnień transmisji istotnie zależy od współczynnika wykorzystania sieci, jest Ethernet, coraz powszechniej stosowany w układach sterowania. Zależność ta, zaczerpnięta z pracy [41], przedstawiona jest na rysunku I.14. Na poziomej osi układu współrzędnych zaznaczono współczynnik zajęcia sieci, zaś na pionowej – opóźnienia transmisji w układzie złożonym z wielu węzłów dołączonych do wspólnego koncentratora (*hub*). Jak widać, w zakresie do 20% wykorzystania sieci opóźnienia zmieniają się nieznacznie, od 20% do 70% wzrost jest wyraźny, lecz umiarkowany, zaś powyżej 70%



Rys. I.14: Zależność opóźnień transmisji od współczynnika wykorzystania sieci Ethernet. Źródło: [41].

następuje gwałtowny ich skok. Nieliniowy charakter przedstawionej zależności wynika z zastosowanego w sieci Ethernet protokołu dostępu do medium (CSMA/CD), który dopuszcza występowanie kolizji. Każda kolizja oznacza z jednej strony nieudaną próbę transmisji, która musi być ponowiona, a z drugiej – zwiększone opóźnienie w przekazywaniu danych.

3. Nieodłączną cechą sieci komputerowych jest możliwość występowania przekłamań transmisji. W ich efekcie niektóre z danych docierają do odbiorcy zniekształcone.
4. Przy zastosowaniu niektórych typów protokołów transmisji, pakiety mogą być dostarczane niechronologicznie. Oznacza to możliwość zamiany kolejności, w jakiej pakiety docierają do odbiorcy.
5. Pakiety są niekiedy dublowane przez sieć. Do odbiornika docierają wówczas dwie lub więcej kopii tego samego, pojedynczego, raz wysłanego pakietu.
6. W niektórych typach sieci występuje zjawisko gubienia (odrzucań) części spośród przesyłanych pakietów. W przypadku odrzucenia odbiorca nie otrzymuje niesionej przez taki pakiet informacji (następuje utrata danych).
7. Gdy ilość danych przeznaczonych do jednorazowego wysłania przekracza maksymalny rozmiar użytecznej części pakietu, konieczne jest stosowanie transmisji wielopakietowej, czyli rozbitcie danych po stronie nadawcy na kilka kolejno wysyłanych porcji oraz złożenie fragmentów w całość po stronie odbiorcy.

Pięć wymienionych wyżej problemów (punkty od 3 do 7) należy do domeny sieciowych systemów telekomunikacyjnych, a mechanizmy umożliwiające ich rozwiązanie zaszyte są najczęściej w protokołach sieciowych, zaimplementowanych jako integralna część oprogramowania dostarczanego użytkownikom przez producenta. Przekłamanie transmisji wykrywane są dzięki dołączaniu do pakietów sieciowych kodów kontrolnych (na przykład CRC). Uporządkowanie pakietów odebranych w zabu-

rzonyj kolejności możliwe jest dzięki dołączeniu w węzle nadawczym do każdego z nich jego numeru kolejnego. Te same numery pozwalają wykryć i odrzucić pakiety zdublowane. W przypadku zagubienia pakietu, odbiorca może zażądać jego retransmisji (o ile pozwalają na to reżimy czasowe). Zadanie podziału zbyt dużych porcji danych na mniejsze fragmenty i ich ponowne zestawienie w całość po przesłaniu przez sieć jest zazwyczaj również realizowane przez protokoły sieciowe.

Jednak nie wszystkie sieci i protokoły zabezpieczają użytkownika przed możliwością wystąpienia podanych wyżej zjawisk. Na przykład protokół UDP/IP, wykorzystywany niekiedy w automatyce, nie posiada zabezpieczeń przed gubieniem, dublowaniem czy niechronologicznym dostarczaniem pakietów. W takim przypadku zadanie wykrywania i obsługi tych zdarzeń spoczywa na aplikacji użytkownika, która musi być wobec tego rozbudowana o odpowiedni kod, dodany do program realizującego zasadnicze zadanie sterowania automatycznego.

Poniżej wymieniono dalsze ograniczenia wpływające na jakość regulacji w rozproszonych układach sterowania:

8. W systemach rozproszonych wykorzystujących łączność bezprzewodową (BlueTooth, Wireless) mogą zdarzać się okresowe przerwy w transmisji. Wywoływane są one głównie zmianą położenia węzłów sieciowych, które mogą się w jej wyniku znaleźć w „cieniu” radiowym. Przyczyną przerw mogą też być poruszające się przeszkody lub zmienne warunki propagacji fal radiowych w środowisku. Układ regulacji wykorzystujący łączność bezprzewodową, zwłaszcza składający się z mobilnych węzłów sieciowych, powinien być tak zaprojektowany, by zdalny węzeł współpracujący z obiektem regulacji, straciwszy łączność z odległym regulatorem, był w stanie w czasie trwania przerwy w transmisji samodzielnie zapewnić bezpieczną pracę obiektu.
9. Przepustowość sieci, wyrażona największą liczbą bitów danych, które mogą być przesłane w jednostce czasu, jest ograniczona.
10. Częstotliwość, z jaką mogą być przesyłane kolejne pakiety danych, jest ograniczona.

Dwa podane wyżej limity (punkty 9 i 10) przekładają się w układzie regulacji na ograniczenie częstotliwości próbkowania sygnałów wyjściowych obiektu oraz częstotliwości przesyłania nowych wartości sterowań. W przypadku, gdy jedna sieć telekomunikacyjna współdzielona jest między kilka odrębnych układów regulacji, zachodzi często konieczność zróżnicowania częstotliwości próbkowania poszczególnych systemów i kompromisowego podziału między nie ograniczonych zasobów sieci.

11. Niejednoczesne dostarczanie pakietów danych próbkowanych jednocześnie, a pochodzących z różnych czujników współpracujących z tym samym wielowymiarowym obiektem regulacji.

Zjawisko to związane jest wprost z limitami podanymi w dwóch poprzedzających punktach. Efektem ograniczonej przepustowości sieci lub limitowanej częstotliwości przesyłań jest niemożność jednoczesnego dostarczenia do regulatora informacji docierającej z kilku niezależnych czujników. Stwarza to konieczność stosowania algorytmów kompensujących wynikające stąd przesunięcia czasowe.

I.5 Projektowanie rozproszonych układów regulacji

Typowy element rozproszonego układu regulacji realizuje zadanie sterowania, będąc jednocześnie węzłem sieci telekomunikacyjnej, a w wielu przypadkach jest on zaimplementowany jako system

komputerowy czasu rzeczywistego. Dlatego przy projektowaniu rozproszonych układów sterowania konieczne jest wykorzystanie i połączenie wiedzy z następujących trzech dyscyplin:

1. Teorii sterowania.
2. Telekomunikacji.
3. Komputerowych systemów czasu rzeczywistego.

Warto w tym miejscu wspomnieć, że rozproszone systemy sterowania nie są jedynym polem, na którym teoria sterowania spotyka się z telekomunikacją. Okazuje się bowiem, że typowe algorytmy wykorzystywane w automatyce do sterowania obiektami regulacji mogą znaleźć również zastosowanie w sterowaniu sieciami telekomunikacyjnymi. Przykłady znaleźć można w pracach [2] oraz [83], gdzie opisano, jak predyktor Smitha pomaga zapobiegać zatorom komunikacyjnym w sieci ATM.

O jakości pracy rozproszonego układu regulacji decyduje zarówno zastosowany w nim algorytm sterowania, jak i algorytm organizujący przesył danych w sieci telekomunikacyjnej (dostępu do medium bądź harmonogramowania zadań transmisji). Wymaganą jakość sterowania w takim systemie można osiągnąć na kilka różnych sposobów:

1. Najprostsza metoda polega na zaprojektowaniu układu regulacji bez uwzględnienia obecności sieci, z wykorzystaniem klasycznych narzędzi teorii sterowania. W podejściu tym projektant godzi się z nieuchronnym pogorszeniem własności układu, wynikającym z wprowadzenia do niego sieci telekomunikacyjnej. Jest to podejście mocno zachowawcze, wymagające zapewnienia znacznego zapasu stabilności, co przekłada się zazwyczaj (w układach regulacji z obiektami asymptotycznie stabilnymi) na małe wartości wzmocnień regulatora.
2. Inny sposób postępowania polega na doborze typu i struktury sieci lub modyfikowaniu protokołów transmisji tak, by do minimum ograniczyć niekorzystne zjawiska. Algorytmy sterowania pozostają takie same jak w poprzednim przypadku, ale wpływ zjawisk sieciowych na jakość regulacji jest pomniejszony. Tutaj wykorzystuje się nie tylko wiedzę z teorii sterowania, ale też z zakresu telekomunikacji bądź harmonogramowania zadań.
3. Kolejne rozwiązanie polega na przyjęciu sieci telekomunikacyjnej „taką, jaka jest” i zastosowaniu zmodyfikowanych algorytmów sterowania, przy projektowaniu których uwzględnia się obecność sieci ze wszystkimi jej własnościami. Dzięki temu algorytmy te potrafią kompensować, w większym lub mniejszym stopniu, wpływ niekorzystnych zjawisk sieciowych. Algorytmy sieciowe pozostają przy tym niezmienione.
4. Ostatni ze sposobów polega na jednoczesnym projektowaniu algorytmu sterowania procesem i algorytmu sterowania ruchem w sieci telekomunikacyjnej. Podejście to pozwala na wprowadzenie powiązań między algorytmami i uzależnieniu pracy każdego z nich od stanu drugiego.

Pierwsze z opisanych rozwiązań jest najprostsze, jednak wiąże się z niepełnym wykorzystaniem dostępnych środków. By wpływ zjawisk transmisyjnych był pomijalny, trzeba bowiem stosować częstotliwości próbkowania dużo mniejsze od maksymalnych, wynikających z przepustowości sieci. Atrakcyjność tej metody wypływa przede wszystkim z możliwości użycia w niezmienionej postaci klasycznych algorytmów sterowania oraz metod doboru nastaw regulatorów.

Zastosowania drugiego rozwiązania są ograniczone, gdyż często nie istnieje możliwość ingerencji w firmowe oprogramowanie sieciowe, a przed modyfikacją struktury sieci powstrzymują względy ekonomiczne. Co więcej, zmniejszenie wpływu sieci na jakość sterowania tą metodą możliwe jest tylko do pewnych granic.

Trzeci sposób umożliwia dobre wykorzystanie możliwości sieci bez konieczności ingerowania w mechanizmy jej działania, ale wymaga użycia algorytmów sterowania świadomych obecności sieci i potrafiących kompensować jej niekorzystny wpływ. Atrakcyjność tej metody wynika z większej łatwości jej implementacji w stosunku do metody pierwszej. O ile bowiem protokoły sieciowe są zazwyczaj „zaszyte” bądź w specjalizowanych układach scalonych, użytych w interfejsach komunikacyjnych, bądź w jądrach systemów operacyjnych zarządzających węzłami sieciowymi, o tyle algorytmy sterowania dopuszczają dużą swobodę modyfikacji, są bowiem zaimplementowane jako procesy systemu operacyjnego, pracujące w przestrzeni użytkownika. Ten właśnie sposób jest tematem niniejszej rozprawy.

Ostatnia z wymienionych metod, zwana współprojektowaniem (*co-design*), łączy w sobie możliwości dwóch wcześniejszych, wprowadzając jednocześnie nową jakość do dziedziny systemów rozproszonych [13, 14, 64, 74]. Z jednej strony daje ona potencjalnie największe możliwości poprawy jakości i odporności regulacji. Z drugiej strony, jako metoda najbardziej zaawansowana, jest zarazem najbardziej złożona w analizie i zarazem najkłopotliwsza w realizacji.

Tematyka zasadniczej części niniejszej rozprawy odpowiada trzeciej z wymienionych powyżej metod poprawy jakości regulacji w układach rozproszonych. W metodzie tej nie ingeruje się w protokoły sieci telekomunikacyjnej, ale za to wykorzystuje się pewną wiedzę o własnościach sieci, projektując algorytmy sterowania częściowo uodpornione na jej niekorzystne oddziaływanie.

I.5.1 Wykorzystanie modeli matematycznych

Do zaprojektowania układu regulacji, skutecznie realizującego postawione mu cele, konieczna jest znajomość modelu matematycznego sterowanego procesu [35, 114]. Model taki w rozproszonym systemie sterowania może być użyty na dwa sposoby:

1. Jednorazowo, na etapie projektowania regulatora, dla doboru (optymalnych) nastaw, gwarantujących zachowanie asymptotycznej stabilności układu regulacji.
2. Ustawicznie, podczas pracy układu regulacji, dla estymacji (odtwarzania, predykcji) nieznanych sygnałów.

W pierwszym z wymienionych przypadków, model obiektu wykorzystywany jest niejako w trybie *off-line*, w drugim – *on-line*. W pierwszym wariantcie model jest używany przez regulator jedynie pośrednio, wyłącznie podczas strojenia. W drugim wariantcie model wykorzystuje się bezpośrednio – jest on wbudowany w algorytm regulacji i służy estymowaniu nieznanymi sygnałów (stanu, wyjścia, sterowania). Technika ta ma zastosowanie, gdy wymagany sygnał nie jest wprost dostępny do pomiaru (odtwarzanie) lub gdy jest zakłócony (filtracja), dociera z opóźnieniem (predykcja) lub nieregularnie. Czyni ją to szczególnie atrakcyjną w przypadku systemów rozproszonych, gdzie zazwyczaj występują opóźnienia komunikacyjne, a niekiedy też zjawisko odrzucania pakietów danych. Klasycznymi przykładami rozwiązań wykorzystujących model obiektu w trybie *on-line* są:

filtr Kalmana i obserwator Luenbergera [86], predyktor Smitha [121,122,143], struktura sterowania z wewnętrznym modelem (IMC – *Internal Model Control*) [76] oraz regulacja predykcyjna (MPC – *Model Predictive Control*) [115].

Modele wykorzystywane w automatyce dzielą się na parametryczne (równania stanu, transmitancja skalarna lub macierz transmitancji) i nieparametryczne (odpowiedź skokowa, odpowiedź impulsowa, macierz dynamiczna) [35,114,115]. Mogą one opisywać własności dynamiczne obiektu lub – w wersji uproszczonej – wyłącznie zależności statyczne (charakterystyka przejściowa). Do zastosowań w projektowaniu regulatorów oraz w estymacji sygnałów najbardziej pożądane są modele parametryczne w postaci równań stanu. Reprezentują one zarówno własności dynamiczne jak i statyczne obiektu, mogą być użyte do opisu obiektów liniowych jak i nieliniowych i wreszcie modelują zarówno obiekty SISO jak i MIMO (wielowymiarowe). Są one jednak zarazem najtrudniejsze do identyfikacji, zwłaszcza wówczas, gdy wymagany jest model strukturalny [114], którego struktura odzwierciedla budowę fizyczną obiektu.

Ze względu na charakter czasu wyróżnia się modele ciągłe i dyskretne. Większość procesów przemysłowych w sposób naturalny modelowana jest zależnościami z czasem ciągłym. Jeśli do sterowania takich procesów użyte zostaną regulatory cyfrowe, to stosowane w nich próbkowanie sygnałów (dyskretyzacja w czasie) nadaje układowi charakter dyskretno-ciągły. Analizę takiego układu można istotnie uprościć, traktując obecny w nim obiekt jako dyskretny w czasie [45]. Jeśli współpracujące z obiektem czujniki i urządzenia wykonawcze pracują synchronicznie (z jednakową częstotliwością i bez przesunięcia fazy) i w układzie nie występują opóźnienia, to uzyskany w wyniku „dyskretyzacji” model matematyczny obiektu jest stacjonarny (o ile stacjonarny był wyjściowy model ciągły), a oba modele mają ten sam rząd. W innych przypadkach (brak synchronizacji urządzeń wykonawczych i czujników, występowanie stałych lub zmiennych opóźnień), zastępczy model dyskretny może być niestacjonarny, a jego rząd może przewyższać rząd wyjściowego modelu z czasem ciągłym (ze względu na wykorzystanie metody rozszerzonej przestrzeni stanu) [46].

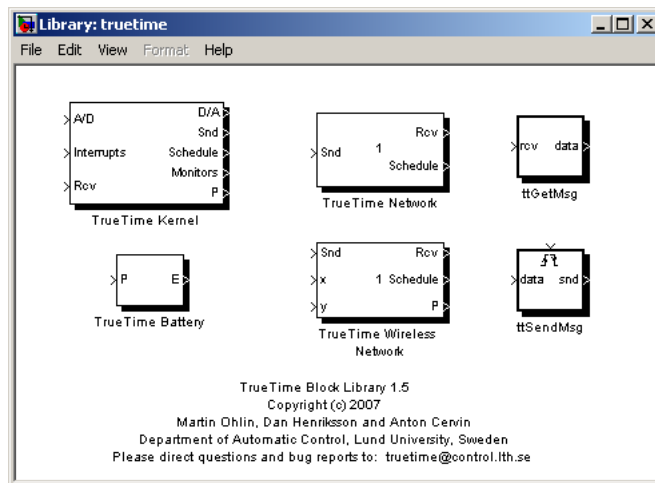
I.5.2 Komputerowe symulatory systemów rozproszonych

Zależności występujące pomiędzy elementami, nawet w niezbyt rozbudowanych rozproszonych systemach sterowania, są często tak złożone, że ich analiza teoretyczna jest niezwykle skomplikowana, a niekiedy wręcz niemożliwa. W takich przypadkach znaczną pomoc w badaniu własności układu, przed jego wdrożeniem, stanowią narzędzia do symulacji komputerowych. Wprawdzie analiza wyników symulacji nie zawsze może zastąpić rzetelną analizę teoretyczną (zwłaszcza jeśli w systemie występują zjawiska losowe), to jednak często ujawnia ona podstawowe własności systemu i w zastosowaniach niekrytycznych może być uznana za wystarczającą.

Rozproszony system regulacji jest z jednej strony układem sterowania automatycznego, z drugiej – systemem telekomunikacyjnym. Istnieje wiele symulatorów sieci, zarówno komercyjnych (na przykład NetSim [81], QualNet [3]), jak i darmowych (na przykład ns-2 [55,57], OMNeT++ [124]). Podobnie, dostępne są symulatory, które można zastosować dla układów automatycznej regulacji (na przykład *Simulink*, będący składnikiem komercyjnego pakietu obliczeń numerycznych MATLAB [96,140] lub darmowy *Scicos*, współpracujący z pakietem *Scilab* [119]). Symulatory te umożliwiają użytkownikowi pracę w środowisku graficznym, w którym buduje on odpowiednio schemat

blokowy analizowanej sieci telekomunikacyjnej lub układu regulacji automatycznej. Żaden z wymienionych symulatorów – w swej podstawowej wersji – nie pozwala jednak na jednoczesną symulację protokołów transmisji i algorytmów sterowania, niezbędną dla zbadania pracy rozproszonego układu regulacji. Taka równoległa symulacja, która pozwoliłaby zbadać wpływ sieciowego przesyłu próbek sygnałów na jakość regulacji, określana jest nazwą *co-simulation* [13,25,116].

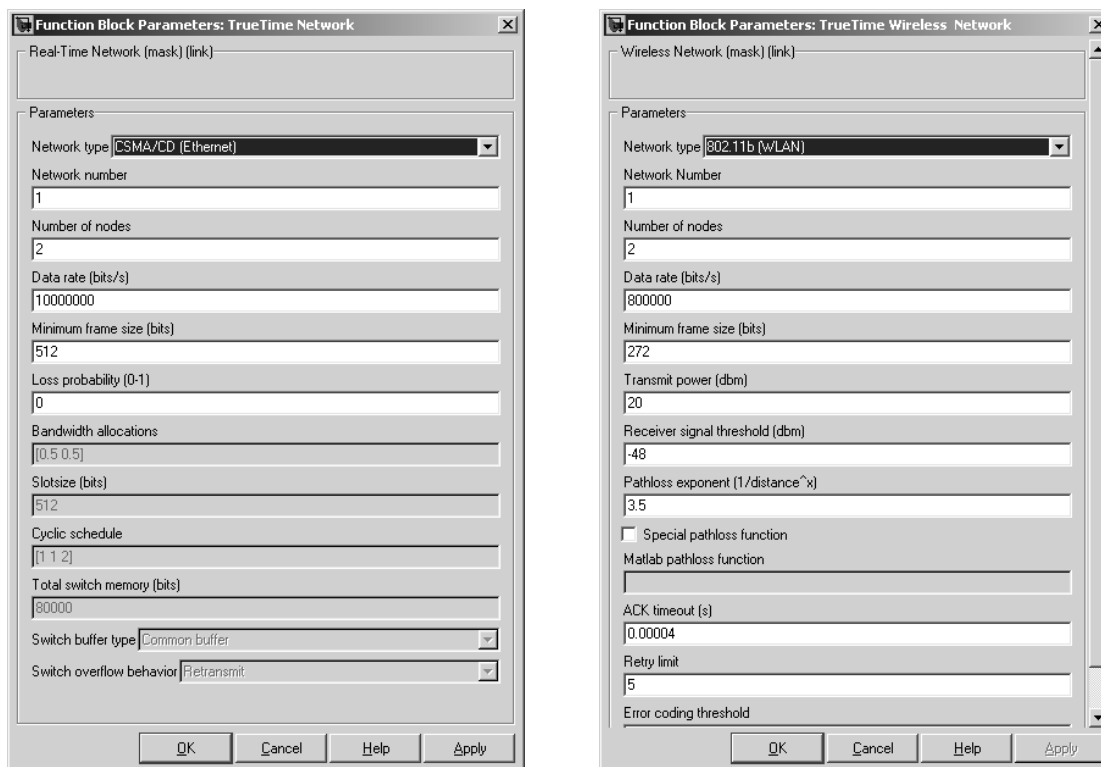
Jedno z narzędzi umożliwiających taką symulację zostało stworzone w *Department of Automatic Control w Lund Institute of Technology* w Szwecji i nosi nazwę *TrueTime Library* [18–20,58]. Ma ono postać przybornika (*toolbox*) przeznaczonego dla pakietu MATLAB/*Simulink*. Choć sam przybornik jest darmowy, to jednak niezbędny dla jego działania pakiet MATLAB to produkt komercyjny. Po zainstalowaniu w systemie MATLAB, biblioteka *TrueTime* integruje się z graficzną nakładką do symulacji *Simulink*. Pozwala to użytkownikowi umieszczać w schemacie blokowym układu regulacji, budowanym w *Simulinku*, bloki reprezentujące sieci telekomunikacyjne (przewodowe lub bezprzewodowe). Bloki te kopiuje się z głównego okna graficznego biblioteki, przedstawionego na ilustracji I.15. Istnieje możliwość wyboru typu sieci telekomunikacyjnej (CSMA/CD – Ethernet, CSMA/AMP



Rys. I.15: Główne okno przybornika *TrueTime Library*.

– CAN, Round Robin, TDMA, FDMA, Switched Ethernet, 802.11b – WLAN, 802.15.4 – ZibBee) oraz podania parametrów jej pracy (ilustracja I.16).

Możliwości *TrueTime Library* nie ograniczają się tylko do symulacji sieci. Dostępne są w niej narzędzia umożliwiające modelowanie kompletnych i samodzielnych mikroprocesorowych systemów czasu rzeczywistego, wyposażonych w interfejsy sieci telekomunikacyjnych oraz mechanizmy wymiany danych z otoczeniem (blok *TrueTime Kernel* na ilustracji I.15). System taki może więc dogodnie reprezentować węzeł sieci telekomunikacyjnej, spełniający rolę elementu układu regulacji (inteligentnego czujnika, urządzenia wykonawczego bądź regulatora). Badacz korzystający z przybornika *TrueTime* ma możliwość precyzyjnego zdefiniowania zadań symulowanego systemu czasu rzeczywistego. Do jego dyspozycji pozostają typowe mechanizmy komunikacji i synchronizacji międzyzadaniowej (semafony, komunikaty itd.), może on również wybrać metodę harmonogramowania zadań w systemie spośród kilku gotowych lub też stworzyć swój własny algorytm. Zadania mogą być zakodowane zarówno w języku MATLAB-a (i zapisane w M-plikach), jak i w języku C (wymagana jest wówczas ich kompilacja przed symulacją). W jednym modelu *Simulinka* można umieścić wiele bloków repre-



Rys. I.16: Okna dialogowe pozwalające zadać parametry pracy symulowanych sieci.

zientujących odrębne systemy czasu rzeczywistego oraz wiele bloków modelujących niezależne sieci telekomunikacyjne. Pracę tych bloków monitoruje się w prosty sposób, korzystając z ich sygnałów wyjściowych, które niosą informację odpowiednio o stanie każdego z zadań systemu czasu rzeczywistego oraz o stanie sieci. Sygnały te mają charakter wektorowy (po jednym elemencie dla każdego odrębnego zadania) i przyjmują jedną z kilku możliwych wartości, odpowiadających możliwym stanom zadań (lub sieci).

Pakiet MATLAB/Simulink, uzupełniony o bibliotekę *TrueTime Library*, stanowi wygodne narzędzie umożliwiające prowadzenie współsymulowania (*co-simulation*) rozproszonych układów sterowania, w ramach jednego, spójnego środowiska i bez konieczności użycia dodatkowych, zewnętrznych symulatorów. Jest ono szczególnie dogodnie do symulowania pracy układów, które zaprojektowano stosując metodę *co-design*.

I.6 Teza rozprawy

Autor rozprawy stawia następującą tezę:

Wykorzystanie prawidłowo zidentyfikowanego modelu procesu w układzie regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego zamkniętą przez sieć telekomunikacyjną umożliwia zastosowanie algorytmów sterowania częściowo uodpornionych na efekty wnoszone przez rozproszony charakter układu regulacji.

Przez *uodpornienie* układu regulacji rozumiemy taki dobór algorytmu sterowania, który zapewni stabilność układu (i wymaganą jakość regulacji) mimo występowania określonych niekorzystnych zjawisk (opóźnienia przesyłu, odrzucanie pakietów), związanych z obecnością sieci telekomunikacyjnej w pętli sprzężenia zwrotnego. Odwołując się do rysunku I.13, można powiedzieć,

że celem uodpornienia jest zmniejszenie odstępów między dwiema krzywymi przedstawionymi na wykresie, reprezentującymi jakość sterowania dyskretnego w układzie klasycznym oraz w układzie rozproszonym.

Podana wyżej teza znajdzie potwierdzenie w zasadniczej części pracy, ujętej w rozdział *Algorytmy sterowania w systemach rozproszonych*. Odniesienia do niej zawarte są również w końcowym rozdziale *Podsumowanie*.

I.7 Metodyka badań

Prezentowane w niniejszej rozprawie algorytmy sterowania w systemach rozproszonych bazują na wykorzystaniu modeli matematycznych. Są to modele liniowe, w postaci równań stanu lub transmittancji. Wersje z czasem dyskretnym uzyskiwane są przez „dyskretyzację” modeli ciągłych w czasie. Modele wykorzystywane są zarówno na etapie projektowania układów (dobór nastaw), jak i podczas ich pracy (odtwarzanie i predykcja), a także podczas symulacji komputerowych i wreszcie dla realizacji techniki *hardware in the loop*.

Każdemu z przedstawionych w pracy rozwiązań towarzyszy analiza teoretyczna, odnosząca się głównie do zagadnienia stabilności oraz jakości regulacji w układzie. Ilustracji działania systemu i zarazem potwierdzeniu skuteczności użytego algorytmu sterowania służą zamieszczone w rozprawie wyniki symulacji komputerowych. Symulacje prowadzono z użyciem pakietu obliczeń numerycznych MATLAB/*Simulink* [96, 140], wykorzystując bądź napisane w tym celu M-pliki, bądź modele blokowe zestawione w *Simulinku*. Oprócz symulacji dla kilku układów sterowania przeprowadzono eksperymenty w warunkach laboratoryjnych. Wykorzystywano bądź fizyczne modele obiektów sterowania (serwomechanizm prądu stałego, układ aerodynamiczny) i rzeczywiste sieci telekomunikacyjne (Ethernet), bądź ich modele symulacyjne pracujące w czasie rzeczywistym (technika *hardware in the loop*). Kody źródłowe (w języku C) aplikacji czasu rzeczywistego, stosowanych podczas doświadczeń, pisano ręcznie albo tworzono automatycznie, na podstawie schematów blokowych zestawionych w *Simulinku*. Wykorzystywano do tego procedurę automatycznej generacji kodu, zaimplementowaną w przybornikach RTW (*Real-Time Workshop*) oraz RTWT (*Real-Time Windows Target*). Aplikacje te pracowały bądź w środowisku czasu rzeczywistego RTWT, w systemie operacyjnym *MS Windows*, bądź pod kontrolą systemu czasu rzeczywistego *Real-Time Application Interface*, współpracującego z systemem operacyjnym *Linux*. Wyniki symulacji oraz eksperymentów zaprezentowane są w formie zestawień tabelarycznych oraz wykresów.

I.8 Uwagi dotyczące terminów stosowanych w pracy

Dla uniknięcia niejednoznaczności warto przytoczyć określenia sześciu podstawowych terminów, które będą stosowane w pracy. Są to: *system* lub *układ sterowania automatycznego*, *sterowanie*, *regulacja*, *estymacja* i *predykcja*.

System sterowania automatycznego oznacza układ sterowania złożony z wielu obiektów sterowania i automatycznych urządzeń sterujących, wzajemnie oddziałujących na siebie [27]. Terminy *system* i *układ* będą traktowane w pracy jako synonimy i stosowane zamiennie.

Sterowanie to działanie na określony układ, mające na celu zapewnienie jego zachowania się w żądany sposób [35, strona 18], [38, strona 71]. *Regulacja* zaś to sterowanie w systemie zamkniętym, z pętlą sprzężenia zwrotnego [35,38]. Znaczenie pojęcia *sterowanie* jest ogólniejsze w stosunku do *regulacji*. Choć w rozprawie rozpatrywane będą głównie układy *regulacji* (ze sprzężeniem zwrotnym), nazywać je będziemy niekiedy układami *sterowania*, gdyż w świetle powyższych definicji nie stanowi to błędu.

Terminy *estymacja* i *predykcja* definiowane są najczęściej w kontekście probabilistycznym i stochastycznym [15, strony 797 i 801], [27]. W odniesieniu do procesów stochastycznych, *predykcję* traktuje się czasem jako szczególny przypadek *estymacji* [72, strona 146], [123, strona 82]. Obie nazwy bywają jednak stosowane również w przypadkach, gdy nie jest akcentowany losowy charakter zjawisk. W pracy [86, strona 89] terminem *estymata stanu* określono wynik asymptotycznego odtwarzania stanu systemu dynamicznego przy pomocy obserwatora Luenbergera. Nie zakładano tam występowania zakłóceń sygnałów ani niezgodności modelu z obiektem, a jedynie przyjęto, że nie jest znany stan początkowy obiektu. Z kolei w pracy [115, strony 114 i 115] autor pisze o *predykowaniu* (*przewidywaniu*, *prognozowaniu*) sygnału wyjściowego obiektu dynamicznego, również nie stawiając wymagania obecności losowych zakłóceń czy niezgodności modelu z obiektem.

W niniejszej pracy termin *estymacja stanu* stosowany będzie między innymi w odniesieniu do asymptotycznego odtwarzania stanu przy pomocy obserwatora Luenbergera oraz technik pokrewnych (patrz podrozdział III.2.2), zarówno w obecności zakłóceń, jak i przy ich braku. Z kolei określenie *predykcja* (*przewidywanie*, *prognozowanie*) *stanu* użyte zostanie w przypadku, gdy na podstawie znajomości stanu x obiektu w chwili czasu t_1 (i ewentualnie w chwilach wcześniejszych), przewidywana jest wartość stanu w chwili t_2 , późniejszej w stosunku do t_1 ($t_2 > t_1$). Tu również określenie to odniesiemy zarówno do przypadku z zakłóceniami bądź niepewnością modelu, jak i bez nich.

Predykcja ma miejsce zarówno wówczas, gdy na podstawie terażniejszości (i ewentualnie przeszłości) prognozujemy przyszłość, jak i w sytuacji, gdy na podstawie przeszłości staramy się przewidzieć nieznaną terażniejszość. W systemach rozproszonych ten ostatni przypadek zachodzi, gdy na podstawie danych pomiarowych opóźnionych z powodu transmisji określamy estymatę aktualnej wartości stanu systemu. *Predykcję* nazywać będziemy niekiedy *estymacją*. Uzasadnienie takiego zamiennego użycia terminów można znaleźć między innymi w pracy [110, strona 126], gdzie (dla systemów z czasem dyskretnym) jednokrokową *predykcję* nazywa się *estymacją a priori*.

Rozdział II

Stan wiedzy

Ponieważ na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat rozproszone systemy sterowania cieszyły się (i wciąż cieszą) rosnącym zainteresowaniem naukowców oraz inżynierów, znaczny jest zasób dostępnych publikacji traktujących na ich temat. Niniejszy rozdział stanowi przegląd literatury i prezentuje podstawowe trendy w interesującej dziedzinie. Z konieczności nie jest on kompletny ani wyczerpujący – nie pozwala na to charakter i cel niniejszego opracowania. Zamiast tego Autor wybrał kilka przykładów, które w jego subiektywnej ocenie są najciekawsze, a zarazem najbardziej reprezentatywne dla poszczególnych kierunków badań w domenie systemów rozproszonych.

Wymagane własności rozproszonych układów regulacji można osiągać na kilka sposobów, wymienionych w podrozdziale I.5. Trzy spośród podanych tam metod zostaną zilustrowane przykładami zebranymi w następujących podrozdziałach.

II.1 Doskonalenie metod transmisji w sieciach telekomunikacyjnych

Jeden ze sposobów poprawy jakości regulacji w systemach rozproszonych polega na modyfikowaniu protokołu transmisji bądź struktury i konfiguracji sieci telekomunikacyjnej w taki sposób, by wpływ jej obecności na pracę układu regulacji automatycznej był jak najmniejszy. W podejściu tym stosuje się w niezmienionej postaci standardowe algorytmy sterowania. W trzech kolejnych podrozdziałach opisane są przykłady użycia tej techniki w odniesieniu do sieci Ethernet, która z jednej strony zyskuje coraz większą popularność w automatyce, a z drugiej – stwarza możliwości znaczącej poprawy jakości sterowania po zastosowaniu omawianej metody.

II.1.1 RETHER – Real-Time Ethernet

W pracy [125] opisano protokół sieciowy RETHER (*Real-Time Ethernet*), który zapewnia determinizm przesłań w sieci Ethernet. By go zastosować, należy wyposażyć wszystkie węzły sieciowe współpracujące z danym segmentem sieci w odpowiednie sterowniki programowe (*driver*). Nie jest natomiast potrzebna wymiana standardowych, sprzętowych kart sieciowych. Dopóki żaden z węzłów nie zgłasza potrzeby przesyłania danych w trybie czasu rzeczywistego, wszystkie węzły realizują standardowy dla sieci Ethernet algorytm dostępu do medium CSMA/CD. Jeśli natomiast któryś z węzłów zainicjuje tryb czasu rzeczywistego (RT), po wstępnej fazie negocjacji, ustalania priorytetów i po wymianie potwierdzeń, rozpoczyna się transmisja oparta na wymianie znaczników (*token*). Ma ona charakter periodyczny. Kolejne węzły otrzymują znaczniki w ustalonej kolejności.

W danej chwili czasu jedynie węzeł posiadający znacznik może transmitować dane, dzięki czemu nie występują kolizje. Czas przetrzymywania znacznika przez każdy z węzłów jest ograniczony, a jego wartość ustalana jest indywidualnie, w zależności od zapotrzebowania zgłoszonego przez węzeł. Każdy z węzłów może transmitować zarówno dane krytyczne czasowo, jak i dane niekrytyczne. Dla tych ostatnich przewidziane są oddzielne „okna czasowe”.

Stosując protokół RETHER unika się kolizji, a to zapewnia deterministyczne warunki transmisji. Autor pracy [125] testował stworzony przez siebie protokół RETHER, przesyłając za jego pomocą dane multimedialne, jednak nic nie stoi na przeszkodzie użycia go również do celów sterowania.

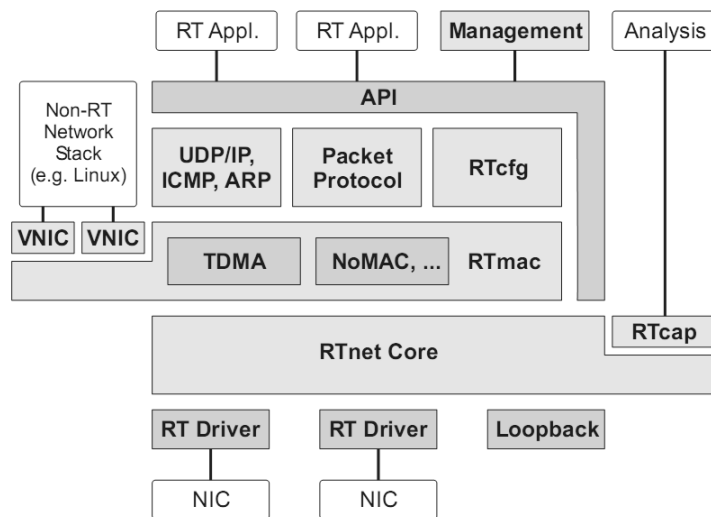
II.1.2 RTnet – sieć czasu rzeczywistego dla systemu RTAI

Twórcy zestawu protokołów sieciowych RTnet [54, 71] zastosowali koncepcję podobną do użytej w protokole RETHER. Dzięki wyeliminowaniu jednoczesnych prób transmisji, uniknęli występowania kolizji. Rozwiązanie RTnet powstało jednak z myślą o zastosowaniu głównie do celów sterowania automatycznego, a jako warstwę fizyczną może ono wykorzystywać nie tylko Ethernet. Odpowiednie sterowniki programowe (*driver*), realizujące protokoły RTnet, opracowano dla systemu operacyjnego RTAI [10, 33, 34]. System ten pozwala wykonywać zadania czasu rzeczywistego na komputerze klasy PC, a do swojej pracy wymaga systemu operacyjnego *Linux* [1]. Sterowniki RTnet współpracują z typowymi kartami sieciowymi, w które wyposażane są komputery klasy PC. Aplikacji użytkownika udostępniają interfejs API wzorowany na koncepcji „gniazdek” (*sockets*), zaadaptowany do specyfikacji zadań czasu rzeczywistego. Konstrukcja stosu omawianej rodziny protokołów przedstawiona jest schematycznie na rysunku II.1, zaczerpniętym z pracy [71]. Wykorzystywany tu algorytm dostępu do medium to TDMA (*Time Division Multiple Access*). Jeden, wybrany węzeł sieci pełni rolę węzła zarządzającego (*master*), pozostałe zaś są mu podporządkowane (*slave*). Każdy z węzłów posiada przydzieloną mu szczelinę czasową (*time slot*), w ramach której może wysyłać w sieć pakiety. Przydział szczelin czasowych ma zasadniczo charakter statyczny i realizuje się go na etapie konfiguracji systemu. Dla zachowania bezkolizyjnej pracy systemu konieczne jest precyzyjne synchronizowanie zegarów wszystkich węzłów sieciowych, realizowane przy pomocy stworzonego w tym celu protokołu. Twórcy protokołów RTnet przewidzieli możliwość transmisji danych niekrytycznych czasowo, z wykorzystaniem techniki tunelowania pakietów. W sieci można umieszczać zapasowe węzły zarządzające, które przejmują kontrolę nad siecią w przypadku awarii węzła zasadniczego. Jest to istotne dla zwiększenia niezawodności systemu. Możliwe jest dołączanie nowych węzłów typu *slave* w czasie pracy systemu, jednak nie jest to mechanizm w pełni dynamiczny – ich przewidywana przyszła obecność musi być uwzględniona wcześniej, na etapie konfiguracji systemu.

Opisane własności czynią protokół RTnet w pełni przydatnym w rozproszonych systemach sterowania. Warto dodać, że zarówno RTnet, jak i RTAI oraz niektóre dystrybucje systemu Linux rozpowszechniane są na zasadzie wolnego (ang. *free like freedom*) oprogramowania i są bezpłatne nawet wówczas, gdy stosuje się je do celów komercyjnych.

II.1.3 Przełącznik sieci Ethernet z odrębną kolejką komunikatów krytycznych czasowo

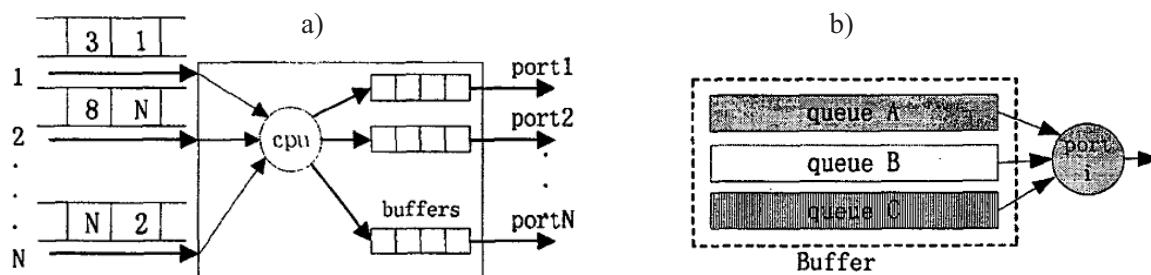
Rozwiązania opisane w poprzednich punktach (REETHER i RTnet) wykorzystują standardowe sprzętowe karty sieciowe (NIC) Ethernet, w które wyposażone są węzły systemu rozproszonego, jednak



Rys. II.1: Stos protokołu RTnet (NIC – karta sieciowa, **RT Driver** – sterownik programowy karty sieciowej, **Loopback** – pętla zwrotna, **RTnet Core** – trzon oprogramowania RTnet, **RTcap** – mechanizm przechwytywania pakietów (*packet capturing extension*), **RTmac** – środowisko dla deterministycznego protokołu dostępu do medium (*deterministic media access control framework*), **noMAC** – możliwość pracy bez deterministycznego protokołu dostępu do danych, **TDMA** – protokół wielodostępu z podziałem czasu, **VNIC** – wirtualna karta sieciowa, **RTcfg** – usługa konfigurowania węzłów dołączanych dynamicznie do segmentu sieci w trakcie pracy systemu (*real-time configuration service*), **UDP/IP, ICMP, ARP** – protokoły sieciowe, **API** – interfejs aplikacji użytkownika. Źródło: [71].

wymagają dokonania wymiany programowych sterowników implementujących stos protokołów sieciowych. Jeśli nie jest to możliwe, a użyta sieć z wieloma węzłami bazuje na technologii *Switched Ethernet*, poprawę warunków transmisji można osiągnąć przez modyfikację zasady działania przełączników sieciowych (*switch*). Sposób ten opisany jest w pracach [21, 104]. Już samo zastosowanie przełączników zamiast koncentratorów (*hub*) ogranicza domeny kolizyjne w sieci Ethernet, przyczyniając się do skrócenia czasów przesyłu danych. Dalsza poprawa jest możliwa przez zaimplementowanie w przełącznikach mechanizmu QoS (*Quality of Service*). Ten ostatni sposób jest szczególnie użyteczny w sieciach, które przesyłają zarówno dane krytyczne jak i niekrytyczne czasowo. Przełącznik z mechanizmem QoS zawiera w swej strukturze logicznej kilka (co najmniej dwie) kolejek komunikatów wychodzących, przyporządkowanych każdemu z portów. Schematycznie przedstawiono to na rysunku II.2b, zaczerpniętym z [21]. Każda z kolejek danego portu ma przypisany priorytet, który decyduje o kolejności, w jakiej wysyłane są pakiety z kolejek. Pakiety krytyczne czasowo kierowane są do kolejki posiadającej pierwszeństwo wysyłania. Wymagane własności transmisji osiąga się stosując odpowiednio dobrane algorytmy harmonogramowania w przełączniku oraz stosując kilka poziomów priorytetów (np.: najwyższy – dane okresowe krytyczne czasowo, średni – dane nieokresowe krytyczne czasowo, najniższy – pozostałe dane niekrytyczne czasowo).

Opisane rozwiązanie pozwala osiągnąć małe wartości opóźnień przesyłania komunikatów krytycznych czasowo, nawet w przypadku gdy sieć jest dodatkowo mocno obciążona wymianami niekrytycznymi. Pozwala to wykorzystywać tę samą sieć Ethernet zarówno do zadań sterowania, jak i przesyłu



Rys. II.2: Przełącznik sieciowy (*switch*) z mechanizmem QoS: a) zasada działania najprostszego przełącznika, b) wiele kolejek dla jednego portu wyjściowego. Źródło: [21].

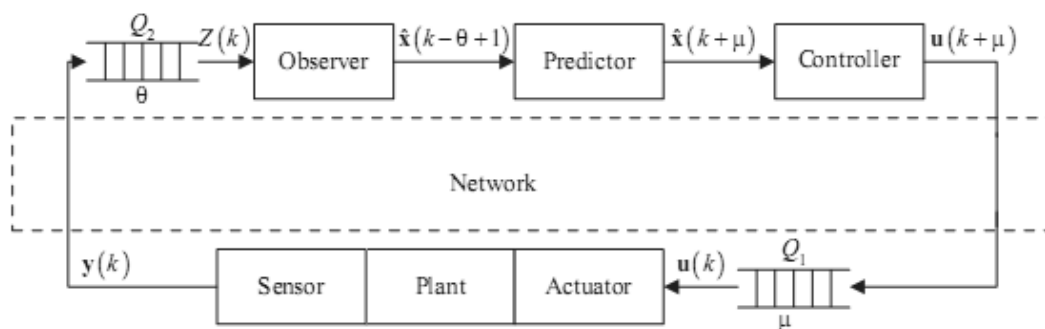
innych danych. Współdzielenie takie nie jest jednak polecane, gdyż nie zapewnia tak wysokiej niezawodności sterowania jak sieć dedykowana.

II.2 Doskonalenie metod i algorytmów sterowania

Gdy nie jest możliwe lub wskazane modyfikowanie własności sieci telekomunikacyjnej, poprawę jakości regulacji można osiągnąć stosując specjalne algorytmy sterowania. Uwzględniają one niekorzystne zjawiska wnoszone przez sieć, zmniejszając tym samym ich wpływ na pracę układu regulacji. W kolejnych podrozdziałach podano pięć przykładów takich rozwiązań.

II.2.1 Usunięcie niestacjonarności systemu przez zastosowanie kolejek FIFO

Jednym z podstawowych problemów w rozproszonych układach regulacji jest występowanie opóźnień komunikacyjnych. Najczęściej jednak groźniejsza od samych opóźnień jest ich zmienność, czyniąca układ regulacji niestacjonarnym. W pracy [82] zaproponowano metodę sterowania, dzięki której opóźnienia zmienne są transformowane na stałe. Skrócone opisy tej metody zamieszczone są w dwóch ciekawych pracach przeglądowych z dziedziny systemów rozproszonych [23, 118]. Polega ona na wykorzystaniu buforów (kolejek) typu FIFO oraz obserwatora stanu i predyktora sterowania. Schemat blokowy układu regulacji przedstawiony jest na rysunku II.3, zaczerpniętym z [118]. Jeśli



Rys. II.3: Kompensacja opóźnień z użyciem kolejek, obserwatora i predyktora. Źródło: [118].

długość buforów jest dopasowana do najdłuższych możliwych opóźnień komunikacyjnych, bufory nigdy nie zostaną opróżnione, a to oznacza nieprzerwane sterowanie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego.

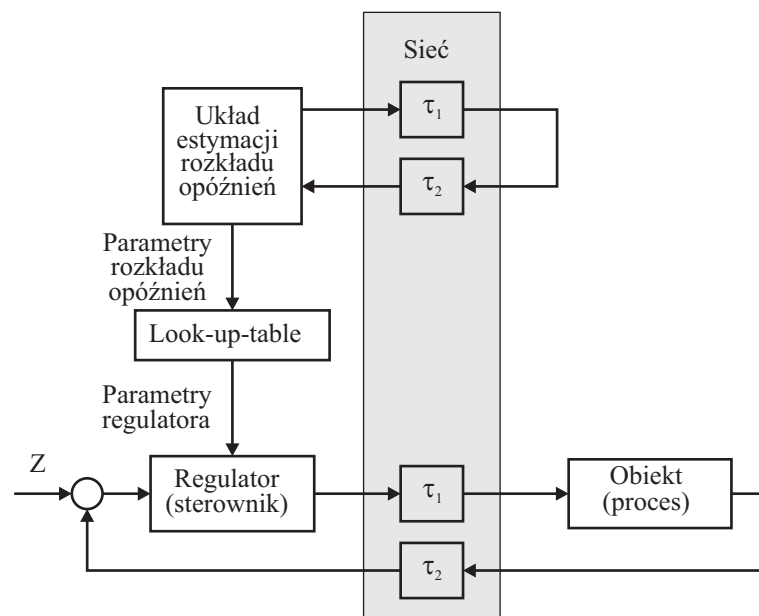
Dzięki użyciu buforów oraz obserwatora i predyktora, osiąga się stałą wartość opóźnień i tym sa-

mym stacjonarność zastępczego układu regulacji. Odbywa się to jednak kosztem wprowadzania dodatkowych opóźnień, związanych z obecnością buforów.

II.2.2 Pomiar opóźnień i zastosowanie techniki *gain scheduling*

W przypadku, gdy własności sieci telekomunikacyjnej, przez którą zamyka się pętla sprzężenia zwrotnego układu regulacji, zmieniają się powoli, a jednocześnie istnieje możliwość ich pomiaru, można skorzystać z techniki zwanej *Gain Adaptation* lub *Gain Scheduling*. Polega ona na ustawicznym dopasowywaniu nastaw użytego regulatora do zmieniających się i podlegających pomiarowi parametrów pracy sieci. Przykłady takiego rozwiązania podano w artykułach [49] oraz [22, 117].

W sieciowym układzie regulacji przedstawionym na rysunku II.4, pochodzącym z pracy [49], zmienne w czasie opóźnienia komunikacyjne mierzone są z wykorzystaniem wysyłanych w tym celu pomocniczych pakietów, pokonujących w sieci drogę „tam i z powrotem”. Od wyniku pomiaru zależą nastawy



Rys. II.4: Rozproszony układ regulacji wykorzystujący technikę *gain scheduling*. Źródło: [49].

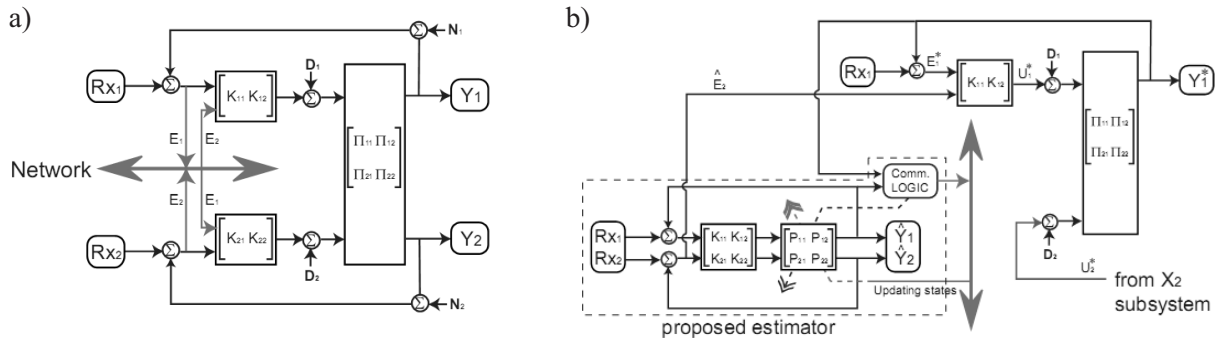
przesyłane do zasadniczego regulatora w układzie sterowania. Nastawy są więc funkcją zmierzonego opóźnienia, a dobiera się je tak, by zapewnić asymptotyczną stabilność układu oraz wymaganą jakość regulacji. Dobór nastaw może odbywać się w trybie *on-line*, zwiększa to jednak złożoność obliczeniową algorytmu. Prościej jest wyznaczenie zależności nastaw od opóźnienia w trybie *off-line*, stabilizowanie jej i wykorzystanie podczas pracy układu na zasadzie odczytywania z tablicy (*Look-up Table*).

Powyższa metoda nadaje się głównie do przypadku wolnozmiennych opóźnień, wówczas bowiem można traktować układ regulacji jako w przybliżeniu stacjonarny, co znacząco ułatwia analizę stabilności.

II.2.3 Ograniczenie ruchu w sieci dzięki zastosowaniu obserwatorów stanu

Częstotliwość próbkowania sygnałów w rozproszonym układzie regulacji przekłada się na częstotliwość przesłań sieciowych. Im częstotliwość przesłań większa, tym pełniejsza informacja jest dostępna

regulatorowi, ale też tym większe obciążenie sieci telekomunikacyjnej. Zapotrzebowanie regulatora na informację nie jest zazwyczaj stałe w czasie. Jeśli wartość zadana nie zmienia się, a zakłócenia są niewielkie, wymaganą jakość regulacji można osiągnąć przy niskiej częstotliwości transmisji, wykorzystując nieznaczny procent przepustowości sieci. Z drugiej strony, przy szybkich zmianach wartości zadanej lub znacznych zakłóceniach, częstotliwość tę należy zwiększyć, by zachować wymaganą jakość regulacji, jednocześnie chwilowo zwiększając obciążenie sieci. Najkorzystniejsze wydaje się użycie algorytmu sterowania, który okres próbkowania dobiera w sposób adaptacyjny. Przykład ciekawego rozwiązania, realizującego tę ideę, przedstawiony jest w pracach [136–138], a jego ilustrację stanowi rysunek II.5, skopiowany z [138]. Przedstawia on dwie wersje rozproszonego układu



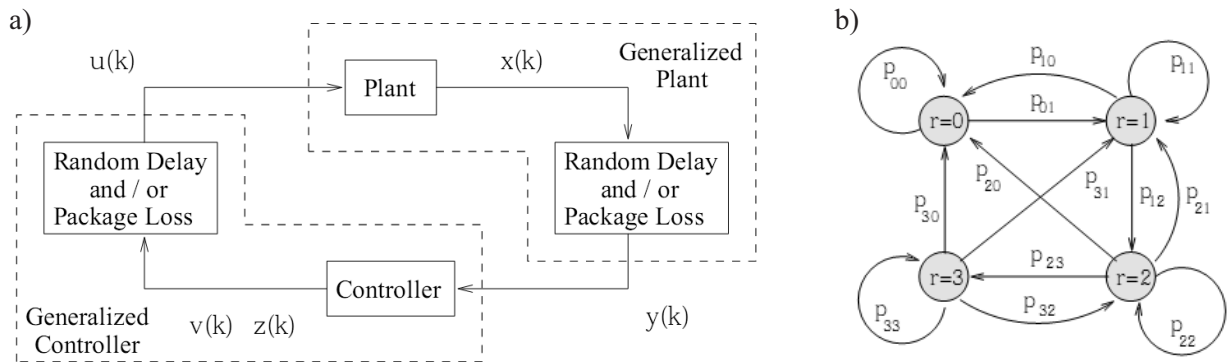
Rys. II.5: Rozproszone układy regulacji dla obiektu MIMO: a) podstawowy, b) z estymatorami i adaptacyjnym doborem okresu przesłań sieciowych. Źródło: [138].

regulacji dla obiektu wielowymiarowego o jednakowej liczbie wejść i wyjść. W rozpatrywanym układzie pojedynczy węzeł sieci składa się z jednego czujnika, regulatora oraz urządzenia wykonawczego. Każdy z węzłów przesyła do pozostałych wynik pomiaru odpowiadającego mu sygnału wyjściowego obiektu. Jest to konieczne dla zrealizowania funkcji wielowymiarowego regulatora, rozproszonej między węzłami. By móc w sposób dynamiczny ograniczyć częstotliwość przesłań sieciowych, każdy z węzłów wyposażono w identyczny obserwator stanu obiektu. Obserwatory we wszystkich węzłach obliczają identyczną estymatę, ponieważ korzystają z tych samych danych, rozsyłanych przez sieć (i startują jednocześnie, z takim samym warunkiem początkowym). Każdy z węzłów porównuje wartość zmierzonego przez siebie pojedynczego sygnału wyjściowego obiektu z odpowiadającym mu elementem wektorowej estymaty z obserwatora. Gdy rozbieżność przekroczy zadany próg, aktualna informacja pomiarowa jest rozsyłana do wszystkich pozostałych węzłów, co powoduje jednoczesne poprawienie estymaty w każdym z nich (również nadawczym). Taki algorytm pracy zapewnia z jednej strony utrzymanie błędu estymacji na zadanym poziomie, z drugiej strony ogranicza ruch w sieci, ponieważ przesłania następują tylko wówczas, gdy są niezbędne dla zachowania założonej dokładności estymat.

Opisane rozwiązanie zwiększa wprawdzie nakład obliczeń w poszczególnych węzłach, ale dzięki temu pozwala zaoszczędzić zasoby sieci telekomunikacyjnej, zwłaszcza wówczas, gdy znaczące zakłócenia lub zmiany wartości zadanej występują w układzie regulacji sporadycznie.

II.2.4 Systemy przełączane z opóźnieniami opisanymi łańcuchami Markowa

W niektórych typach sieci telekomunikacyjnych, wykorzystywanych w rozproszonych systemach regulacji, losowe opóźnienia komunikacyjne dają się modelować przy pomocy łańcuchów Markowa. Systemy takie mogą być traktowane jako układy dyskretne z przeskokami (*Discrete-time Jump Systems*), a regulatory dla nich można projektować w oparciu o teorię stabilności takich systemów. Opisane podejście zastosowano w pracach [42, 134]. Na rysunku II.6a, zaczerpniętym z artykułu [134], przedstawiono schemat rozważanego w nim układu regulacji, zaś na rysunku II.6b, pochodzącym z tego samego źródła – graf reprezentujący łańcuch Markowa, przy pomocy którego scharakteryzowano opóźnienia komunikacyjne. W pracy podane jest twierdzenie określające waru-



Rys. II.6: Schemat rozproszonego układu regulacji (a) oraz graf stanów łańcucha Markowa (b). Źródło: [134].

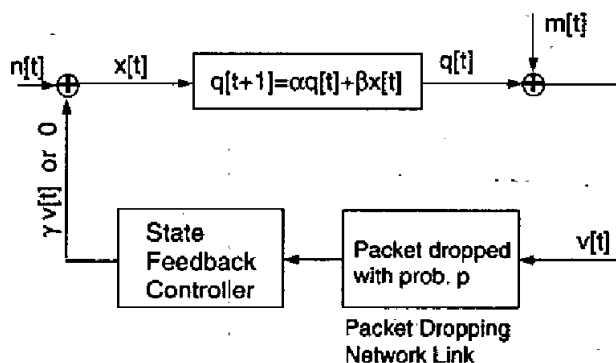
nek konieczny i dostateczny stabilności średniokwadratowej układu regulacji. Jest ono oparte na metodzie Lapunowa i posłużyło autorom do skonstruowania iteracyjnego algorytmu, określonego przez nich skrótowcem V-K, który umożliwia dobranie nastaw regulatora, Algorytm ten w każdej iteracji realizuje między innymi zadanie poszukiwania rozwiązania dopuszczalnego (*Feasibility Problem*) układu liniowych nierówności macierzowych (LMI). Uzyskane nastawy nie tylko gwarantują stabilność układu regulacji, ale także minimalizują przyjęty wskaźnik jakości, zwany współczynnikiem zanikania (*Decay Rate*). W pracy zamieszczone są dwie wersje algorytmu, przy pomocy których można zaprojektować odpowiednio regulator przełączany i nieprzełączany. Pierwszy z nich ma zastosowanie, gdy istnieje możliwość pomiaru opóźnień transmisji w poszczególnych krokach pracy układu (na przykład metodą znakowania pakietów znacznikiem czasowym). Wyznacza się wówczas tyle zestawów nastaw regulatora, ile możliwych wartości może przyjąć opóźnienie. W czasie pracy regulatora odpowiedni zestaw dla danego kroku wybierany jest stosownie do wyniku pomiaru występującego w tym kroku opóźnienia. Jeśli pomiar taki nie jest możliwy, należy skorzystać z drugiej wersji regulatora, która jest stacjonarna – nastawy nie zmieniają się w czasie.

Działanie regulatora w wersji przełączanej przypomina nieco opisaną w podrozdziale II.2.2 metodę *Gain Scheduling*. Różnica polega przede wszystkim na możliwości zastosowania obecnie opisywanego rozwiązania w przypadku opóźnień szybkozmiennych, z gwarancją zachowania stabilności układu regulacji. Metoda ta może być jednak stosowana wyłącznie wówczas, gdy znany jest model opóźnień komunikacyjnych w postaci łańcuchów Markowa.

II.2.5 Sterowanie w systemach z utratą danych w sieci telekomunikacyjnej

Niektóre typy sieci telekomunikacyjnych i protokołów transmisji nie gwarantują niezawodnego dostarczenia informacji wysyłanych przez nadawcę. W sieciach tych może występować zjawisko odrzucania niektórych pakietów danych, skutkujące niedostarczeniem ich do odbiorcy. Niekiedy wygodnie jest traktować jako odrzucenie pakietu również przypadek dostarczenia go z opóźnieniem przekraczającym maksymalną akceptowalną wartość. Zapewnienie stabilności układu regulacji, w którym występuje gubienie danych, wymaga użycia specjalnych algorytmów sterowania. Problem ten poruszono między innymi w pracach [52, 56, 141]. Układy takie modelowane są najczęściej jako *asynchroniczne systemy dynamiczne* (ADS – *Asynchronous Dynamical System*), a ich stabilność analizowana jest w kontekście probabilistycznym.

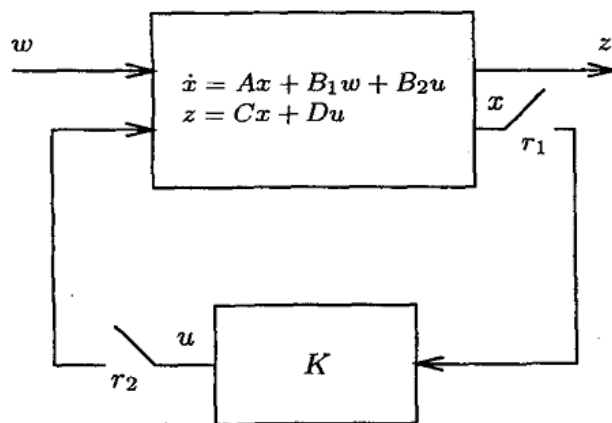
Autorzy pracy [52] rozważają zagadnienie regulacji w układzie przedstawionym na rysunku II.7, w którym obiekt pierwszego rzędu z czasem dyskretnym sterowany jest przez regulator proporcjonalny, a próbki sygnału wyjściowego obiektu przesyłane są przez sieć telekomunikacyjną, w której występuje zjawisko odrzucania danych. Zakłada się, że zdarzenia utraty pakietów w różnych



Rys. II.7: Układ regulacji z siecią telekomunikacyjną odrzucającą niektóre pakiety. Źródło: [52].

chwilach czasu są niezależne, a prawdopodobieństwo odrzucenia pakietu jest równe znanemu parametrowi p . Na obiekt oddziałują zakłócenia stochastyczne $n[t]$ i $m[t]$, mające charakter nieskorelowanych ze sobą szumów białych o zerowych wartościach średnich i znanych kowariancjach σ_N^2 oraz σ_M^2 . W przypadku niedostarczenia pakietu danych pomiarowych do proporcjonalnego regulatora od stanu, sygnał sterujący przyjmuje wartość zero. Autorzy pracy podają warunek konieczny i dostateczny istnienia regulatora, który zapewnia stabilność systemu w sensie średniokwadratowym (ograniczona wartość wariancji stanu przy czasie zmierzającym do nieskończoności). Jest on następujący: $\alpha^2 p < 1$, przy czym α to macierz stanu obiektu regulacji (w rozważanym przykładzie będąca skalarą), zaś p to prawdopodobieństwo odrzucenia pakietu danych. W pracy wyznaczony jest także przedział $[m_1, m_2]$ dla nastawy γ regulatora od stanu, stabilizującego system. Na zakończenie podany jest sposób doboru optymalnego regulatora γ , minimalizującego wariancję stanu obiektu w granicy w nieskończoności.

W artykule [56] rozważany jest między innymi układ regulacji przedstawiony na rysunku II.8. Zadaniem regulatora K jest tu zminimalizowanie wpływu sygnału wejściowego w na sygnał wyjściowy z . Zarówno sygnał wejściowy x regulatora K , jak i jego sygnał wyjściowy u , przesyłane są za pośrednictwem sieci telekomunikacyjnych, które nie gwarantują niezawodnego dostarczenia danych.



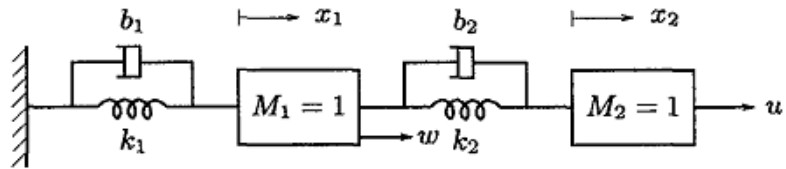
Rys. II.8: Układ regulacji modelowany jako asynchroniczny system dynamiczny. Źródło: [56].

Dla obu sieci założono różne współczynniki r_1 i r_2 , określające udział czasu, przez który dane są dostarczane do odbiorcy. Układ regulacji modelowany jest jako *asynchroniczny system dynamiczny*, w którym występują ograniczenia na wartości współczynników r_1 i r_2 .

W uproszczeniu, asynchroniczny system dynamiczny łączy w sobie zarówno dynamikę ciągłą, jak i dyskretną. Pierwsza z nich opisywana jest równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, druga – automatem skończonym, pobudzonym asynchronicznie przez zdarzenia zewnętrzne. Z automatem związany jest stan dyskretny, zaś z równaniami różniczkowymi – stan ciągły. Wartość stanu dyskretnego wpływa na postać równań stanu ciągłego, a tym samym na zachowanie całego systemu. W układzie przedstawionym na rysunku II.8 dynamika ciągła opisywana jest różniczkowym równaniem stanu, które może przyjmować różne postacie, w zależności od pozycji przełączników r_1 i r_2 , reprezentujących dyskretny stan systemu związany z obecnością sieci telekomunikacyjnych (otwarty wyłącznik oznacza odrzucanie danych transmitowanych przez sieć).

Do analizy stabilności asynchronicznych systemów dynamicznych autorzy proponują użycie metody wykorzystującej funkcjonal Lapunowa o postaci $V(x) = x^T P x$ z dodatnio określoną symetryczną rzeczywistą macierzą kwadratową P . Poszukiwanie odpowiedniej macierzy P , pozwalającej wykazać asymptotyczną stabilność badanego układu regulacji, a jednocześnie oszacowanie współczynnika szybkości zanikania przebiegów przejściowych w układzie, polegają na rozwiązaniu układu biliniowych nierówności macierzowych (BMI – *Bilinear Matrix Inequality*). W artykule podana jest również metoda jednoczesnego poszukiwania funkcjonalu Lapunowa V , dowodzącego stabilności zamkniętego układu regulacji oraz regulatora K , gwarantującego uzyskanie pożądanej jakości regulacji. Poszukiwanie to odbywa się w ramach iteracyjnej procedury V-K. Każda iteracja składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie, dla ustalonego regulatora K , wyznacza się funkcjonalu Lapunowa dla systemu. Drugi etap polega na znalezieniu (dla ustalonego funkcjonalu V) regulatora K dającego polepszenie wskaźnika jakości regulacji, którym jest tu współczynnik wzmocnienia RMS (*Root Mean Square*). Powtarzanie iteracji przerywa się, jeśli nie następuje dalsza poprawa jakości.

Autorzy artykułu przedstawili przykład użycia zaproponowanego przez siebie algorytmu dla doboru nastaw regulatora w układzie przedstawionym na rysunku II.8, w którym obiektem regulacji jest prosty system mechaniczny pokazany na rysunku II.9.



Rys. II.9: System mechaniczny stanowiący obiekt regulacji. Źródło: [56].

II.3 Współprojektowanie (co-design) algorytmów automatyki i sieciowych

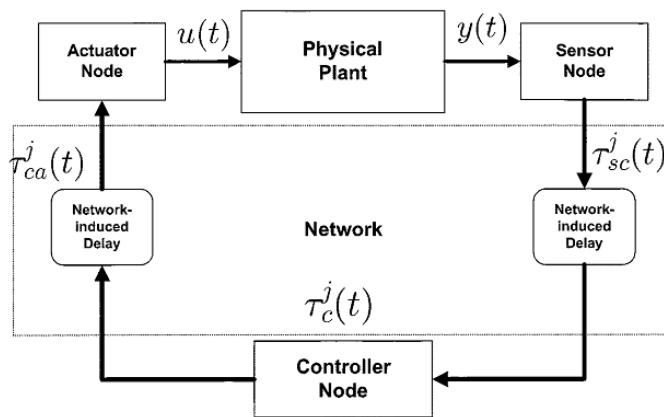
W rozbudowanych rozproszonych systemach sterowania często przez pojedynczą sieć telekomunikacyjną zamyka się wiele niezależnych pętli sprzężenia zwrotnego, należących do odrębnych układów regulacji. Fakt korzystania przez wiele węzłów ze wspólnej sieci stwarza konieczność podziału między nie jej zasobów, mierzonych tutaj jej przepustowością. Podział ten może być zrealizowany na zasadzie harmonogramowania zadań transmisji, które traktuje się w takim przypadku podobnie jak zadania obliczeniowe w komputerowym systemie czasu rzeczywistego [32]. Harmonogram można uzależnić bądź od parametrów układów regulacji wchodzących w skład rozproszonego systemu sterowania, bądź od wartości sygnałów występujących w tych układach.

Naszkiowana technika stanowi jedną z odmian „współprojektowania” (*co-design*), które zakłada wprowadzenie zależności między algorytmem sterowania automatycznego a algorytmem harmonogramowania zadań transmisji – bądź tylko na etapie projektowania rozproszonego systemu regulacji, bądź ustawicznie w czasie jego pracy. Harmonogramy zadań transmisji mogą być układane w trybie *off-line* (jednorazowo podczas projektowania systemu) lub powstawać *on-line* (ustawicznie w trakcie jego działania). Przykłady obu wariantów zaprezentowane będą w dwóch kolejnych podrozdziałach. Tryb *off-line* jest możliwy tylko wówczas, gdy o harmonogramie decydują wyłącznie parametry układu regulacji, natomiast nie zależy on od występujących w układzie sygnałów. Wariant *on-line* nadaje się dla obu przypadków (zależność od parametrów lub sygnałów).

W trakcie układania harmonogramu w trybie *off-line* może się okazać, że nie jest możliwe znalezienie rozwiązania dopuszczalnego, spełniającego wymagania stawiane układom regulacji (stabilność, jakość regulacji). Konieczne jest wówczas zmodyfikowanie tych wymagań, przeprojektowanie regulatorów i podjęcie kolejnej próby ułożenia harmonogramu. Oznacza to jednoczesny dobór harmonogramu transmisji i nastaw regulatorów, realizowany często w ramach procedury iteracyjnej. Jest ona powtarzana do momentu, w którym otrzymuje się dopuszczalny harmonogram i jednocześnie stabilne układy regulacji, gwarantujące założoną jakość sterowania [4].

II.3.1 Harmonogram uzależniony od parametrów układów regulacji

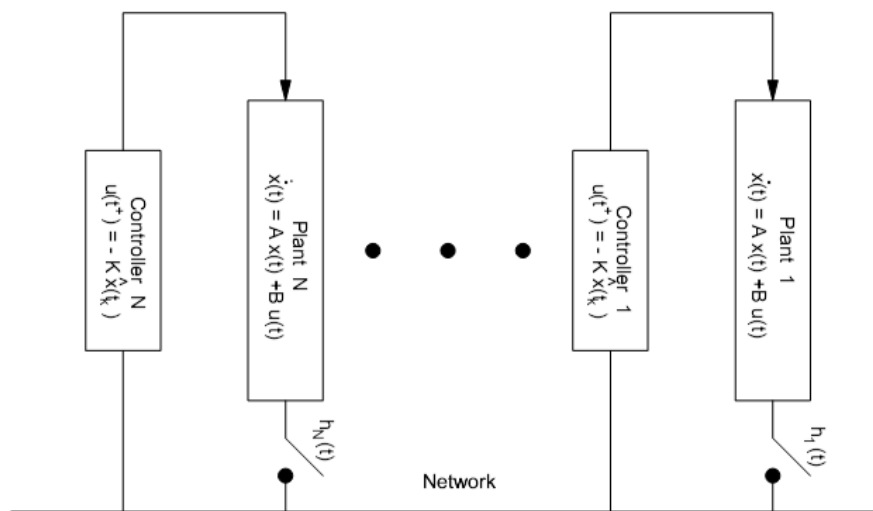
Metody harmonogramowania zadań transmisji z uwzględnieniem parametrów układów regulacji podane są w pracach [70, 100] oraz [13, 14]. W artykułach [70, 100] przyjęto założenie, że przez sieć telekomunikacyjną przesyłane są zarówno sygnały wyjściowe, jak i wejściowe wszystkich obiektów regulacji w rozpatrywanym rozproszonym systemie sterowania. Sytuację tę przedstawia rysunek II.10, pochodzący z [100]. Autorzy zaproponowali, by harmonogram transmisji układać na podstawie parametru zwanego „maksymalnym dopuszczalnym opóźnieniem” (*Maximum Allowable Time*



Rys. II.10: Pojedyncza j -ta pętla sprzężenia zwrotnego w wielopętlowym rozproszonym układzie regulacji. Źródło: [100].

$Delay$), ustalanego niezależnie dla każdej z pętli sprzężenia zwrotnego. Wartość tego parametru wyznacza się z warunków stabilności pętli regulacji, z użyciem metody Lapunowa. Podczas tworzenia harmonogramu jest on przyjmowany jako górne ograniczenie okresu próbkowania dla poszczególnych pętli sprzężenia zwrotnego. Zaproponowany algorytm gwarantuje przydział zasobów sieci zarówno dla przesyłu danych okresowych, jak i dla transmisji o charakterze sporadycznym. Otrzymany harmonogram ma charakter statyczny, w związku z czym może być opracowany w trybie *off-line*.

Z kolei autorzy prac [13, 14] założyli, że przez sieć przesyłane będą jedynie sygnały wyjściowe obiektów regulacji. Schematycznie przedstawia to rysunek II.11, cym z artykułu [14]. Tutaj harmono-



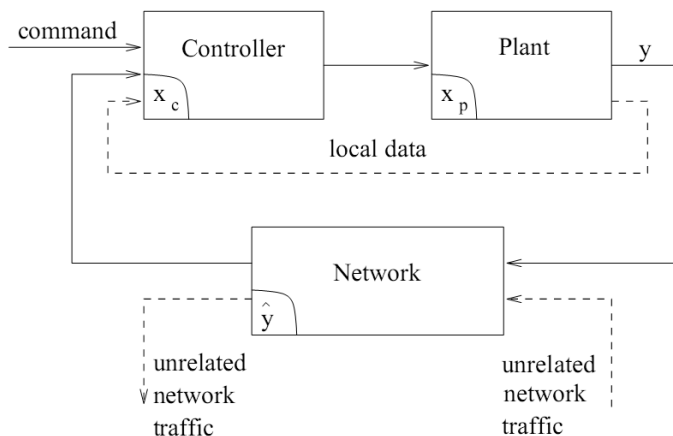
Rys. II.11: Wiele pętli sprzężenia zwrotnego zamkniętych przez wspólną sieć. Źródło: [14].

gram układany jest z użyciem algorytmu RM (*Rate Monotonic*), zaś priorytety zadań transmisji zależą od maksymalnych dopuszczalnych okresów próbkowania w poszczególnych układach regulacji, gwarantujących zachowanie stabilności. Autorzy zwrócili uwagę na możliwość łatwej realizacji zaproponowanego algorytmu harmonogramowania w sieci CAN, w której kolizji unika się stosując mechanizm arbitrażu bitowego na bazie identyfikatorów wiadomości. Należy tylko uzależnić te identyfikatory od przyjętych priorytetów, a sieć CAN samoczynnie zrealizuje zadanie harmonogramowania. W omawianych pracach podano również sposób doboru harmonogramu optymalnego.

Wskaźnik jakości uzależniono tu od uzyskanych okresów próbkowania poszczególnych układów regulacji. Rozpatrzono też przypadek sieci, w której występują opóźnienia transmisji, a także wariant układu z siecią telekomunikacyjną dopuszczającą gubienie pakietów.

II.3.2 Harmonogram uzależniony od sygnałów w układach regulacji

W dwóch opisanych wyżej rozwiązaniach ideę współprojektowania zrealizowano układając harmonogram transmisji w oparciu o wybrane **parametry** układów regulacji. Obecnie przedstawimy rozwiązanie, w którym harmonogram uzależniono od wartości **sygnałów** występujących w układzie regulacji. Pochodzi ono z prac [40, 126–129]. Rozważa się w nich pojedynczy wielowymiarowy i nieliniowy układ regulacji, przedstawiony na rysunku II.12, zapożyczonym z [126]. Sieć pośredniczy tu



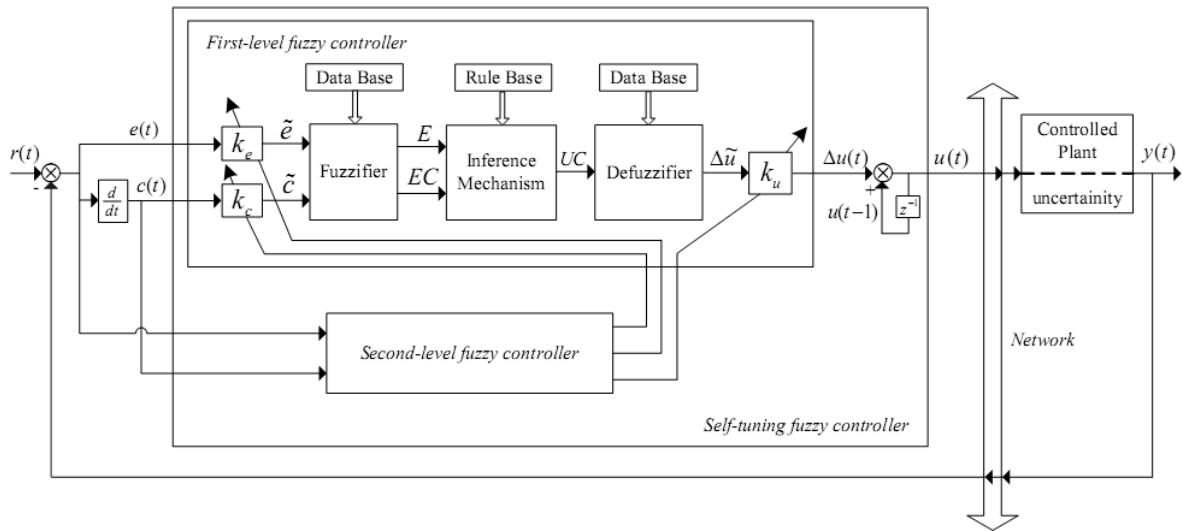
Rys. II.12: Wielowymiarowy rozproszony układ regulacji (x_c – stan regulatora, x_p – stan obiektu, y – sygnał wyjściowy obiektu, \hat{y} – najaktualniejsza (najpóźniej przesłana przez sieć) dostępna regulatorowi wartość sygnału wyjściowego obiektu). Źródło: [126].

jedynie w przesyłaniu sygnałów wyjściowych obiektu do regulatora. Z każdym z wielu wyjść obiektu stowarzyszony jest odrębny czujnik–węzeł sieciowy, a wszystkie węzły wymieniają dane w ramach wspólnej sieci. Harmonogram transmisji jest tu ustalany na bieżąco w czasie pracy systemu i ma wobec tego charakter dynamiczny. Opiera się on na priorytetach, które zależą od wartości sygnałów wyjściowych obiektu. Priorytet jest tym wyższy, im większa jest różnica między aktualną wartością sygnału a wartością ostatnio przesłaną przez sieć. Zastosowany algorytm harmonogramowania został określony przez autorów terminem *Try-Once-Discard* (TOD). W praktycznych rozwiązaniach można go łatwo zrealizować, jeśli używana jest sieć CAN, w sposób analogiczny do opisanego w poprzednim podrozdziale. Autorzy sformułowali warunki, dla jakich układ zachowuje stabilność i przedstawili wyniki symulacji komputerowych jego pracy dla przykładowego obiektu regulacji.

Podstawowa zaleta zaprezentowanych wyżej metod *co-design* to możliwość uzyskania wysokiej jakości regulacji przy ograniczonej przepustowości dostępnej sieci telekomunikacyjnej. Wadą jest natomiast kłopotliwa implementacja w przypadku większości używanych w praktyce przemysłowej sieci.

II.4 Niekonwencjonalne algorytmy sterowania

Sterowanie w systemach rozproszonych można zrealizować zarówno sposobami „klasycznymi”, jak i z wykorzystaniem algorytmów zaliczanych do klasy metod „inteligentnych” czy „niekonwencjonalnych”. Te ostatnie obejmują między innymi regulatory rozmyte (*fuzzy*) oraz sieci neuronowe. Przykład zastosowania sieci neuronowej do sterowania w zdalnym systemie robotycznym opisany jest w artykule [60]. Z kolei użycie techniki rozmytej opisano w pracy [135], z której pochodzi schemat systemu regulacji przedstawiony na rysunku II.13. W jednym układzie użyte tu zostały dwa



Rys. II.13: Rozproszony układ sterowania z regulatorami rozmytymi. Źródło: [135].

regulatory rozmyte – jeden zasadniczy (podrzędny), a drugi pomocniczy (nadrzędny), adaptacyjnie dopasowujący nastawy pierwszego do zmieniających się warunków pracy.

II.5 Stabilność rozproszonych układów regulacji

Bez względu na to, jaką metodą projektowany jest rozproszony system regulacji, zawsze podstawowym stawianym mu wymaganiem jest zachowanie stabilności. W przypadku deterministycznym żąda się najczęściej stabilności asymptotycznej w sensie Lapunowa [86] lub stabilności typu BIBO [94]. W kontekście stochastycznym bada się najczęściej stabilność średniokwadratową [107]. Wyczerpujący przegląd zagadnień stabilności rozproszonych układów regulacji zawarty jest w artykule [142]. Autorzy opisali w pracy kwestie stabilności w obecności opóźnień komunikacyjnych, zarówno krótszych od okresu próbkowania, jak i przekraczających go. Odniesli się też do przypadku transmisji jedno- i wielopakietowych oraz przedstawili sposób analizy stabilności z wykorzystaniem teorii systemów hybrydowych. Pokazali, jak modelować i analizować systemy z utratą pakietów. W artykule zebrano szereg różnych wyników dotyczących stabilności, a zamieszczona w nim bibliografia stanowi przewodnik po literaturze traktującej na ten temat.

Rozdział III

Algorytmy sterowania w systemach rozproszonych

Niniejszy rozdział stanowi zasadniczą część rozprawy. Autor zawarł w nim wyniki swoich badań: rozważań teoretycznych, symulacji komputerowych oraz eksperymentów laboratoryjnych. Materiał podzielony jest tematycznie na szereg podrozdziałów. Każdy z nich prezentuje jedną lub kilka wybranych metod uodparniania rozproszonych układów regulacji na określony rodzaj niekorzystnych zjawisk związanych z obecnością sieci transmisji danych w pętli sprzężenia zwrotnego. Poniżej omówiono skrótowo tematy kolejnych podrozdziałów, podając charakter rozważanych w nich problemów oraz sygnalizując sposoby ich rozwiązywania.

Pierwszy podrozdział opisuje sposoby kompensacji wpływu zmiennych w czasie opóźnień komunikacyjnych na jakość regulacji oraz warunki stabilności. Podrozdział ten składa się z dwóch części. Pierwsza z nich zajmuje się przypadkiem opóźnień losowych krótszych od okresu próbkowania. Do ich kompensacji wykorzystywana jest metoda predykcji (estymacji) stanu, przydatna w przypadku, gdy znane są: model obiektu regulacji oraz wartości opóźnień. Najefektywniej technika ta może być użyta wówczas, gdy sieć komunikacyjna umieszczona jest jedynie na drodze sygnału pomiarowego z czujnika do regulatora. W pozostałych przypadkach (inna lokalizacja sieci) możliwość zastosowania metody jest ograniczona. Druga część traktuje o zastosowaniu buforów ujednociających (filtrujących) opóźnienia. Rozpatrywanych jest kilka typów buforów. Niektóre z nich czynią wypadkowe opóźnienia stałymi, co istotnie upraszcza projektowanie układu sterowania. W przypadku pozostałych typów buforów wypadkowe opóźnienia nie są wprawdzie stałe, jednak ich zmieniony charakter ułatwia dobór regulatora.

W drugim podrozdziale opisano sposoby ograniczania częstotliwości przesłań pakietów w sieci telekomunikacyjnej w rozproszonym systemie regulacji. Uzyskiwana w ten sposób redukcja ruchu sieciowego (obciążenia sieci) jest konieczna wówczas, gdy wymagana w układzie sterowania częstotliwość próbkowania przekracza możliwą do osiągnięcia częstotliwość przesłań sieciowych. Podrozdział składa się z trzech części. Pierwsza z nich prezentuje metodę obniżania częstotliwości przesłań sieciowych przez grupowanie próbek sterowań i pomiarów. Pomocniczo wykorzystywana jest tu technika estymacji stanu i sterowania w oparciu o model procesu. Metoda ta pozwala na zróżnicowanie częstotliwości taktowania poszczególnych składników systemu (inna częstotliwość dla sieci i inna dla pozostałych elementów układu sterowania). W drugiej części poruszono zagadnienie niejednoczesnego próbkowania sygnałów wyjściowych wielowymiarowego obiektu regulacji. Technika ta umożliwia zachowanie wysokiej częstotliwości próbkowania w układzie o wielu wyjściach, w którym ograniczenia narzucane przez sieć nie pozwalają na przesłanie w pojedynczym okresie próbkowania

danych ze wszystkich czujników, będących niezależnymi węzłami sieciowymi. Trzecia część pokazuje, jak można obniżyć częstotliwość próbkowania sygnałów, redukując tym samym ruch w sieci, nie pogarszając jakości regulacji. Konieczne jest do tego zastąpienie w urządzeniu wykonawczym klasycznego ekstrapolatora zerowego (najczęściej wykorzystywany) lub pierwszego rzędu przez ulepszoną wersję ekstrapolatora FOH, nazwaną tutaj IFOH – *Improved First Order Hold*.

Kolejny, trzeci podrozdział prezentuje sposób uodpornienia rozproszonego układu regulacji na utratę danych w sieci telekomunikacyjnej. Wykorzystywana jest tu metoda predykcji (estymacji) stanu i sterowania lub inaczej sterowania na podstawie matematycznego modelu obiektu regulacji. Jej zastosowanie pozwala w istotny sposób poprawić jakość regulacji, a pośrednio również odporność układu na zakłócenia. Może być ona użyta zarówno wówczas, gdy sieć „gubiąca” pakiety umieszczona jest na drodze między czujnikiem a regulatorem (kompensatorem dynamicznym), jak i w przypadku, gdy pośredniczy ona w wymianie danych między regulatorem a urządzeniem wykonawczym.

Tylko część spośród przedstawionych dalej rozważań ma charakter wyłącznie teoretyczny. Większość jednak jest uzupełniona i zilustrowana wynikami symulacji komputerowych, przeprowadzonych w środowisku MATLAB/*Simulink*. Wnioski z niektórych badań zostały również zweryfikowane eksperymentalnie w warunkach laboratoryjnych. Wykorzystano w tym celu rzeczywiste, fizyczne modele obiektów regulacji oraz sieć Ethernet. Stosowano też technikę *hardware in the loop* [108], sterując za pośrednictwem rzeczywistej sieci modelem obiektu, symulowanym w czasie rzeczywistym na komputerze PC. W podrozdziałach, które prezentują kilka różnych sposobów rozwiązania postawionego w nich problemu, umieszczono krótkie podsumowania porównujące zaprezentowane metody. Dyskusje teoretyczne uzupełniono uwagami na temat możliwości praktycznej realizacji układowej prezentowanych algorytmów. Miejscami wskazano również propozycje i kierunki dalszych badań, którymi Autor ma zamiar zająć się w przyszłości.

Opisy poszczególnych zagadnień są ilustrowane rycinami: schematami blokowymi, diagramami i wykresami, które zdaniem Autora znacząco zwiększają czytelność i ułatwiają zrozumienie prezentowanego materiału. W dodatkach na końcu rozprawy zamieszczone są fragmenty kodów źródłowych programów, które były wykorzystywane w trakcie badań. Programy te napisane są bądź w języku pakietu MATLAB [96, 140] (M-pliki), bądź w C lub C++ [139]. Tekst jest uzupełniony odniesieniami to literatury traktującej o zagadnieniach podobnych do rozważanych tutaj lub zawierającej wykorzystane tu wiadomości. Kolejność, w jakiej prezentowany jest materiał, nie jest przypadkowa. Dzięki temu w kolejnych podrozdziałach Autor może powoływać się na wyniki przedstawione wcześniej.

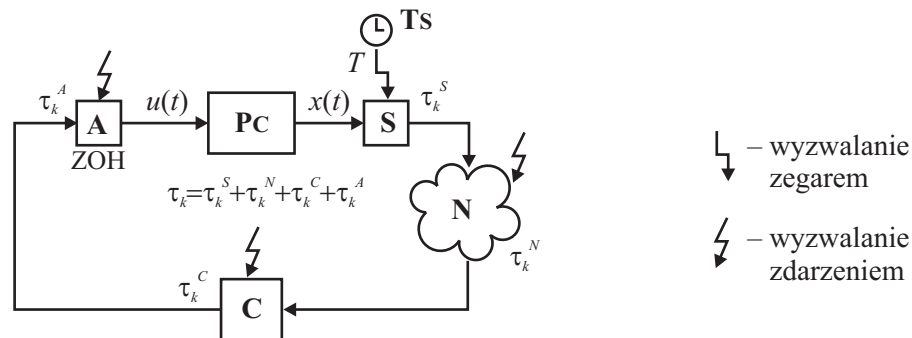
III.1 Kompensacja wpływu opóźnień komunikacyjnych

Z transmisją danych przez sieć telekomunikacyjną w sposób nieunikniony wiąże się występowanie opóźnień komunikacyjnych. Inne niekorzystne zjawiska spotykane w sieciach, takie jak gubienie czy dublowanie pakietów bądź zaburzona kolejność ich dostarczenia, mogą być wyeliminowane przez zastosowanie odpowiednich protokołów zarządzających pracą sieci. Podobnie, dobierając odpowiedni model wymiany danych, można uniknąć konkurowania o dostęp do medium wielu węzłów należących do kilku różnych układów regulacji. Opóźnienia komunikacyjne obecne są natomiast we wszystkich

układach sieciowych, nawet najprostszych, bez względu na użyte typy sieci, protokoły sieciowe bądź konfiguracje układów regulacji. W zależności od rodzaju użytej sieci oraz warunków jej pracy, opóźnienia mogą mieć wartość stałą lub też zmieniać się – bądź w sposób znany z góry (okresowy lub nie), bądź też losowo. Nieuwzględnienie opóźnień komunikacyjnych na etapie projektowania rozproszonego układu regulacji może doprowadzić do uzyskania niskiej jakości sterowania lub nawet utraty stabilności systemu. Natomiast umiejętne wykorzystanie modelu obiektu w świadomym opóźnieniu algorytmie sterowania umożliwia zwiększenie odporności układu na ich obecność. W kolejnych podrozdziałach opisane są przykłady układów regulacji, w których występują opóźnienia komunikacyjne oraz zaprezentowane są różne warianty sterowania w takich układach.

III.1.1 Opóźnienie zmienne sygnału pomiarowego, mniejsze od okresu próbkowania

Obecnie rozważać będziemy rozproszony układ regulacji, w którym sieć komunikacyjna pośredniczy jedynie w przekazywaniu próbek stanu x obiektu z czujnika do regulatora (lub kompensatora dynamicznego). Przekazywanie pozostałych informacji w układzie (sterowanie u) odbywa się bezwzględnie, bez udziału jakiegokolwiek sieci. Schemat blokowy takiego układu regulacji przedstawiony jest na rysunku III.1. Schemat ten będzie podlegał w dalszym ciągu pewnym modyfikacjom, różnym dla poszczególnych algorytmów sterowania, opisanych w dalszej części tego podrozdziału. W skład



Rys. III.1: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji (**S** – czujnik (sensor), **C** – regulator (kompensator dynamiczny), **A** – urządzenie wykonawcze (aktuator), **N** – sieć telekomunikacyjna, **PC** – obiekt regulacji (z czasem ciągłym), **Ts** – zegar wyzwalający akcje czujnika).

układu wchodzi obiekt regulacji z czasem ciągłym **PC**, z którym współpracują: urządzenie wykonawcze (aktuator) **A** oraz czujnik (sensor) **S**. Czujnik taktowany jest przez zegar **Ts**, który utrzymuje stały okres T między kolejnymi próbkowaniami stanu x obiektu. Próbkki stanu $x(kT)$ przesyłane są w postaci pakietów przez sieć komunikacyjną **N**, doznając w k -tym kroku próbkowania opóźnienia o wartości τ_k^N . Dalej założymy, że czas obliczeń w regulatorze jest pomijalnie mały w stosunku do okresu próbkowania ($\tau_k^C \ll T$), a akcje urządzenia wykonawczego i czujnika – niemal natychmiastowe ($\tau_k^A \ll T$, $\tau_k^S \ll T$). Wówczas całkowite opóźnienie sygnału w pętli sprzężenia jest w przybliżeniu równe jedynie opóźnieniu wnoszonemu przez sieć ($\tau_k \approx \tau_k^N$), które uważamy za istotne dla jakości sterowania.

Jeśli wymienione czasy nie są zaniedbywalne w stosunku do okresu próbkowania T , lecz pozostają stałe (przynajmniej dwa z nich: $\tau^C = \text{const}$ i $\tau^A = \text{const}$), można je zsumować z opóźnieniem transmisji τ_k^N i rozpatrywać wszystkie te wielkości łącznie (wówczas $\tau_k = \tau_k^N + \tau_k^S + \tau^C + \tau^A$).

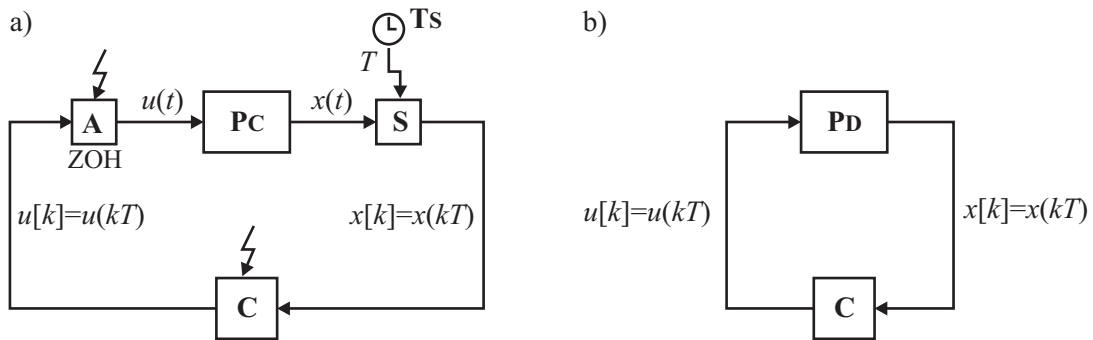
Dalej założymy, że opóźnienie τ_k jest zmienne w czasie (z kroku na krok), lecz mieści się zawsze w przedziale $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, przy czym $\underline{\tau}$ jest większe od zera, zaś większe od niego $\bar{\tau}$ – mniejsze od okresu T , z jakim próbkowany jest stan obiektu ($0 < \underline{\tau} \leq \tau_k \leq \bar{\tau} < T$). Akcja regulatora (lub kompensatora) **C**, wyznaczającego sterowanie u dla obiektu, wyzwalana jest zdarzeniem polegającym na otrzymaniu pakietu danych z sieci. Podobnie akcja urządzenia wykonawczego **A** podejmowana jest niezwłocznie po otrzymaniu nowej wartości sterowania z regulatora. Urządzenie wykonawcze realizuje algorytm ekstrapolacji zerowego rzędu (ZOH).

W kolejnych podrozdziałach prezentowane będą modyfikacje przedstawionego układu. Będzie on uzupełniany o dodatkowe elementy (bufory, predyktory, dodatkowe zegary), może też ulec zmianie sposób wyzwalania akcji poszczególnych bloków (kompensatora **C** i urządzenia wykonawczego **A**), stosownie do wymagań proponowanego algorytmu sterowania.

Niech liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy obiekt regulacji **PC** opisany będzie następującym równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (\text{III.1})$$

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $t \in [0, \infty) \subset \mathbb{R}$, $x(0) \in \mathbb{R}^n$. Gdyby z układu regulacji przedstawionego na rysunku III.1 usunięto sieć telekomunikacyjną (a suma czasów $\tau_k^S + \tau_k^C + \tau_k^A$ była pomijalnie mała w porównaniu z okresem próbkowania T), wówczas można by przyjąć, że akcje czujnika i aktuatora (odpowiednio: próbkowanie oraz ekstrapolacja ZOH) podejmowane są jednocześnie, ze stałym okresem T . Układ realizujący taki sposób sterowania przedstawiony jest na rysunku III.2a. Dalej będzie on nazywany układem *odniesienia*. Obiekt z czasem ciągłym **PC**, uzupełniony o elementy



Rys. III.2: Klasyczny układ regulacji (bez sieci telekomunikacyjnej): a) pełny schemat blokowy, b) uproszczony schemat zastępczy (**PC** – obiekt regulacji z czasem ciągłym, **PD** – obiekt regulacji z czasem dyskretnym, **C** – regulator (kompensator), **N** – sieć telekomunikacyjna, **S** – czujnik (sensor), **A** – urządzenie wykonawcze (aktuator), **Ts** – zegar taktujący czujnik).

A i **S** (aktuator i sensor), może być traktowany jako element **PD** z czasem dyskretnym, opisany równaniem stanu

$$x((k+1)T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT) \quad (\text{III.2})$$

gdzie macierze: stanu Φ i wejścia Γ wyrażają się znanymi wzorami [46, 86, 87]

$$\Phi = \Phi(T) = e^{TA}, \quad \Gamma = \Gamma(T) = \int_0^T e^{tA} B dt \quad (\text{III.3})$$

Dla uproszczenia dalszego zapisu posłużymy się symbolami $x[k]$ oraz $u[k]$. Pierwszy z nich będzie oznaczał próbkę sygnału $x(t)$ pozyskaną w chwili $t_k = kT$

$$x[k] = x(t_k) = x(kT), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.4})$$

zaś drugi – „próbkę” dyskretnego sygnału sterującego, przetwarzanego przez aktuator (realizujący algorytm ZOH) w sygnał z czasem ciągłym. W układzie na rysunku III.2a jest to sygnał schodkowy (przedziałami stały), przyjmujący na przedziale czasu $[kT, (k+1)T)$ wartość równą $u[k]$

$$u(t) = u[k] \text{ dla } t \in [kT, (k+1)T) = [t_k, t_{k+1})$$

Wielkość $k \in \mathbb{N}$ nazywać będziemy numerem (indeksem) chwili czasu $t_k = kT$ lub też w skrócie – tam, gdzie nie doprowadzi to do niejednoznaczności – chwilą czasu.

Jeśli para macierzy (Φ, Γ) jest sterowalna, obiekt **PD** można ustabilizować przy pomocy odpowiednio dobranego, proporcjonalnego regulatora od stanu **C**, pracującego z czasem dyskretnym, opisanego równaniem

$$u[k] = -Kx[k], \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (\text{III.5})$$

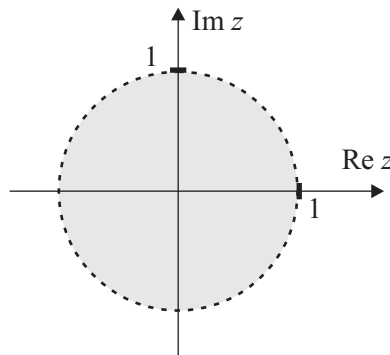
Zamknięty system regulacji, przedstawiony na rysunku III.2b, opisany jest równaniem stanu

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma K)x[k] = \Psi x[k] \quad (\text{III.6})$$

powstającym przez wstawienie prawej strony wzoru (III.5) do równania (III.2). Nastawy regulatora (wartości elementów macierzy K) należy dobrać tak, by system zamknięty pozostawał asymptotycznie stabilny, co dla systemu z czasem dyskretnym jest równoważne żądaniu, by moduły wszystkich wartości własnych macierzy stanu systemu zamkniętego były (silnie) mniejsze od jedności [44]

$$\lambda(\Phi - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\odot$$

Symbol \mathbb{C}^\odot oznacza tu wnętrze koła o promieniu jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych na płaszczyźnie zespolonej (rysunek III.3). Inaczej mówiąc, \mathbb{C}^\odot to zbiór wszystkich liczb



Rys. III.3: Obszar asymptotycznej stabilności systemu dynamicznego z czasem dyskretnym.

zespolonych o module mniejszym od jedności

$$\mathbb{C}^\odot = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

Regulator K , spełniający powyższy warunek, może być wyznaczony na przykład metodą przesuwania wartości własnych (lokowania biegunów) za pomocą formuły Ackermanna [68, 130], bądź z zastosowaniem transformacji równania stanu systemu do postaci kanonicznej sterowalności [86]. Formuła Ackermanna ma postać

$$K = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_n Q_c^{-1} w(\Phi) \quad (\text{III.7})$$

gdzie Q_c jest macierzą sterowalności odpowiadającą parze macierzy (Φ, Γ)

$$Q_c = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi \Gamma & \Phi^2 \Gamma & \dots & \Phi^{n-1} \Gamma \end{bmatrix}$$

zaś $w(z)$ to wielomian moniczny (o współczynniku przy najwyższej potędze zmiennej z równym jedności [97]), którego pierwiastki są równe zadany wartościom własnym macierzy $\Psi = \Phi - \Gamma K$ zamkniętego układu regulacji (zgodność musi dotyczyć zarówno wartości, jak i krotności pierwiastków i wartości własnych)

$$w(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad \lambda(\Phi - \Gamma K) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

W najprostszych swych wersjach obie wspomniane metody mogą być stosowane jedynie w przypadku obiektu regulacji o jednym wejściu ($p = 1$). Istnieją jednak odmiany drugiej z nich, które mają zastosowanie także w przypadku większej liczby wejść. W programie MATLAB dostępne są dwie funkcje realizujące zadanie wyznaczenia macierzy K ; są to odpowiednio `acker` oraz `place`

```
K=acker(Fi, Gamma, [z1, z2])
K=place(Fi, Gamma, [z1, z2])
```

Wzór (III.7) dla systemu rzędu $n = 2$ przyjmuje w notacji MATLAB-a postać

```
K=[0 1]/ctrb(Fi, Gamma)*polyvalm(poly([z1, z2]), Fi)
```

Inny sposób znalezienia stabilizującego regulatora dla obiektu **PD** polega na wykorzystaniu teorii sterowania optymalnego liniowo-kwadratowego (LQ). Uzyskany w ten sposób macierzowy regulator proporcjonalny minimalizuje sumacyjny, kwadratowy wskaźnik jakości z nieskończonym horyzontem czasowym i symetrycznymi macierzami Q , R i S

$$J(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q x[k] + u[k]^T R u[k] + 2x[k]^T S u[k]) \quad (\text{III.8})$$

dla każdego warunku początkowego $x[0] = x(0) \in \mathbb{R}^n$. By zadanie poszukiwania regulatora optymalnego posiadało rozwiązanie, zachodzić muszą wymienione niżej warunki [84]:

- stabilizowalność pary macierzy (Φ, Γ) ,
- brak nieobserwowalnych modów na okręgu jednostkowym pary macierzy $(Q - S R^{-1} S^T, \Phi - \Gamma R^{-1} S^T)$,
- dodatnia określoność macierzy R ,

- dodatnia półokreśloność macierzy $Q - S R^{-1} S^T$.

Poszukiwany regulator określony jest wzorem

$$u[k] = -K x[k] \quad (\text{III.9})$$

gdzie macierz wzmocnień K dana jest formułą

$$K = (\Gamma^T X \Gamma + R)^{-1} (\Gamma^T X \Phi + S^T)$$

Występująca w powyższym wzorze macierz X jest symetrycznym i dodatnio półokreślonym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego (w wersji dla systemów z czasem dyskretnym) o postaci

$$\Phi^T X \Phi - X - (\Phi^T X \Gamma + S) (R + \Gamma^T X \Gamma)^{-1} (\Gamma^T X \Phi + S^T) + Q = 0 \quad (\text{III.10})$$

W programie MATLAB do wyznaczenia regulatora LQ dla obiektu z czasem dyskretnym służy funkcja `dlqr`, zaś równanie Riccatiego dla systemów z czasem dyskretnym rozwiązuje się przy pomocy polecenia `dare`

```
K=dlqr(Fi,Gamma,Q,R,S)
```

```
X=dare(Fi,Gamma,Q,R,S)
```

Obie opisane wyżej metody projektowania regulatora są odpowiednie dla układu odniesienia przedstawionego na rysunku III.2, który jest systemem klasycznym, bez sieci telekomunikacyjnej. Pomocniczo będą one wykorzystywane również w przypadku rozpatrywanych dalej czterech odmian modeli systemu rozproszonego (w którym sieć jest obecna). Warianty te stanowią będą modyfikacje systemu przedstawionego na rysunku III.1. W opisie każdego z nich znajdują się rozważania dotyczące stabilności [141], jakości regulacji oraz możliwości zastosowania praktycznego. Jako pierwszy rozpatrzony zostanie najprostszy przypadek, w którym używany jest regulator wyznaczony według podanego wyżej przepisu w niezmienionej postaci. Drugi wariant pokaże wykorzystanie bufora sztucznie wydłużającego opóźnienia do wartości równej pełnemu okresowi próbkowania T . Przy wyznaczaniu sterowania użyta będzie technika predykcji stanu w oparciu o model matematyczny sterowanego obiektu. Podobna metoda będzie wykorzystana także w dwóch kolejnych przypadkach. Po omówieniu wszystkich czterech odmian układu regulacji, zaprezentowane zostaną wyniki symulacji komputerowych oraz eksperymentów laboratoryjnych, pokazujących działanie wybranych wariantów. Dokonane będzie porównanie opisanych układów, zarówno jakościowe, jak i ilościowe. Część jakościowa będzie dotyczyła zagadnień stabilności, złożoności implementacyjnej oraz dogodności do praktycznej realizacji. W części ilościowej zestawione zostaną wartości dwóch różnych wskaźników jakości, wzorowanych na (III.8), różniących się horyzontem czasowym oraz warunkami, w jakich są obliczane (obecność zakłóceń losowych lub ich brak, zerowy lub niezerowy warunek początkowy). Pierwszy spośród użytych wskaźników będzie miał charakter deterministyczny, drugi – stochastyczny.

Przykład III.1

Jako przykłady numeryczne, w czterech kolejnych podrozdziałach rozpatrywane będą układy regulacji z podwójnie całkującym obiektem **PC** o wypadkowym wzmocnieniu równym 4000, który jest

opisany równaniem stanu (III.1) z macierzami A i B równymi odpowiednio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad (a = 100, b = 40) \quad (\text{III.11})$$

Dla założonego okresu próbkowania $T = 0.004$ macierze $\Phi = \Phi(T)$ i $\Gamma = \Gamma(T)$, występujące w równaniu stanu z czasem dyskretnym (III.2), przyjmują wartości

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & aT \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a b T^2 \\ b T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.032 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

Graniczne wartości opóźnienia komunikacyjnego, stosowane podczas opisanych dalej symulacji komputerowych, będą wynosić odpowiednio 10% i 90% okresu próbkowania T

$$\tau_k \in [\underline{\tau}, \bar{\tau}] = [T/10, 9T/10] = [0.0004, 0.0036]$$

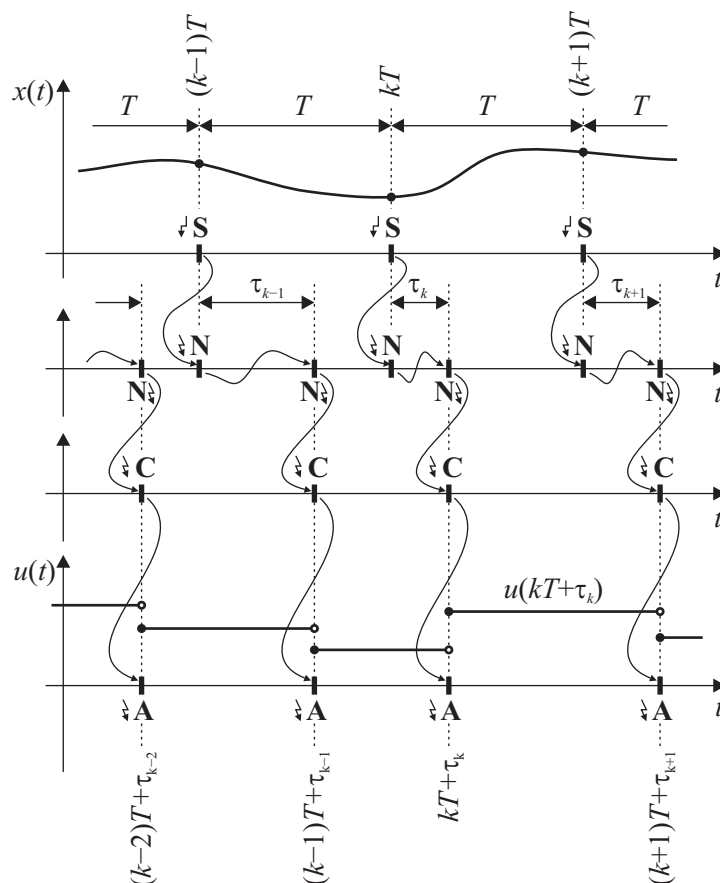
Wartości macierzy wzmocnień K wielowymiarowego regulatora proporcjonalnego dobierane będą za pomocą metod opisanych wcześniej (przesuwanie wartości własnych lub poszukiwanie regulatora liniowo-kwadratowego).

III.1.1.1 Sterowanie niezwłocznie po otrzymaniu próbki sygnału z czujnika – układ bez estymacji

Najprostszy sposób realizacji sterowania w rozproszonym układzie regulacji, przedstawionym na rysunku III.1, polega na zastosowaniu w roli elementu \mathbf{C} proporcjonalnego regulatora od stanu, wyznaczonego jedną z metod opisanych w poprzednim podrozdziale. Ponieważ żadna ze wspomnianych metod nie uwzględnia obecności sieci i związanych z nią opóźnień komunikacyjnych, należy oczekiwać istotnych różnic między własnościami układu regulacji z siecią i bez niej. Co więcej, taki sposób projektowania regulatora nie gwarantuje stabilności układu regulacji, w którym obecna jest sieć telekomunikacyjna. Działanie rozpatrywanego systemu można przedstawić w kilku punktach, opisując kolejne akcje podejmowane przez poszczególne jego elementy:

1. W chwili czasu $t = kT$ czujnik \mathbf{S} , pobudzony zegarem \mathbf{Ts} , próbkuje stan $x(kT)$ obiektu \mathbf{PC} i bezzwłocznie przekazuje pakiet danych, zawierający uzyskaną próbkę $x[k]$, do sieci telekomunikacyjnej \mathbf{N} .
2. Przesłanie pakietu przez sieć \mathbf{N} zajmuje odcinek czasu o długości τ_k .
3. W chwili czasu $t = kT + \tau_k$ sieć \mathbf{N} przekazuje pakiet z danymi do regulatora \mathbf{C} .
4. w tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ regulator \mathbf{C} wyznacza bezzwłocznie nową wartość sterowania $u(kT + \tau_k) = -K x(kT)$ i przekazuje ją urządzeniu wykonawczemu \mathbf{A} .
5. w tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ urządzenie wykonawcze \mathbf{A} bezzwłocznie podaje otrzymaną wartość sterowania na wejście obiektu \mathbf{PC} .

Zaletą opisanego układu regulacji jest fakt, że nowa wartość sterowania jest wyznaczana i podawana na obiekt niezwłocznie po otrzymaniu kolejnej próbki sterowania. Próbka ta jest jednak nieaktualna (przeterminowana) w chwili jej użycia do obliczeń. Przeterminowanie to nie jest przez algorytm w żaden sposób uwzględniane, co stanowi jego istotną wadę. Zależności czasowe między akcjami



Rys. III.4: Zależności czasowe pomiędzy akcjami poszczególnych elementów układu regulacji.

poszczególnych elementów układu regulacji pokazane są na rysunku III.4 oraz w uproszczeniu – na rysunku III.5. Na obu ilustracjach zamieszczono przykładowy przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$, a na pierwszej z nich – dodatkowo przebieg stanu $x(t)$. Symbolem $\downarrow N$ oznaczono tu chwilę czasu, w której dane są wysyłane przez sieć (z czujnika), zaś znak $N \downarrow$ oznacza chwilę dostarczenia danych do odbiorcy (regulatora). Na drugim rysunku zaznaczono wielkość σ_k , która jest dopełnieniem opóźnienia τ_k do pełnego okresu próbkowania, a zarazem odstępem czasu między akcją aktuatora **A** a następującą po niej najbliższą akcją czujnika **S**

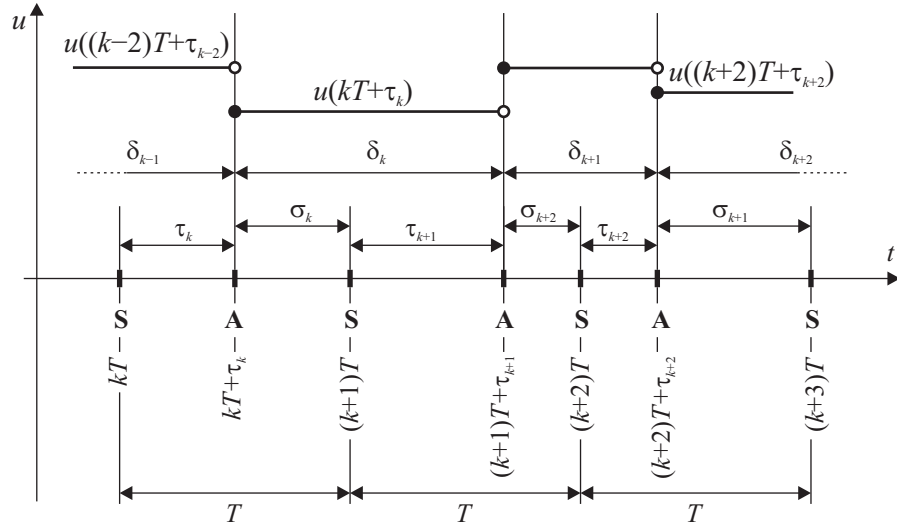
$$\tau_k + \sigma_k = T \quad \rightarrow \quad \sigma_k = T - \tau_k \quad (\text{III.12})$$

Odstęp między dwiema kolejnymi akcjami urządzenia wykonawczego **A** (w chwilach $kT + \tau_k$ oraz $(k+1)T + \tau_{k+1}$) oznaczono przez δ_k . Z rysunku III.5 wynika zależność

$$\delta_k = \sigma_k + \tau_{k+1} = T - \tau_k + \tau_{k+1} \quad (\text{III.13})$$

Model matematyczny układu regulacji

Do analizy stabilności rozważanego układu regulacji można wykorzystać jego model zastępczy, utworzony z użyciem metody rozszerzonej przestrzeni stanu [46]. Nowy, rozszerzony wektor stanu $\bar{x}[k]$ powstaje przez złożenie wektorów $x(kT) = x[k]$ oraz $x(kT + \tau_k)$, reprezentujących stan obiektu regulacji **PC** w dwóch chwilach czasu, odpowiadających następującym po sobie akcjom czujnika **S**

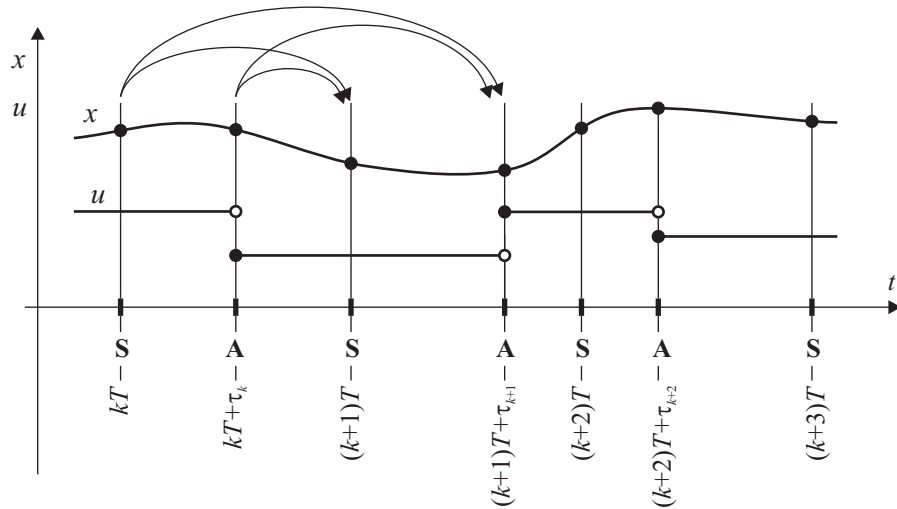


Rys. III.5: Zależności czasowe między zdarzeniami w układzie regulacji.

i urządzenia wykonawczego **A**

$$\bar{x}[k] = \begin{bmatrix} x(kT) \\ x(kT + \tau_k) \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Znając stan obiektu w chwilach czasu $x(kT)$ i $x(kT + \tau_k)$, można wyznaczyć jego wartości w chwilach $x((k+1)T)$ i $x((k+1)T + \tau_{k+1})$ (rysunek III.6), a to oznacza, że możliwe jest utworzenie równania stanu dla rozszerzonego wektora $\bar{x}[k]$. Ogólne rozwiązanie równania (III.1) w chwili czasu t_2 dla



Rys. III.6: Związki między elementami wektora stanu $\bar{x}[\cdot]$ dla dwóch kolejnych chwil czasu: kT oraz $(k+1)T$.

warunku początkowego danego w chwili czasu $t_1 \leq t_2$ ma postać

$$x(t_2) = e^{(t_2-t_1)A} x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{(t_2-\zeta)A} B u(\zeta) d\zeta \quad (\text{III.15})$$

Wstawiając $t_1 = kT + \tau_k$ oraz $t_2 = (k+1)T$, otrzymuje się następującą zależność między $x(kT + \tau_k)$ a $x((k+1)T)$

$$x((k+1)T) = e^{((k+1)T - kT - \tau_k)A} x(kT + \tau_k) + \int_{kT + \tau_k}^{(k+1)T} e^{((k+1)T - \zeta)A} B u(\zeta) d\zeta$$

Uwzględniając w pierwszym składniku sumy po prawej stronie powyższego równania zależność (III.12) i stosując w całce podstawienie $\zeta = (k+1)T - \xi$, dostajemy

$$x((k+1)T) = e^{\sigma_k A} x(kT + \tau_k) + \int_0^{\sigma_k} e^{\xi A} B u((k+1)T - \xi) d\xi$$

Z rysunku III.5 wynika, że na przedziale całkowania sygnał $u(t)$ ma stałą wartość, wobec tego powyższy wzór można zapisać jako

$$x((k+1)T) = \Phi(\sigma_k) x(kT + \tau_k) + \Gamma(\sigma_k) u(kT + \tau_k)$$

gdzie

$$\Phi(\sigma) = e^{\sigma A}, \quad \Gamma(\sigma) = \int_0^{\sigma} e^{\xi A} B d\xi$$

Uwzględniając formułę regulatora **C**

$$u(kT + \tau_k) = -K x(kT) \tag{III.16}$$

otrzymuje się

$$x((k+1)T) = \Phi(\sigma_k) x(kT + \tau_k) - \Gamma(\sigma_k) K x(kT) \tag{III.17}$$

Podobnie, wstawiając do wzoru (III.15) odpowiednio $t_1 = kT + \tau_k$ oraz $t_2 = (k+1)T + \tau_{k+1}$, dostajemy zależność między $x(kT + \tau_k)$ a $x((k+1)T + \tau_{k+1})$

$$\begin{aligned} x((k+1)T + \tau_{k+1}) &= e^{((k+1)T + \tau_{k+1} - kT - \tau_k)A} x(kT + \tau_k) + \\ &+ \int_{kT + \tau_k}^{(k+1)T + \tau_{k+1}} e^{((k+1)T + \tau_{k+1} - \zeta)A} B u(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Następnie, uwzględniając w pierwszym składniku prawej strony równania zależność (III.13) oraz stosując w stanowiącej drugi składnik całce podstawienie $\zeta = (k+1)T + \tau_{k+1} - \xi$, otrzymujemy

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = e^{\delta_k A} x(kT + \tau_k) + \int_0^{\delta_k} e^{\xi A} B u((k+1)T + \tau_k - \xi) d\xi$$

Korzystając ze stałości sterowania u na przedziale całkowania mamy

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = \Phi(\delta_k) x(kT + \tau_k) + \Gamma(\delta_k) u(kT + \tau_k)$$

gdzie

$$\Phi(\delta) = e^{\delta A}, \quad \Gamma(\delta) = \int_0^{\delta} e^{\xi A} B d\xi$$

Wreszcie, stosując formułę regulatora (III.16), dostajemy

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = \Phi(\delta_k) x(kT + \tau_k) - \Gamma(\delta_k) K x(kT) \tag{III.18}$$

Łącząc (III.17) oraz (III.18) w jedno równanie wektorowo-macierzowe, otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} x((k+1)T) \\ x((k+1)T + \tau_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Gamma(\sigma_k) K & \Phi(\sigma_k) \\ -\Gamma(\delta_k) K & \Phi(\delta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ x(kT + \tau_k) \end{bmatrix}$$

lub inaczej, wykorzystując definicję (III.14) rozszerzonego wektora stanu $\bar{x}[k]$

$$\bar{x}[k+1] = \bar{\Phi}(\sigma_k, \delta_k) \bar{x}[k] \quad (\text{III.19})$$

gdzie macierz stanu

$$\bar{\Phi}(\sigma_k, \delta_k) = \begin{bmatrix} -\Gamma(\sigma_k)K & \Phi(\sigma_k) \\ -\Gamma(\delta_k)K & \Phi(\delta_k) \end{bmatrix}$$

zależy od okresu próbkowania T oraz opóźnień transmisji τ_k i τ_{k+1} w dwóch kolejnych krokach: k -tym i $(k+1)$ -szym

$$\bar{\Phi}(\sigma_k, \delta_k) = \bar{\Phi}(T - \tau_k, T + \tau_{k+1} - \tau_k)$$

Otrzymane równanie stanu (III.19) opisuje system niestacjonarny, w którym macierz stanu $\bar{\Phi}(\cdot)$ przyjmuje w każdym kroku (w ogólnym przypadku) różne wartości.

III.1.1.2 Stabilność liniowych układów niestacjonarnych z czasem dyskretnym

Równanie (III.19) opisuje skończenie wymiarowy liniowy system dynamiczny z czasem dyskretnym i bez sygnału wejściowego. Jest on niestacjonarny, ponieważ macierz stanu $\bar{\Phi}(\cdot)$ jest funkcją czasu (tutaj zależy niejawnie on numeru chwili czasu k). Równanie to można zapisać w ogólniejszej postaci

$$z[k] = \Theta(k) z[k], \quad z[k] \in \mathbb{R}^n, \quad \Theta(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.20})$$

Niżej przedstawiono kilka użytecznych wyników dotyczących stabilności systemów opisanych podanym wyżej wzorem. Zacytowane twierdzenia pochodzą z prac [26, 31, 46, 86] oraz [5]. Rozpatrzono kilka różnych przypadków, różniących się charakterem zmienności macierzy $\Theta(\cdot)$. Dla każdego z wariantów podano jeden lub kilka warunków asymptotycznej stabilności: konieczny, dostateczny bądź konieczny i dostateczny. Poniższe zestawienie ma charakter ogólny i przeglądowy, a zamieszczone w nim wyniki wykorzystywane będą w dalszej części pracy.

Stała macierz stanu

Szczególnym przypadkiem układu (III.20) jest system stacjonarny, w którym macierz stanu pozostaje stała, niezależna od czasu ($\Theta(k) = \Theta_0 = \text{const}$).

Twierdzenie III.1 *System (III.20) ze stałą macierzą stanu Θ_0 jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy moduły wszystkich wartości własnych macierzy Θ_0 są mniejsze od jedności [46, 86] ($|\lambda(\Theta_0)| < 1$) (rysunek III.3).*

W powyższym twierdzeniu zapis $|E|$, gdzie E jest zbiorem liczb zespolonych, oznacza „zbiór modułów wszystkich elementów zbioru E ”, zaś notacja $F < 1$, dla zbioru liczb rzeczywistych F , oznacza, że „wszystkie elementy zbioru F są mniejsze od jedności”.

Okresowy ciąg macierzy stanu

W podrozdziale I.4.2 w punkcie 2 rozważano przypadek systemu rozproszonego, w którym wartości opóźnień transmisji w kolejnych dyskretnych chwilach czasu tworzą ciąg okresowy. Innymi słowy, opóźnienia te układają się według pewnego ustalonego, powtarzalnego schematu. Zjawisko to może wynikać z niezgodności współmiernych¹ okresów taktowania poszczególnych elementów wchodzących w skład pętli sprzężenia zwrotnego (czujnik, sieć telekomunikacyjna i regulator). Okresowość opóźnień pociąga za sobą również okresowość ciągu macierzy stanu $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$. Niech okres podstawowy² tego ciągu wynosi m (jeśli $m = 1$, otrzymujemy przypadek ze stałą macierzą stanu, opisany w poprzednim punkcie).

Twierdzenie III.2 *Dla asymptotycznej stabilności układu (III.20) z okresową macierzą stanu potrzeba i wystarcza, by zachodził następujący warunek [26, 31]*

$$\lambda(\underbrace{\Theta(m-1) \cdot \Theta(m-2) \cdots \Theta(2) \cdot \Theta(1) \cdot \Theta(0)}_m) \subset \mathbb{C}^{\circ} \quad (\text{III.21})$$

gdzie m jest okresem podstawowym ciągu macierzy stanu $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

Uzasadnienie powyższego twierdzenia jest następujące: Inkluzja (III.21) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym asymptotycznej stabilności systemu dynamicznego, który powstaje z (III.20), jeśli rozpatruje się jedynie te chwile czasu, których numer jest podzielny przez m ($k \in \{0, m, 2m, 3m, \dots\}$). Z kolei tak otrzymany system jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy tę samą własność stabilności posiada układ (III.20).

Macierz stanu przyjmująca wartości ze skończonego zbioru

W pewnych sytuacjach macierz stanu $\Theta(k)$ może jedynie przyjmować skończoną liczbę N wartości ($N \geq 1$) z pewnego N -elementowego zbioru $\Omega = \{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_N\}$, lecz ciąg $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$ niekoniecznie musi wykazywać własność okresowości. Sytuacja taka może zachodzić w rozproszonym układzie regulacji, w którym sieć posiada losowy mechanizm dostępu do danych, a jednocześnie przesłania są taktowane zegarem o częstotliwości będącej wielokrotnością częstotliwości zegarów sterujących pracą pozostałych elementów układu. Opóźnienia wnoszone przez taką sieć są wprawdzie losowe, lecz przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków, tworzą zbiór o skończonej liczbie elementów. Dla badania stabilności rozpatrywanego systemu można wykorzystać twierdzenia podane w pracach [31] oraz [26, strona 102]. Definiuje się w nich „zbiór potęgowy” Ω^r , jako zbiór wszystkich możliwych r -elementowych ($r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) iloczynów elementów zbioru Ω

$$\Omega^r = \{\Theta_{i_1} \cdot \Theta_{i_2} \cdot \Theta_{i_3} \cdots \Theta_{i_r} \mid i_1, i_2, i_3 \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

Twierdzenie III.3 *System (III.20) z macierzą stanu $\Theta(k)$, która przyjmuje wartości w skończonym zbiorze Ω , jest asymptotycznie stabilny dla wszystkich możliwych ciągów $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$ wtedy i tylko wtedy, jeśli dla pewnego $r \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ istnieje rzeczywista, dodatnio określona macierz kwadratowa*

¹Niezerowe dodatnie rzeczywiste liczby a_1, a_2, \dots, a_N nazywamy *współmiernymi*, jeśli istnieje $a_0 > 0$ taka, że każda z liczb a_i dla $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ jest naturalną wielokrotnością a_0 .

²Okresem podstawowym nazywamy najkrótszy okres (wszystkie pozostałe są jego wielokrotnościami).

V o rozmiarze $n \times n$ ($V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V > 0$), spełniająca nierówność macierzową (zapis „ < 0 ” oznacza tu ujemną określoność macierzy)

$$\Psi^T V \Psi - V < 0 \quad (\text{III.22})$$

dla wszystkich macierzy Ψ ze zbioru potęgowego Ω^r .

Praktyczna użyteczność zacytowanego twierdzenia jest ograniczona, zwłaszcza wówczas, gdy chce się przy jego pomocy wykazać brak asymptotycznej stabilności. Wówczas należałoby bowiem zbadać nieskończenie wiele układów nierówności macierzowych dla $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dla każdego z nich wykazując nieistnienie spełniającej go dodatnio określonej macierzy $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Twierdzenie to można zastąpić użyteczniejszą wersją, będącą jednak tylko warunkiem dostatecznym, o następującym brzemieniu:

Twierdzenie III.4 *Jeśli istnieją $r \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$ oraz $V > 0$ spełniające nierówność (III.22) dla wszystkich macierzy Ψ ze zbioru Ω^r , wówczas system dynamiczny (III.20), z macierzą stanu $\Theta(k)$ przyjmującą wartości ze skończonego zbioru Ω , jest asymptotycznie stabilny dla wszystkich możliwych ciągów $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$.*

W praktyce badania należy zacząć od $r = 1$, a w razie niepowodzenia w poszukiwaniu dodatnio określonej macierzy V spełniającej (III.22) – zwiększać stopniowo wartość r . Macierzy V można poszukiwać korzystając z metod numerycznych rozwiązywania układów liniowych nierówności macierzowych (LMI) [11]. Należy zauważyć, że w miarę zwiększania r , liczba nierówności układu (III.22) szybko rośnie; jest ona równa N^r .

Przyjmując $r = 1$, otrzymujemy prostszy, szczególny przypadek podanego warunku dostatecznego:

Twierdzenie III.5 *System dynamiczny (III.20) z macierzą stanu przyjmującą wartości ze skończonego zbioru Ω jest asymptotycznie stabilny dla wszystkich możliwych ciągów $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$, jeśli istnieje macierz $V > 0$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spełniająca jednocześnie N nierówności macierzowych*

$$\Theta_i^T V \Theta_i - V < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{III.23})$$

Poszukiwanie macierzy V wymaga użycia algorytmu numerycznego rozwiązywania układu liniowych nierówności macierzowych. W przypadku, gdy nie dysponuje się odpowiednim narzędziem (np. *solver* dostępny w pakiecie MATLAB), można ograniczyć się do sprawdzenia układu nierówności (III.23) dla V równej macierzy jednostkowej ($V = I$). Jest to najprostsza postać warunku dostatecznego, gwarantującego asymptotyczną stabilność badanego systemu [26].

Rozważany przypadek obejmuje także dwa warianty opisane wcześniej (okresowy ciąg macierzy stanu oraz stałą macierz stanu), jest jednak od nich ogólniejszy.

Podamy teraz warunek konieczny stabilności dla przypadku, gdy macierz $\Theta(k)$ przyjmuje wartości ze zbioru Ω w sposób losowy:

Twierdzenie III.6 *Jeśli macierz stanu $\Theta(k)$ systemu dynamicznego III.20 może przyjmować wartości ze skończonego N -elementowego zbioru Ω w sposób całkowicie dowolny, to warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności tego systemu dla wszystkich możliwych ciągów $\{\Theta(k)\}_{k=0}^{\infty}$ jest asymptotyczna stabilność wszystkich macierzy Θ_i ze zbioru Ω ($i \in \{1, 2, \dots, N\}$).*

Uzasadnienie tego warunku jest natychmiastowe, jeśli zauważy się, że jednym z możliwych ciągów losowych jest ciąg stały. Jeśli jednak wartości macierzy stanu $\Theta(k)$ w kolejnych krokach k związane są jakąś zależnością (probabilistyczną lub deterministyczną), warunek ten może przestać być prawdziwy.

Przykład III.2

Niech w systemie dynamicznym pierwszego rzędu macierz stanu przyjmuje wartości ze zbioru $\Omega = \{\frac{1}{4}, 1, 2\}$, przy czym w co drugim kroku $\Theta(k) = \frac{1}{4}$. System taki jest asymptotycznie stabilny, mimo że nie wszystkie macierze (tutaj będące skalarami) ze zbioru Θ mają tę własność.

Macierz stanu przyjmująca wartości ze skończonego lub nieskończonego zbioru

Najbardziej ogólny przypadek występuje, gdy macierz stanu $\Theta(k)$ systemu (III.20) przyjmuje wartości ze zbioru Ω , mogącego posiadać nieskończenie wiele elementów. Warunek dostateczny dla tego wariantu można uzyskać, upraszczając twierdzenie podane w [5, strona 26]. Jest on następujący:

Twierdzenie III.7 *Jeśli istnieją dodatnio określona macierz $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz dodatnia stała $\alpha > 0$, takie że dla wszystkich macierzy Θ ze zbioru Ω zachodzi nierówność*

$$\Theta^T V \Theta - V \leq -\alpha I \quad (\text{III.24})$$

to układ (III.20) z macierzą stanu $\Theta(k) \in \Omega$ jest asymptotycznie stabilny.

Warunek (III.24) w powyższym twierdzeniu można osłabić, dodając dodatkowe założenia odnoszące się do macierzy Θ . Oto przykład uzyskanego w ten sposób wyniku:

Twierdzenie III.8 *Jeśli macierz stanu $\Theta(\varrho(k))$ zależy w sposób ciągły od pewnego zmiennego w czasie parametru $\varrho(k)$, a parametr ten dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ przyjmuje wartości z pewnego niepustego przedziału domkniętego $[\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$, to warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności systemu (III.20) z macierzą stanu $\Theta(\varrho(k))$ jest spełnienie nierówności*

$$\Theta(\varrho)^T V \Theta(\varrho) - V < 0 \quad (\text{III.25})$$

dla wszystkich ϱ z przedziału $[\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$, przy czym V jest pewną dodatnio określoną macierzą rzeczywistą.

Dowód Polega on na wykazaniu, że dla ciągłej zależności macierzy stanu od parametru z przedziału domkniętego, spełnienie nierówności (III.25) implikuje (III.24). W rozproszonych układach regulacji parametr $\varrho(k)$ może reprezentować na przykład zmieniające się z kroku na krok opóźnienie komunikacyjne.

Z założenia elementy macierzy $\Theta(\varrho)$ zależą w sposób ciągły od parametru ϱ . Wynika stąd ciągła zależność od tegoż parametru również lewej strony nierówności (III.25). Oznaczmy tę lewą stronę przez $-W(\cdot)$

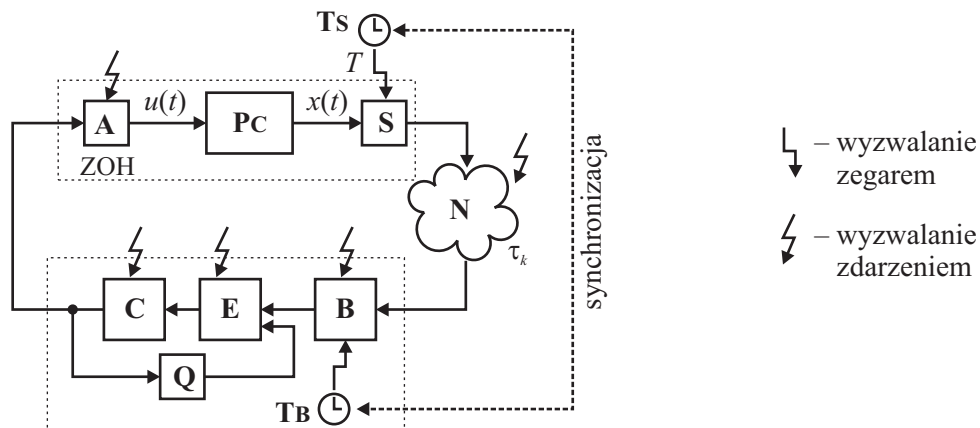
$$W(\varrho) = V - \Theta(\varrho)^T V \Theta(\varrho)$$

a wówczas nierówności (III.25) oraz (III.24) przyjmą postacie odpowiednio $W(\varrho) > 0$ oraz $W(\varrho) \geq \alpha I$. Bez straty ogólności rozważań można założyć, że macierz W jest symetryczna. Wartość formy

kwadratowej zbudowanej na rzeczywistej macierzy symetrycznej W można oszacować od dołu przez wartość formy kwadratowej zbudowanej na macierzy $\underline{\lambda}(W) \cdot I$, przy czym zapis $\underline{\lambda}(W)$ oznacza najmniejszą wartość własną macierzy W , a I to macierz jednostkowa. Wartości własne macierzy zależą w sposób ciągły od jej współczynników. Dotyczy to także najmniejszej z nich. Stąd $\underline{\lambda}(W(\varrho))$ stanowi ciągłą funkcję złożoną ϱ , która wobec ciągłości osiąga na przedziale domkniętym $[\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$ swój kres dolny, który oznaczmy przez β ($\beta = \inf_{\varrho \in [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]} \underline{\lambda}(W(\varrho))$). Na mocy założenia (III.25) jest on dodatni. By zagwarantować spełnienie (III.24), wystarczy tylko wziąć $\alpha \in (0, \beta)$, mamy bowiem wtedy $W(\varrho) \geq \beta I \geq \alpha I, \forall \varrho \in [\underline{\varrho}, \bar{\varrho}]$. To kończy dowód. ■

III.1.1.3 Sztuczne wydłużanie opóźnienia do pełnego okresu próbkowania – układ z estymacją stanu

Słabością rozwiązania przedstawionego w poprzednim podrozdziale jest fakt wyliczania sterowania w chwili czasu $t = kT + \tau_k$ w oparciu o przeterminowaną już próbkę stanu $x(kT)$. Problem nieaktualności danych można rozwiązać, wyznaczając aktualną estymatę stanu obiektu, przy znajomości jego modelu matematycznego. Zagadnienie to jest najłatwiejsze, jeśli opóźnienie komunikacyjne jest stałe. Na rysunku III.7 przedstawiono schemat blokowy układu regulacji, w którym opóźnienie jest w sposób sztuczny wydłużane przez bufor **B** do pełnego okresu próbkowania T , a regulator **C** wylicza sterowanie na podstawie estymaty stanu obliczanej przez predyktor **E**. Działanie układu



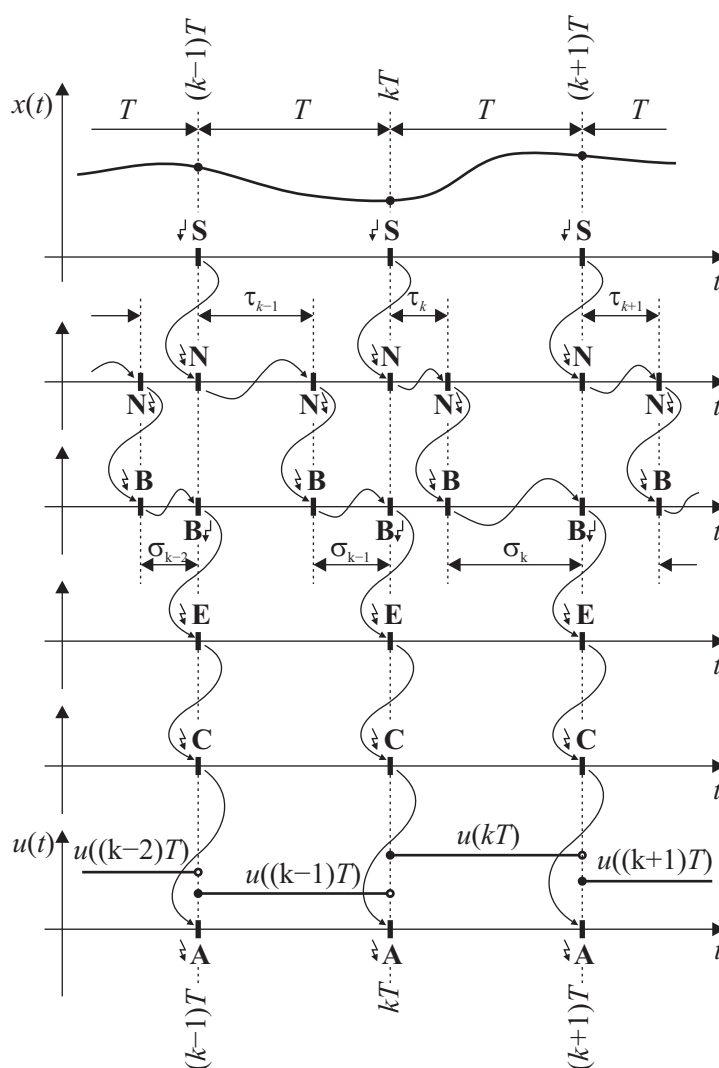
Rys. III.7: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji ze sztucznym wydłużaniem opóźnień (**B** – bufor wydłużający opóźnienia, **TB** – zegar taktujący bufor, **E** – predyktor stanu, **Q** – pomocnicza kolejka).

regulacji można opisać krok po kroku, jak niżej:

1. W chwili $t = kT$ czujnik **S**, pobudzony zegarem **TS**, próbuje stan $x(kT)$ systemu **PC** i bezwzględnie przekazuje uzyskaną próbkę $x[k]$ w pakiecie danych do sieci telekomunikacyjnej **N**.
2. Przesył pakietu przez sieć **N** zajmuje odcinek czasu o długości τ_k .
3. W chwili czasu $t = kT + \tau_k$ sieć **N** przekazuje pakiet z danymi do bufora **B**.
4. Bufor **B** zachowuje otrzymane dane i czeka do chwili $t = (k+1)T$, kiedy to, pobudzony zegarem **TB**, przekazuje je dalej do predyktora **E**. Zegary **TS** i **TB** muszą pracować synchronicznie (zgodność okresów i faz początkowych).

5. W tej samej chwili czasu $t = (k + 1) T$ predyktor **E** wyznacza bezzwłocznie estymatę stanu obiektu $\hat{x}((k + 1) T) = \hat{x}[k + 1]$ dla chwili czasu $t = (k + 1) T$ i przekazuje ją do regulatora **C**. Wykorzystywana jest przy tym poprzednio obliczona wartość sterowania $u(k T) = u[k]$ (przechowywana w pomocniczej kolejce **Q**) oraz próbka $x(k T) = x[k]$ stanu obiektu.
6. W tej samej chwili czasu $t = (k + 1) T$ regulator **C** wyznacza bezzwłocznie nową wartość sterowania $u[k + 1] = u((k + 1) T) = -K \hat{x}((k + 1) T) = -K \hat{x}[k + 1]$ i przekazuje ją urządzeniu wykonawczemu **A**.
7. W tej samej chwili czasu $t = (k + 1) T$ urządzenie wykonawcze **A** bezzwłocznie podaje otrzymaną wartość sterowania na wejście obiektu **P**.

Zależności czasowe między akcjami poszczególnych elementów układu przedstawione są na rysunku III.8. Symbol $\downarrow\mathbf{B}$ oznacza chwilę otrzymania pakietu z sieci **N** przez bufor **B**, zaś znak $\mathbf{B}\downarrow$ – moment



Rys. III.8: Zależności czasowe między zdarzeniami w układzie regulacji.

przesłania otrzymanych danych z bufora do estymatora **E**.

Podstawowe dwie operacje realizowane w układzie regulacji to predykcja stanu

$$\hat{x}(k T) = \Phi x((k - 1) T) + \Gamma u((k - 1) T) \quad (\text{III.26})$$

lub inaczej

$$\hat{x}[k] = \Phi x[k-1] + \Gamma u[k-1]$$

oraz obliczanie na podstawie otrzymanej estymaty nowej wartości sterowania

$$u(kT) = -K \hat{x}(kT)$$

lub

$$u[k] = -K \hat{x}[k]$$

Stabilność układu regulacji

Założmy, że model obiektu, wykorzystywany przy estymacji stanu, jest zgodny z obiektem regulacji, oraz że w układzie nie występują zakłócenia. Wówczas estymata stanu $\hat{x}(kT)$, wyznaczona według wzoru (III.26), jest równa samemu stanowi $x(kT)$ (z wyjątkiem chwili czasu $t = 0$, w której estymator nie dysponuje jeszcze danymi pomiarowymi). W takim przypadku sterowanie obliczane na podstawie estymaty stanu niczym nie różni się od sterowania otrzymywanego w układzie odniesienia (z wyjątkiem chwili początkowej). Wobec tego warunek stabilności obecnie rozpatrywanego układu pokrywa się z warunkiem stabilności układu odniesienia (rysunek III.2, twierdzenie III.1)

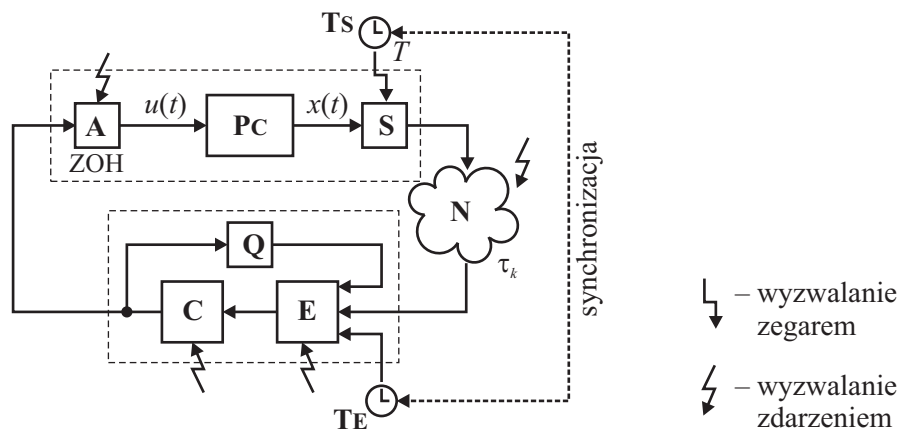
$$\lambda(\Phi - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\circ$$

W chwili czasu $t = 0$ (w chwili rozpoczęciu pracy układu regulacji) predyktor nie dysponuje poprzednią wartością stanu ani sterowania, dlatego pierwsza wyznaczona przez niego estymata nie będzie (na ogół) równa stanowi obiektu. Rozsądnie jest przyjąć dla estymaty $\hat{x}(0)$ albo wartość zero ($\hat{x}(0) = \hat{x}[0] = 0$), albo wartość oczekiwaną warunku początkowego obiektu – o ile jest ona znana ($\hat{x}(0) = E\{x(0)\}$).

III.1.1.4 Sterowanie niezwłocznie po otrzymaniu próbki sygnału z czujnika – układ z estymacją jednopunktową

W podrozdziale III.1.1.1 przedstawiono prostą metodę sterowania, wykorzystującą przeterminowaną próbkę stanu obiektu. Nie gwarantowała ona zachowania jakości regulacji ani stabilności układu. W podrozdziale III.1.1.3 pokazano, jak stosując technikę estymacji (predykcji) stanu zapewnić stabilność układu regulacji. Metoda ta jednak wiązała się z wprowadzaniem dodatkowych opóźnień i tym samym ze zwiększeniem przeterminowania danych wykorzystywanych w sterowaniu. Obecnie przedstawimy połączenie dwóch opisanych wyżej metod. Sterowanie będzie wyznaczane i podawane na obiekt bezzwłocznie po otrzymaniu próbki sygnału, a do jego wyliczenia użyta zostanie estymata obliczona dzięki znajomości modelu obiektu i zmierzonej wartości opóźnienia komunikacyjnego. Układ regulacji wykorzystujący ten schemat sterowania przedstawiony jest na rysunku III.9. Jego działanie może być opisane w punktach jak niżej:

1. W chwili $t = kT$ czujnik **S**, pobudzony zegarem **Ts**, próbkuje stan $x(kT)$ systemu **PC** i bezzwłocznie przekazuje pakiet danych zawierający otrzymaną próbkę $x[k]$ do sieci telekomunikacyjnej **N**.



Rys. III.9: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji z estymacją jednopunktową.

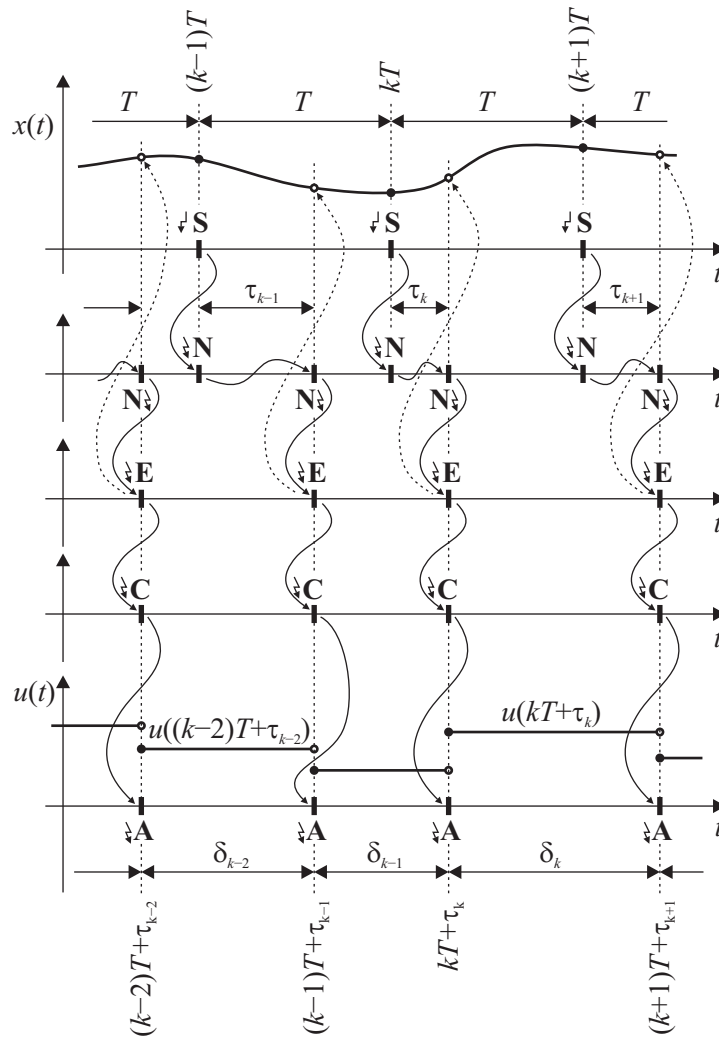
2. Przesłanie pakietu przez sieć **N** zajmuje odcinek czasu o długości τ_k .
3. W chwili czasu $t = kT + \tau_k$ sieć **N** przekazuje pakiet z danymi do predyktora **E**.
4. W tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$, bez wprowadzania dodatkowej zwłoki, predyktor **E** wyznacza estymatę stanu $\hat{x}(kT + \tau_k)$ i przekazuje ją do regulatora **C**. Korzysta przy tym ze wskazań zegara **TE** oraz ze znajomości poprzedniej wartości sterowania $u((k-1)T + \tau_{k-1})$ (przechowanej w pomocniczej kolejce **Q**). Zegary **TS** i **TE** muszą pracować synchronicznie (równe okresy i fazy początkowe).
5. W tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ regulator **C** wyznacza nową wartość sterowania $u(kT + \tau_k) = -K \hat{x}(kT + \tau_k)$ i przekazuje ją niezwłocznie do urządzenia wykonawczego **A**.
6. W tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ urządzenie wykonawcze **A** bezzwłocznie podaje otrzymaną wartość sterowania na wejście obiektu **PC**.

Zależności czasowe między akcjami poszczególnych elementów **S**, **N**, **E**, **C** i **A** układu regulacji zilustrowane są diagramem na rysunku III.10. Na przebiegu stanu $x(t)$ zaczernionymi kółkami zaznaczono wartości zmierzone przez czujnik **S**, zaś pustymi – wartości estymaty obliczonej przez element **E**, w oparciu o którą odbywa się wyznaczanie sterowań. Przy braku zakłóceń i zgodności modelu użytego w estymatorze z obiektem, estymata ta jest równa stanowi. Uproszczona wersja diagramu czasowego zamieszczona jest na rysunku III.5.

Istotnym etapem działania układu regulacji jest wyznaczanie estymaty stanu na chwilę $t = kT + \tau_k$, po otrzymaniu opóźnionej próbki stanu zmierzonego w chwili $t = kT$. Dla obiektu **PC** opisanego równaniem stanu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ zależność między stanem x w chwilach czasu t_1 i t_2 ($t_2 \geq t_1$) dana jest wzorem (III.15). Wstawiając $t_1 = kT$ i $t_2 = kT + \tau_k$ oraz uwzględniając fakt, że w przedziale czasu $[t_1, t_2]$ sterowanie u pozostaje stałe (i równe poprzednio wyznaczonej wartości $u((k-1)T + \tau_{k-1})$), otrzymuje się formułę

$$\hat{x}(kT + \tau_k) = e^{(kT + \tau_k - kT)A} x(kT) + \int_{kT}^{kT + \tau_k} e^{(kT + \tau_k - \zeta)A} B d\zeta u((k-1)T + \tau_{k-1})$$

która może być użyta do wyznaczenia poszukiwanej estymaty stanu $\hat{x}(kT + \tau_k)$ na podstawie znajomości zmierzonej próbki stanu $x(kT)$ i poprzedniego sterowania $u((k-1)T + \tau_{k-1})$. Po zastosowaniu



Rys. III.10: Zależności czasowe między zdarzeniami w układzie regulacji.

w całce podstawienia $\xi = kT + \tau_k - \zeta$ otrzymuje się

$$\hat{x}(kT + \tau_k) = e^{\tau_k A} x(kT) + \int_0^{\tau_k} e^{\xi A} B d\xi u((k-1)T + \tau_{k-1})$$

Wzór ten można zapisać inaczej jako

$$\hat{x}(kT + \tau_k) = \Phi(\tau_k) x(kT) + \Gamma(\tau_k) u((k-1)T + \tau_{k-1})$$

gdzie

$$\Phi(\tau) = e^{\tau A}, \quad \Gamma(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\xi A} B d\xi$$

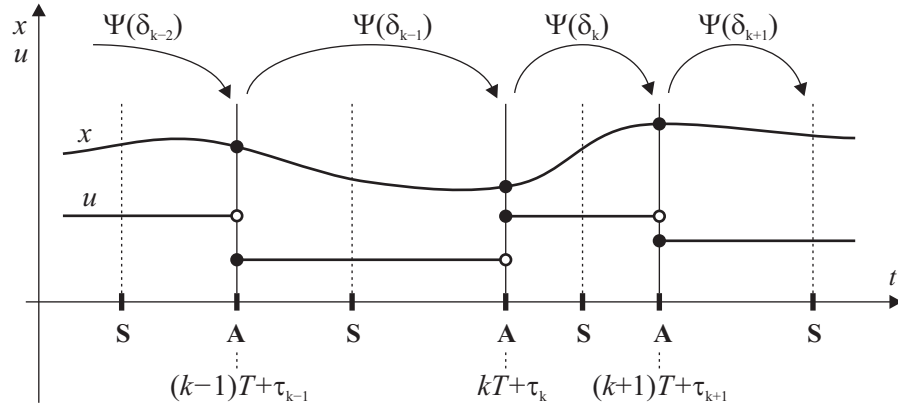
Znając estymatę stanu $\hat{x}(kT + \tau_k)$, regulator **C** wyznacza nową wartość sterowania $u(kT + \tau_k) = -K \hat{x}(kT + \tau_k)$, która jest utrzymywana przez urządzenie wykonawcze **A** na przedziale czasu $[kT + \tau_k, (k+1)T + \tau_{k+1})$

$$u(t) = -K \hat{x}(kT + \tau_k), \quad t \in [kT + \tau_k, (k+1)T + \tau_{k+1}) \quad (\text{III.27})$$

Stabilność układu regulacji

W celu zbadania stabilności rozproszonego układu regulacji z jednopunktową estymacją stanu, znajdziemy najpierw zależność między stanem $x(t)$ obiektu **PC** w kolejnych chwilach czasu o postaci

$t = kT + \tau_k$, dla $k \in \mathbb{N}$, w których następuje (w ogólnym przypadku) zmiana wartości sygnału wejściowego $u(t)$. Są to chwile zaznaczone literą **A** na diagramach czasowych na rysunkach III.5 i III.11. Oznaczmy odstęp czasu między kolejnymi takimi chwilami przez δ_k . Z diagramu III.5 łatwo



Rys. III.11: Zależności czasowe w układzie regulacji.

odczytać zależność

$$\delta_k = T + \tau_{k+1} - \tau_k$$

We wstępie do podrozdziału III.1.1 założono istnienie następującego ograniczenia na opóźnienie τ_k w każdym kroku $k \in \mathbb{N}$

$$0 < \underline{\tau} \leq \tau_k \leq \bar{\tau} < T$$

Wynika z niego również ograniczenie wielkości δ_k

$$0 < \underline{\delta} \leq \delta_k \leq \bar{\delta} < 2T$$

przy czym

$$\underline{\delta} = T + \underline{\tau} - \bar{\tau}, \quad \bar{\delta} = T + \bar{\tau} - \underline{\tau} \quad (\text{III.28})$$

Wychodząc ze wzoru (III.15), wstawiając $t_1 = kT + \tau_k$ i $t_2 = (k+1)T + \tau_{k+1}$ oraz pamiętając, że sterowanie $u(t)$ jest stałe na przedziale $[kT + \tau_k, (k+1)T + \tau_{k+1})$, którego długość wynosi δ_k , otrzymuje się zależność

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = \Phi(\delta_k) x(kT + \tau_k) + \Gamma(\delta_k) u(kT + \tau_k) \quad (\text{III.29})$$

gdzie

$$\Phi(\delta) = e^{\delta A}, \quad \Gamma(\delta) = \int_0^\delta e^{\xi A} B d\xi \quad (\text{III.30})$$

Wzór (III.29) można traktować jako dyskretne równanie stanu rozważanego rozproszonego systemu regulacji, zapisane dla chwil czasu o postaci $t = kT + \tau_k$. Badanie tego równania pozwoli określić stabilność układu regulacji. Wstawiając prawą stronę (III.27) do (III.29) otrzymujemy

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = \Phi(\delta_k) x(kT + \tau_k) - \Gamma(\delta_k) K \hat{x}(kT + \tau_k)$$

Jeśli założyć brak zakłóceń oraz pełną zgodność modelu z obiektem, wówczas estymata stanu jest równa stanowi ($\hat{x}(kT + \tau_k) = x(kT + \tau_k)$). Uwzględniając ten fakt, otrzymuje się

$$x((k+1)T + \tau_{k+1}) = (\Phi(\delta_k) - \Gamma(\delta_k)K) x(kT + \tau_k) = \Psi(\delta_k) x(kT + \tau_k) \quad (\text{III.31})$$

gdzie

$$\Psi(\delta_k) = \Phi(\delta_k) - \Gamma(\delta_k)K \quad (\text{III.32})$$

Otrzymane równanie opisuje system niestacjonarny, bowiem macierz $\Psi(\delta_k)$ zależy od zmieniającego się w czasie odstępu δ_k . Poniżej, przy pomocy metody funkcjonałów Lapunowa, sprawdzony zostanie warunek dostateczny stabilności tego systemu. Wykorzystamy w tym celu twierdzenie III.8 z podrozdziału III.1.1.2.

Weźmy jako kandydaturę na funkcjonał Lapunowa formę kwadratową z symetryczną, dodatnio określoną macierzą V [86]

$$v(x) = x^T V x, \quad V \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad V = V^T > 0 \quad (\text{III.33})$$

Zdefiniujmy następująco przyrost wartości funkcjonału Δv

$$\Delta v(x(kT + \tau_k)) = v(x((k+1)T + \tau_{k+1})) - v(x(kT + \tau_k)) \quad (\text{III.34})$$

Wstawiając (III.33) do (III.34) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Delta v(x(kT + \tau_k)) &= \\ &= x((k+1)T + \tau_{k+1})^T V x((k+1)T + \tau_{k+1}) - x(kT + \tau_k)^T V x(kT + \tau_k) \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (III.31), powyższy wzór przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \Delta v(x(kT + \tau_k)) &= \\ &= (\Psi(\delta_k) x(kT + \tau_k))^T V (\Psi(\delta_k) x(kT + \tau_k)) - x(kT + \tau_k)^T V x(kT + \tau_k) \end{aligned}$$

a następnie

$$\Delta v(x(kT + \tau_k)) = x(kT + \tau_k)^T (\Psi(\delta_k)^T V \Psi(\delta_k) - V) x(kT + \tau_k)$$

Powyższą formułę można zapisać jako

$$\Delta v(x(kT + \tau_k)) = -x(kT + \tau_k)^T W(\delta_k) x(kT + \tau_k)$$

gdzie symetryczna macierz $W(\delta) = W(\delta)^T$ jest zdefiniowana następująco

$$W(\delta_k) = -(\Psi(\delta_k)^T V \Psi(\delta_k) - V) \quad (\text{III.35})$$

Zgodnie z twierdzeniem III.8, warunek dostateczny (choć niekonieczny) asymptotycznej stabilności badanego układu dynamicznego można zapisać w postaci

$$\exists_{V=V^T>0} \quad \forall_{\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]} \quad W(\delta) > 0 \implies (\text{AS})$$

Przykład III.3

Dla obiektu \mathbf{PC} , opisanego równaniem stanu $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ z macierzami (III.11), macierze $\Phi(\delta)$ i $\Gamma(\delta)$ (a ściślej: funkcje o wartościach macierzowych), wyznaczone według wzorów (III.30), są równe

$$\Phi(\delta) = \begin{bmatrix} 1 & 100\delta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\delta) = \begin{bmatrix} 2000\delta^2 \\ 40\delta \end{bmatrix}$$

Dla proporcjonalnego regulatora $K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ (gwarantującego asymptotyczną stabilność układu regulacji bez sieci telekomunikacyjnej) macierz $\Psi(\delta)$, określona wzorem (III.32), przyjmuje postać

$$\Psi(\delta) = \begin{bmatrix} 1 - 6000\delta^2 & 100\delta - 4000\delta^2 \\ -120\delta & 1 - 80\delta \end{bmatrix}$$

Weźmy kandydata na funkcjonal Lapunowa o postaci (III.33) z następującą macierzą V

$$V = V^T = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{III.36})$$

która jest symetryczna i dodatnio określona (można to sprawdzić za pomocą kryterium Sylwestera, badając jej minory wiodące V_1 i V_2)

$$V_1 = v_{11} = 23 > 0$$

$$V_2 = |V| = v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} = 352 > 0$$

Macierz $W(\delta)$, wyznaczona według wzoru (III.35), ma postać

$$W(\delta) = \begin{bmatrix} w_{11}(\delta) & w_{12}(\delta) \\ w_{21}(\delta) & w_{22}(\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45600\delta^2 - 828000000\delta^4 + 960\delta - 5760000\delta^3 & \vdots \\ -60\delta + 10400\delta^2 + 9960000\delta^3 - 552000000\delta^4 & \vdots \\ \vdots & -60\delta + 10400\delta^2 + 9960000\delta^3 - 552000000\delta^4 \\ \vdots & -236400\delta^2 + 15840000\delta^3 - 368000000\delta^4 + 1760\delta \end{bmatrix}$$

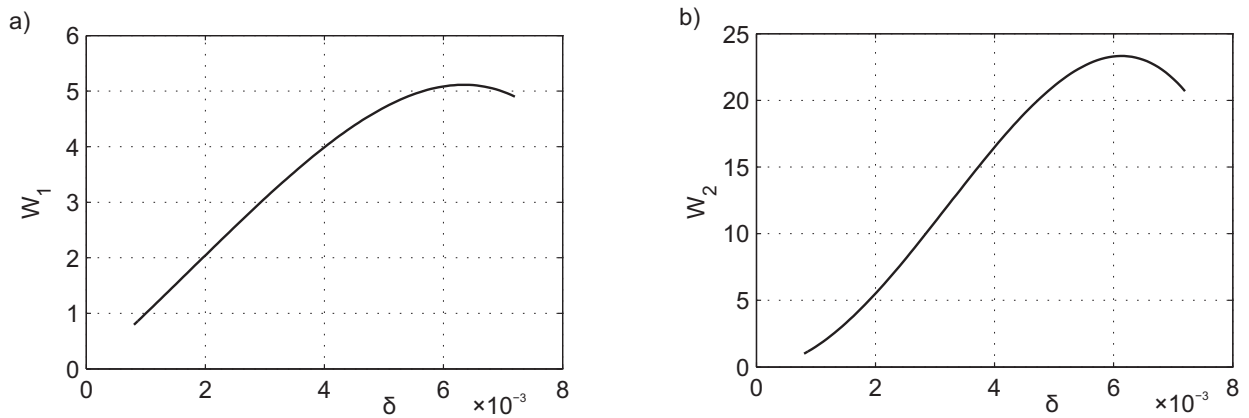
Jej minory wiodące są równe odpowiednio

$$W_1(\delta) = \det w_{11}(\delta) = w_{11}(\delta) = 45600\delta^2 - 828000000\delta^4 + 960\delta - 5760000\delta^3$$

$$\begin{aligned} W_2(\delta) &= \det W(\delta) = w_{11}(\delta)w_{22} - w_{12}(\delta)w_{21}(\delta) = \\ &= -4624000000\delta^4 - 145440000\delta^3 + 1686000\delta^2 \end{aligned}$$

Przy założonym okresie próbkowania $T = 0.004$ oraz przyjętych granicznych wartościach opóźnień komunikacyjnych $\underline{\tau} = 0.0004$ oraz $\bar{\tau} = 0.0036$, graniczne wartości parametru δ_k , wyznaczone według wzorów (III.28), wynoszą odpowiednio $\underline{\delta} = 0.0008$ oraz $\bar{\delta} = 0.0072$. Zależność minorów wiodących macierzy $W(\delta)$ od parametru δ z przedziału $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ przedstawiona jest na wykresach na rysunku III.12. Widać z nich, że dla dowolnej $\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ oba minory wiodące są (silnie) dodatnie, co gwarantuje dodatnią określoność macierzy $W(\delta)$. A stąd wynika asymptotyczna stabilność badanego systemu regulacji

$$\forall_{\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]} (W_1(\delta) > 0 \wedge W_2(\delta) > 0) \implies \forall_{\delta \in [\underline{\delta}, \bar{\delta}]} W(\delta) > 0 \implies (\text{AS})$$



Rys. III.12: Zależność minorów wiodących $W_1(\delta)$ i $W_2(\delta)$ macierzy $W(\delta)$ od parametru δ .

Największą trudność w stosowaniu opisanej wyżej procedury badania stabilności stanowi znalezienie odpowiedniej macierzy V . Poszukując jej można się wspomóc metodami numerycznymi rozwiązywania układów liniowych nierówności macierzowych (LMI – *Linear Matrix Inequalities*), zaimplementowanymi między innymi w programie MATLAB. W dodatku D.1 zamieszczono zawartość M-pliku skryptowego, który pomógł w znalezieniu macierzy V użytej w powyższym przykładzie liczbowym. W pliku tym definiowany i rozwiązywany jest układ dwunastu (liczba ta nie jest parametrem krytycznym) nierówności macierzowych o postaci

$$V > 0$$

$$\Psi(\delta)^T V \Psi(\delta) - V < 0, \quad \delta = \underline{\delta} + i \frac{\bar{\delta} - \underline{\delta}}{10}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$$

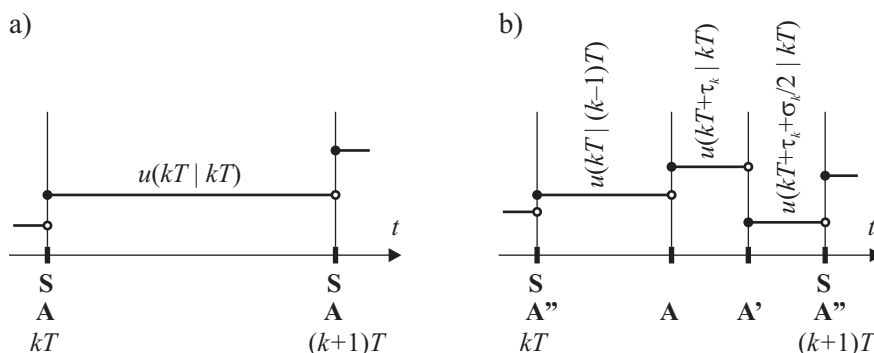
Pierwsza nierówność gwarantuje dodatnią określoność symetrycznego rozwiązania V . Jedenaście pozostałych powstało z warunku $W(\delta) > 0$ zapisanego dla jedenastu wartości parametru δ , wybranych z równomiernymi odstępami z przedziału $[\underline{\delta}, \bar{\delta}]$ (wśród wybranych wartości są też końce przedziału). Poszukiwano rozwiązania dopuszczalnego, wykorzystując funkcję `feasp`. Otrzymany wynik, po zaokrągleniu w dół do liczb całkowitych (zwiększyło to czytelność podanego wyżej przykładu liczbowego), dany jest wzorem (III.36).

Powyżej wykazano asymptotyczną stabilność rozproszonego układu regulacji, korzystając z warunku dostatecznego (który nie jest jednak warunkiem koniecznym). Należy oczekiwać, że w przypadku rozpatrywanego systemu będzie to warunek zachowawczy, ponieważ nie uwzględnia on pewnych zależności zachodzących między wartościami macierzy $\Psi(\delta_k)$ dla kolejnych chwil czasu k . Wynikają one z faktu, iż wielkości δ_k nie mogą przyjmować dla następujących po sobie k zupełnie dowolnych, niezależnych od siebie wartości. Przykładowo, jeśli $\delta_{k-1} = \delta_{k+1} = \bar{\delta}$ to musi zachodzić równość $\delta_k = \underline{\delta}$. Warunek ten można odczytać z rysunku III.5.

Znając charakter zależności między $\Psi(\delta_k)$ dla kolejnych k (deterministyczny lub stochastyczny), można określać mniej zachowawcze warunki stabilności. Opóźnienia komunikacyjne dają się niekiedy modelować przy pomocy łańcuchów Markowa, a wówczas stabilność można badać metodami podanymi w pracach [42, 134]. Niestety, takie modele są stosunkowo złożone i trudne do identyfikacji, a to ogranicza możliwości stosowania bazujących na nich metod.

III.1.1.5 Sterowanie niezwłocznie po otrzymaniu próbki sygnału z czujnika – układ z estymacją trójpunktową

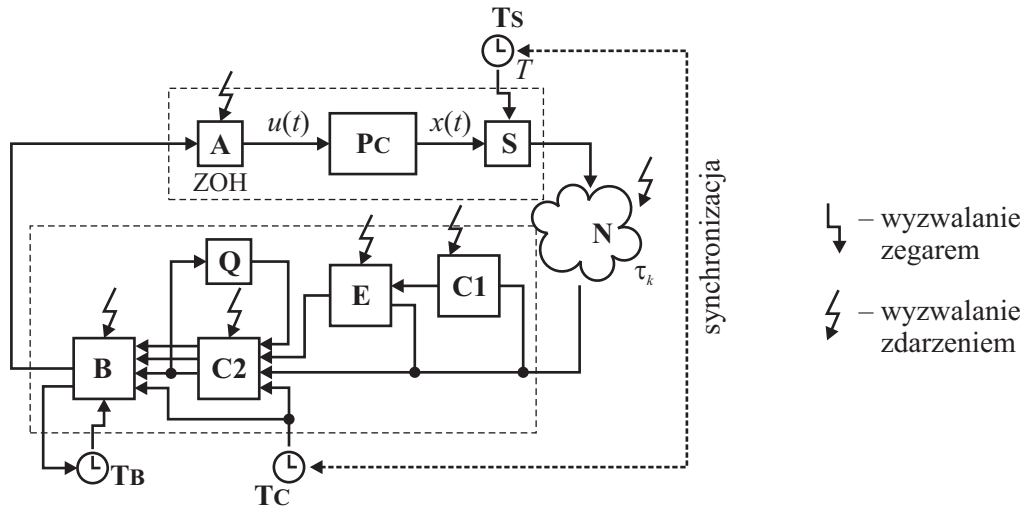
Idea rozwiązania przedstawionego w niniejszym podrozdziale polega na takim sterowaniu obiektem **PC**, aby w chwilach czasu $t_k = kT$ jego stan przyjmował takie same wartości, jakie osiągane są w układzie odniesienia, w którym nie ma sieci telekomunikacyjnej (i związanych z nią opóźnień), a sterowanie wyznaczone jest przez proporcjonalny regulator od stanu. Oznaczmy przez $u(t_2 | t_1)$ sterowanie podawane na obiekt począwszy od chwili czasu t_2 , a wyznaczone na podstawie znajomości stanu x w chwili czasu t_1 . Sterowanie $u(kT | kT)$ w układzie odniesienia pozostaje stałe na przedziale czasu $[kT, (k+1)T)$. Równoważne mu sterowanie w układzie rozproszonym (z siecią), przedstawione na rysunku III.13b, nie jest stałe (w ogólnym przypadku) na podanym przedziale, lecz ma postać przebiegu schodkowego, złożonego z trzech segmentów (dla rozpatrywanego dalej obiektu regulacji drugiego rzędu; ogólnie $n + 1$ schodków dla obiektu o rzędzie n). Wartość pierwszego „schodka” wyznaczana jest w poprzednim, $(k - 1)$ -szym kroku obliczeń, na podstawie poprzedniej próbki stanu $x((k - 1)T)$, zaś dwie pozostałe – w aktualnym, k -tym kroku, na podstawie znajomości aktualnej próbki $x(kT)$. Użyty na rysunku symbol $u(kT + \tau_k | kT)$ oznacza wartość, którą przyjmuje sterowanie w chwili czasu $kT + \tau_k$, a która została wyznaczona na podstawie znajomości stanu obiektu w chwili czasu kT . Znaczenie pozostałych symboli jest analogiczne. Na rysunku III.14 przedstawiony



Rys. III.13: Sterowania: a) w układzie odniesienia, w którym nie występują opóźnienia, b) równoważne, w rozważanym rozproszonym układzie regulacji.

jest schemat blokowy układu regulacji realizującego opisywany algorytm. Kolejne etapy działania układu i jego poszczególnych elementów są następujące:

1. W chwili $t = kT$ czujnik **S**, pobudzony zegarem **Ts**, próbkuje stan $x(kT)$ systemu **PC** i bezzwłocznie przekazuje pakiet danych zawierający uzyskaną próbkę $x[k]$ do sieci telekomunikacyjnej **N**.
2. Przesłanie pakietu przez sieć **N** zajmuje odcinek czasu o długości τ_k .
3. W chwili czasu $t = kT + \tau_k$ sieć **N** przekazuje pakiet z danymi do regulatora **C1** oraz predyktora **E**. Regulator **C1** oblicza wartość sterowania odniesienia $u(kT | kT) = -Kx(kT)$, a predyktor **E** – estymatę stanu $\hat{x}((k+1)T | kT)$, jaki osiągnąłby obiekt **PC** w chwili $t = (k+1)T$, gdyby sterowanie $u(kT | kT)$ zostało na niego podane bez opóźnienia.
4. W tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ regulator **C2** wyznacza trzy wartości sterowania: $u(kT + \tau_k | kT)$, $u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)$ (przy czym $\sigma_k = T - \tau_k$) oraz $u((k+1)T | kT) =$



Rys. III.14: Schemat rozproszonego układu regulacji z estymacją trójpunktową.

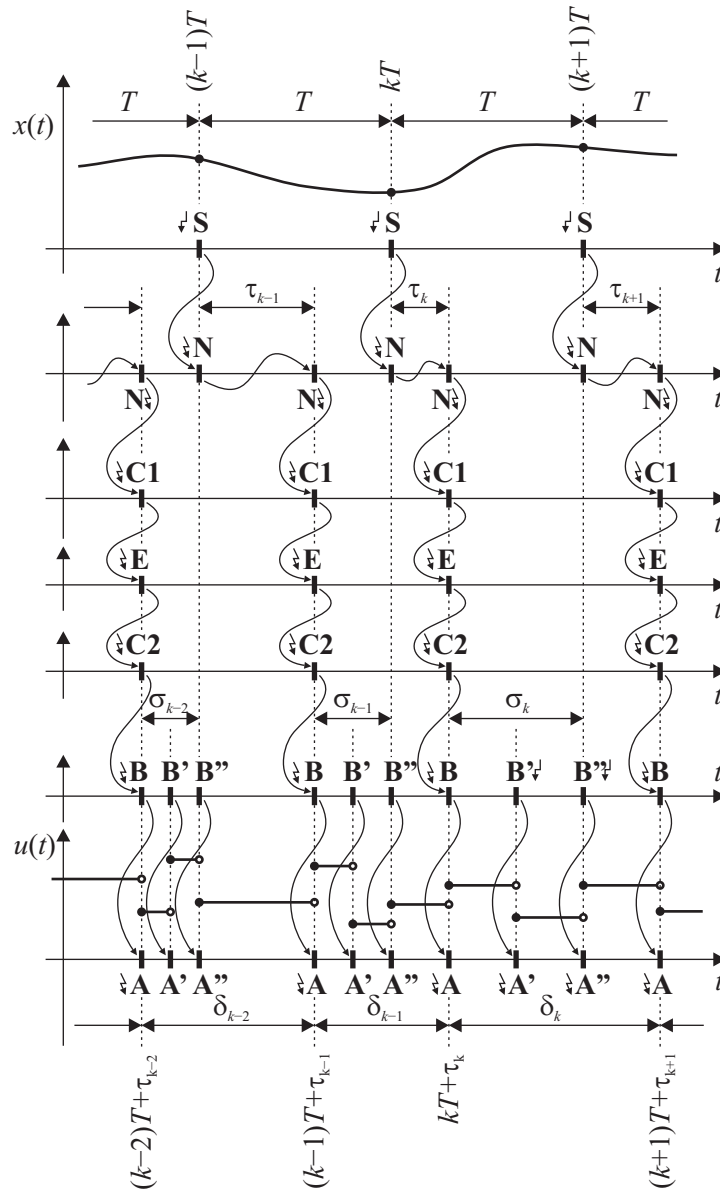
$-K \hat{x}((k+1)T)$ i przekazuje je do bufora **B**; korzysta przy tym ze wskazań zegara **TC** oraz znajomości trzeciej wartości sterowania z poprzedniego kroku $u(kT | (k-1)T)$ (przechowanej w pomocniczej kolejce **Q**). Zegary **TC** i **TS** muszą pracować synchronicznie.

5. W tej samej chwili czasu $t = kT + \tau_k$ bufor **B** przekazuje pierwszą z otrzymanych wartości sterowań do urządzenia wykonawczego **A**. Dwie pozostałe przesyłane są odpowiednio w odstępach czasu równych $\sigma_k/2$ (odpowiednio w chwilach czasu $t = kT + \tau_k + \sigma_k/2$ oraz $t = (k+1)T$). Do odmierzenia tych odcinków służy pomocniczy zegar **TB**.
6. Urządzenie wykonawcze **A** bezzwłocznie podaje otrzymywane wartości sterowania na wejście obiektu **PC** – trzykrotnie w każdym okresie próbkowania (punkty **A**, **A'** oraz **A''** na rysunku III.13).

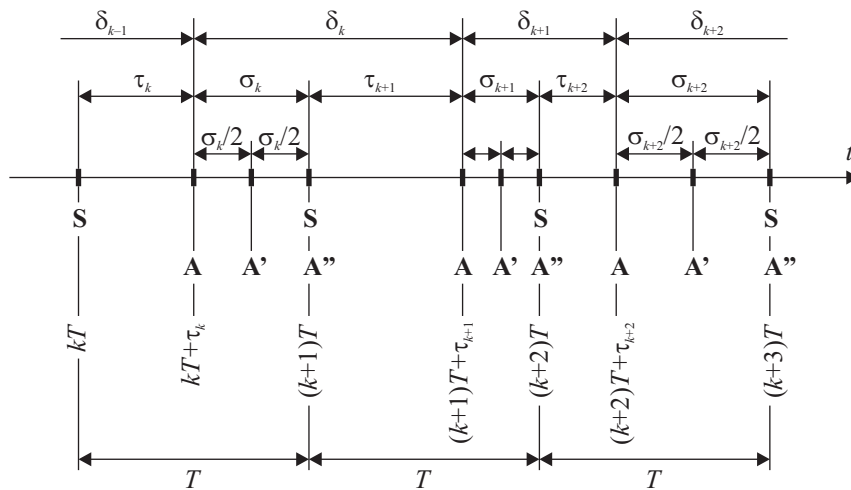
Zrozumienie powyższego opisu ułatwia diagram przedstawiony na rysunku III.15, który wyjaśnia zależności czasowe w układzie. Uproszczona wersja tego diagramu pokazana jest na rysunku III.16. W opisie algorytmu regulacji podano wzór określający wartość sterowania $u((k+1)T | kT)$ (przeznaczonego dla punktu **A''**). Poniżej wyprowadzone zostaną formuły, którymi wyrażają się dwie pozostałe jego wartości: $u(kT + \tau_k)$ i $u(kT + \tau_k + \sigma_k/2)$ (punkty **A** i **A'**), wyznaczone w tym samym okresie próbkowania. Jak poprzednio zakładamy, że obiekt regulacji **PC** z czasem ciągłym dany jest równaniem stanu (III.1). Uzyskany w wyniku dyskretyzacji obiekt **PD** w układzie odniesienia, w którym nie występują opóźnienia, opisany jest równaniem z czasem dyskretnym (III.2), w którym macierze $\Phi(T)$ i $\Gamma(T)$ wyrażają się wzorami (III.3). Równanie zamkniętego układu regulacji z regulatorem (III.5) przyjmuje postać (III.6). Równanie to będzie wykorzystywane przez predyktor **E**, widoczny na rysunku III.14, do wyznaczenia estymaty stanu

$$\hat{x}((k+1)T | kT) = \Phi(T)x(kT) + \Gamma(T)u(kT | kT) = (\Phi(T) - \Gamma(T)K)x(kT) \quad (\text{III.40})$$

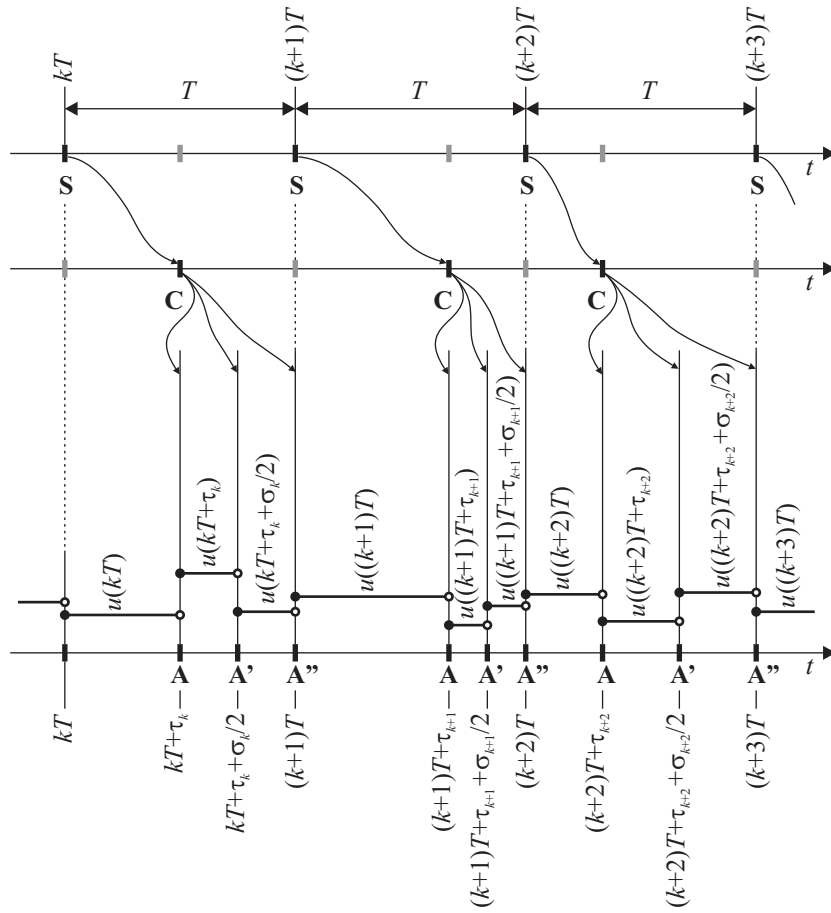
W układzie rozproszonym, w tym samym przedziale czasu $[kT, (k+1)T)$, sterowanie przyjmuje trzy (w ogólności różne) wartości (rysunek III.17). Pierwsza z nich, $u(kT | (k-1)T)$, wyznaczana jest we wcześniejszym, $(k-1)$ -szym kroku obliczeń; oznacza to, że w k -tym kroku nie mamy na nią żadnego wpływu. Pozostałe dwie należy dobrać tak, by stan obiektu w chwili $(k+1)T$ osiągnął



Rys. III.15: Zależności czasowe w układzie regulacji.



Rys. III.16: Definicja odstępów czasowych w układzie regulacji.



Rys. III.17: Następnstwo zdarzeń i zależności czasowe w układzie regulacji.

wartość równą jego pomocniczej estymacie $\hat{x}((k+1)T | kT)$. W układzie rozproszonym zależność $x((k+1)T)$ od $x(kT)$ dana jest wzorem

$$\begin{aligned}
 x((k+1)T) = & e^{T A} x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau_k} e^{((k+1)T-\zeta) A} B d\zeta \cdot u(kT | (k-1)T) + \\
 & + \int_{kT+\tau_k}^{kT+\tau_k+\sigma_k/2} e^{((k+1)T-\zeta) A} B d\zeta \cdot u(kT + \tau_k | kT) + \\
 & + \int_{kT+\tau_k+\sigma_k/2}^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\zeta) A} B d\zeta \cdot u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)
 \end{aligned}$$

który otrzymuje się z ogólnej formuły (III.15), wstawiając $t_1 = kT$ oraz $t_2 = (k+1)T$ i dzieląc występującą w niej całkę na sumę trzech składników. Każdy z nich to całka na przedziale, na którym wartość sterowania jest stała. Stosując w trzech powyższych całkach następujące podstawienie

$$\xi = \zeta - kT, \quad \zeta = \xi + kT, \quad d\zeta = d\xi$$

otrzymuje się formułę (porównaj [133])

$$\begin{aligned}
 x((k+1)T) = & e^{T A} x(kT) + \int_0^{\tau_k} e^{(T-\xi) A} B d\xi \cdot u(kT | (k-1)T) + \\
 & + \int_{\tau_k}^{\tau_k+\sigma_k/2} e^{(T-\xi) A} B d\xi \cdot u(kT + \tau_k | kT) + \\
 & + \int_{\tau_k+\sigma_k/2}^T e^{(T-\xi) A} B d\xi \cdot u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)
 \end{aligned}$$

którą przy oznaczeniach

$$\Gamma_0(\tau) = \int_0^\tau e^{(T-\xi)A} B d\xi, \quad \Gamma_1(\tau) = \int_\tau^{\frac{T+\tau}{2}} e^{(T-\xi)A} B d\xi, \quad \Gamma_2(\tau) = \int_{\frac{T+\tau}{2}}^T e^{(T-\xi)A} B d\xi$$

w których zastosowano równość

$$\tau_k + \frac{\sigma_k}{2} = \frac{T + \tau_k}{2}$$

można zapisać w zwartej formie jako

$$\begin{aligned} x((k+1)T) = & \Phi(T) x(kT) + \Gamma_0(\tau_k) u(kT | (k-1)T) + \\ & + \Gamma_1(\tau_k) u(kT + \tau_k | kT) + \Gamma_2(\tau_k) u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Przykład III.4

Dla macierzy A i B o postaci (III.11) i dla okresu próbkowania $T = 0.004$, macierze $\Gamma_0(\tau)$, $\Gamma_1(\tau)$ oraz $\Gamma_2(\tau)$ wyrażają się wzorami

$$\Gamma_0(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a b \tau (2T - \tau) \\ b \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 (1/125 - \tau) \tau \\ 40 \tau \end{bmatrix} \quad (\text{III.42a})$$

$$\Gamma_1(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} a b (T - \tau)^2 \\ \frac{1}{2} b (T - \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 (\tau - 1/250)^2 \\ 2/25 - 20 \tau \end{bmatrix} \quad (\text{III.42b})$$

$$\Gamma_2(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} a b (T - \tau)^2 \\ \frac{1}{2} b (T - \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 (\tau - 1/250)^2 \\ 2/25 - 20 \tau \end{bmatrix} \quad (\text{III.42c})$$

Zastępując lewą stronę równania (III.41) estymatą stanu $\hat{x}((k+1)T | kT)$, wyznaczoną według wzoru (III.40), otrzymuje się

$$\begin{aligned} \Phi(T) x(kT) + \Gamma(T) u(kT | kT) = & \Phi(T) x(kT) + \Gamma_0(\tau_k) u(kT | (k-1)T) + \\ & + \Gamma_1(\tau_k) u(kT + \tau_k | kT) + \Gamma_2(\tau_k) u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Usuńmy jednakowy wyraz $\Phi(T) x(kT)$ po obu stronach znaku równości, a następnie przenieśmy wyrażenia zawierające niewiadome $u(kT + \tau_k | kT)$ i $u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)$ na lewą stronę, a pozostałe – na prawą

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\tau_k) u(kT + \tau_k | kT) + \Gamma_2(\tau_k) u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT) = \\ = \Gamma(T) u(kT | kT) - \Gamma_0(\tau_k) u(kT | (k-1)T) \end{aligned}$$

Następnie zapiszmy otrzymane równanie w postaci wektorowo-macierzowej, zastępując $u(kT | kT)$ przez $-K x(kT)$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1(\tau_k) & \Gamma_2(\tau_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(kT + \tau_k | kT) \\ u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT) \end{bmatrix} = -\Gamma(T) K x(kT) - \Gamma_0(\tau_k) u(kT | (k-1)T)$$

Jego rozwiązanie jest następujące

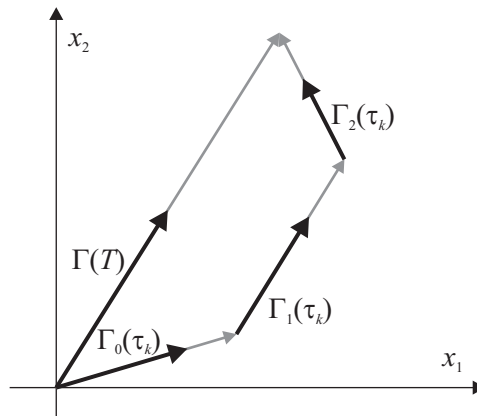
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(kT + \tau_k | kT) \\ u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT) \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} \Gamma_1(\tau_k) & \Gamma_2(\tau_k) \end{bmatrix}^{-1} (\Gamma_0(\tau_k) u(kT | (k-1)T) + \Gamma(T) K x(kT)) \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Warunkiem istnienia rozwiązania jest nieosobliwość macierzy $\begin{bmatrix} \Gamma_1(\tau_k) & \Gamma_2(\tau_k) \end{bmatrix}$. Dla macierzy określonych równościami (III.42b) i (III.42c) jest on spełniony dla każdego τ z przedziału $(0, T)$. Wzór (III.44) oraz formuła

$$u((k+1)T | kT) = -K \hat{x}((k+1)T) = -K (\Phi(T) - \Gamma(T) K) x(kT)$$

pozwalają na wyznaczenie w k -tym kroku obliczeń wszystkich trzech wartości sterowania zależnych od zmierzonego stanu $x(kT) = x[k]$ obiektu.

Omawiana wyżej równoważność między sterowaniem stałym $u(kT | kT)$, a sterowaniem schodkowym określonym wartościami $u(kT | (k-1)T)$, $(kT + \tau_k | kT)$ i $(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)$ (patrz rysunek III.13 lub III.17) posiada prostą interpretację geometryczną, wynikającą ze wzoru (III.43). Dla obiektu o jednym wejściu i dwóch zmiennych stanu ($p = 1$, $n = 2$) macierze $\Gamma(T)$ oraz $\Gamma_0(\tau)$, $\Gamma_1(\tau)$ i $\Gamma_2(\tau)$ są dwuelementowymi wektorami kolumnowymi i mogą być wykreślone w prostokątnym układzie współrzędnych $0x_1x_2$ na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (rysunek III.18). Równanie (III.43) jest spełnione, jeśli suma geometryczna trzech przedstawionych na rysunku wektorów jest równa czwartemu. Prawa strona równania ma postać kombinacji liniowej, w której współczynnikami są wartości



Rys. III.18: Interpretacja graficzna równoważności sterowań.

sterowań, zaś wektorami – macierze $\Gamma_0(\cdot)$, $\Gamma_1(\cdot)$ i $\Gamma_2(\cdot)$.

Stabilność układu regulacji

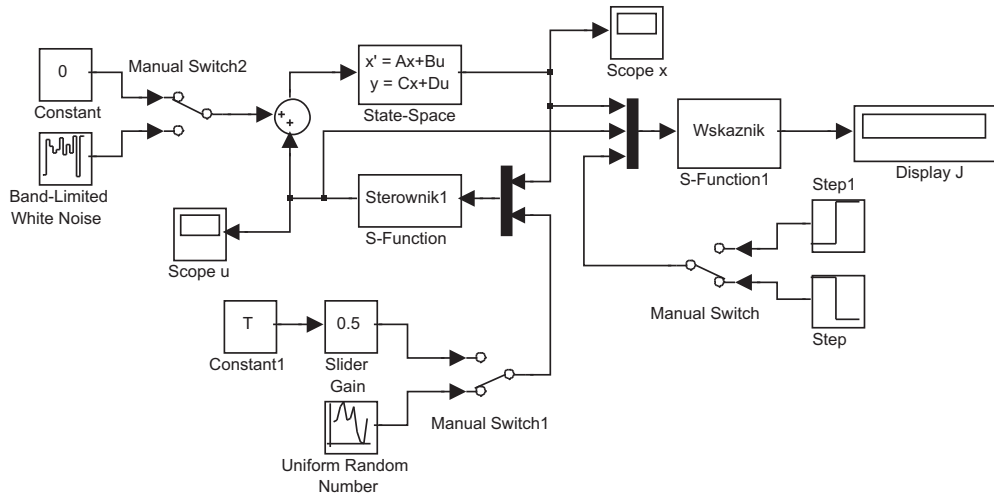
Założmy, że na rozważany rozproszony układ regulacji nie oddziałują zakłócenia, a model wykorzystywany przez predyktor \mathbf{E} i regulator $\mathbf{C2}$ jest zgodny z obiektem. Wówczas w chwilach czasu $t_k = kT$ stan obiektu w rozważanym układzie regulacji jest taki sam, jak w układzie odniesienia, przedstawionym na rysunku III.2. Wobec tego własności stabilności obu układów pokrywają się. Warunek konieczny i wystarczający asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu ma postać

$$\lambda(\Phi(T) - \Gamma(T) K) \subset \mathbb{C}^\ominus$$

III.1.1.6 Eksperymenty symulacyjne

Działanie pięciu opisanych wyżej układów regulacji (układu odniesienia oraz czterech wariantów układu rozproszonego) przetestowane zostało na drodze symulacji komputerowych w środowisku

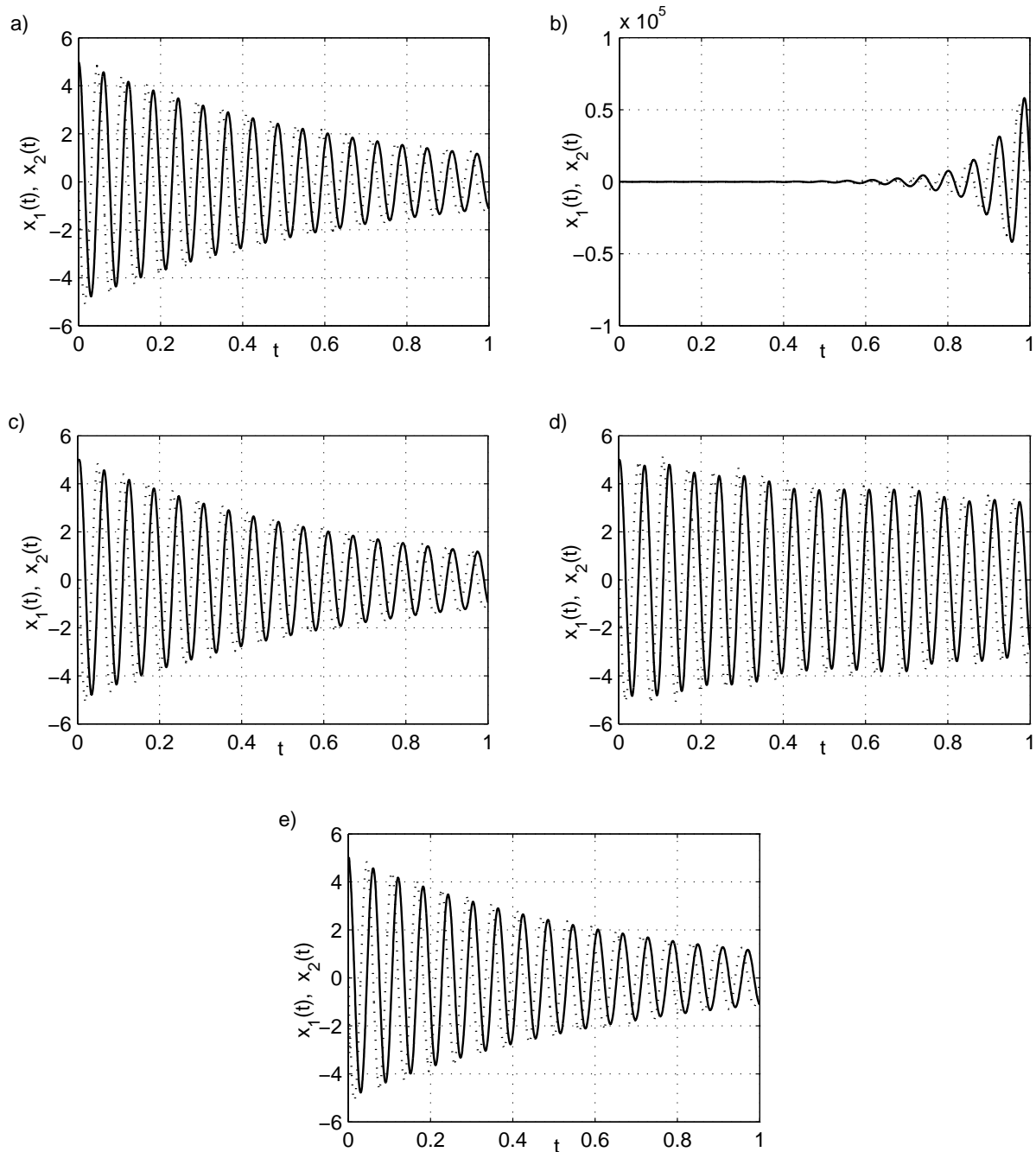
obliczeń numerycznych MATLAB/*Simulink*. Wykorzystano dane liczbowe (III.11) z przykładu III.1. Model pojedynczego układu regulacji, zestawiony w *Simulinku*, przedstawiony jest na rysunku III.19. Podstawowe elementy na schemacie to blok **State-Space**, reprezentujący obiekt regulacji **PC** oraz



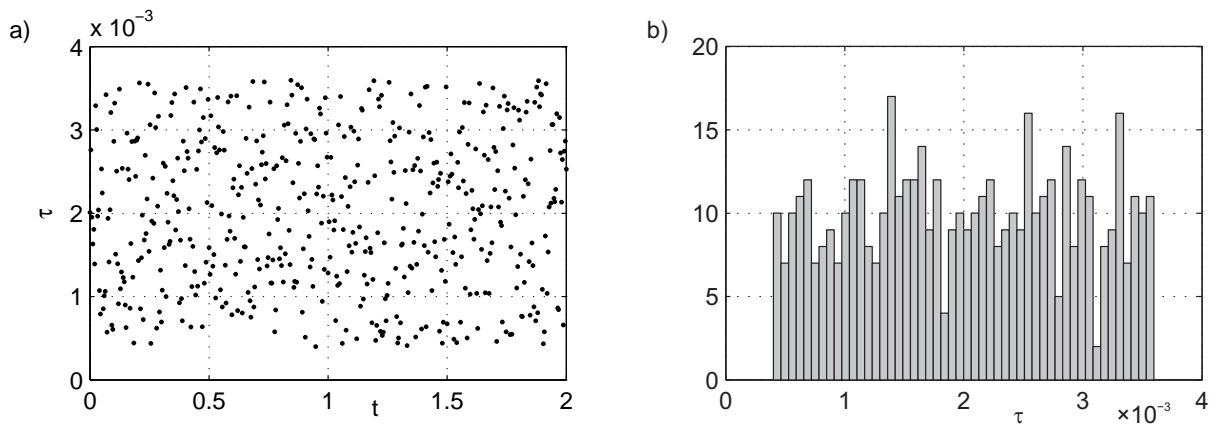
Rys. III.19: Schemat układu regulacji w Simulinku.

blok **S-Function**, kryjący w sobie łącznie algorytmy czujnika **S**, sieci **N** i regulatora **C**, zapisane w M-pliku funkcyjnym o formacie S-funkcji. Blok **S-Function1** w modelu w Simulinku (rysunek III.19) wyznacza wartość wskaźnika jakości J (określający go wzór podany będzie nieco dalej), przełącznik **Manual Switch1** pozwala wybrać rodzaj opóźnień komunikacyjnych (stałe lub zmienne), zaś **Manual Switch2** umożliwia dodanie zakłóceń do sygnału wejściowego obiektu. Przełącznik **Manual Switch** wybiera przedział czasu, na którym obliczany jest wskaźnik jakości J , wzorowany na (III.8). Ilościowe porównanie układów regulacji, w oparciu o wartość wskaźnika jakości, zamieszczone jest w dalszej części opracowania.

Na rysunku III.20 zebrano przebiegi czasowe uzyskane przez symulacje pracy wszystkich pięciu rozpatrywanych układów regulacji. Przeprowadzono je dla warunku początkowego $x(0) = x[0] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}^T$, przy braku zakłóceń oddziałujących na układ. Symulowane opóźnienia komunikacyjne τ_k miały rozkład jednostajny na przedziale $[T/10, 9T/10] = [0.0004, 0.0036]$. Ich przebieg czasowy oraz histogram zamieszczone są na rysunku III.21. Macierz regulatora $K = \begin{bmatrix} 2.6266 & 0.5997 \end{bmatrix}$ dobrano metodą przesuwania wartości własnych, zadając $z_1 = 0.91 + j0.4$, $z_2 = 0.91 - j0.4$. Moduły obu wartości własnych są mniejsze od jedności, co gwarantuje asymptotyczną stabilność systemu odniesienia (bez opóźnień). Wyniki symulacji wskazują, że układ ze sterowaniem bezzwłocznym bez estymacji stracił stabilność – ten prosty algorytm nie sprawdza się w testowanym tu układzie regulacji. Spośród trzech pozostałych układów rozproszonych, które zachowały stabilność, wyraźnie najgorsza jakość regulacji osiągnięta jest przez algorytm sterowania bezzwłocznego z jednopunktową estymacją stanu. Dwa pozostałe układy regulacji (dla których wykazanie stabilności jest najłatwiejsze) pozwalają osiągnąć jakość regulacji porównywalną z uzyskaną w układzie odniesienia. Dotyczy to jednak jedynie przypadku pracy bez zakłóceń i przy pełnej zgodności modelu użytego do estymacji z obiektem. Kwestia jakości regulacji w obecności zakłóceń poruszona będzie w podrozdziale III.1.1.8. Na rysunku III.22 przedstawiono przebiegi czasowe sterowania w układzie ze sterowaniem niezwłocznym i trójpunktową estymacją stanu dla dwóch różnych przypadków: bez

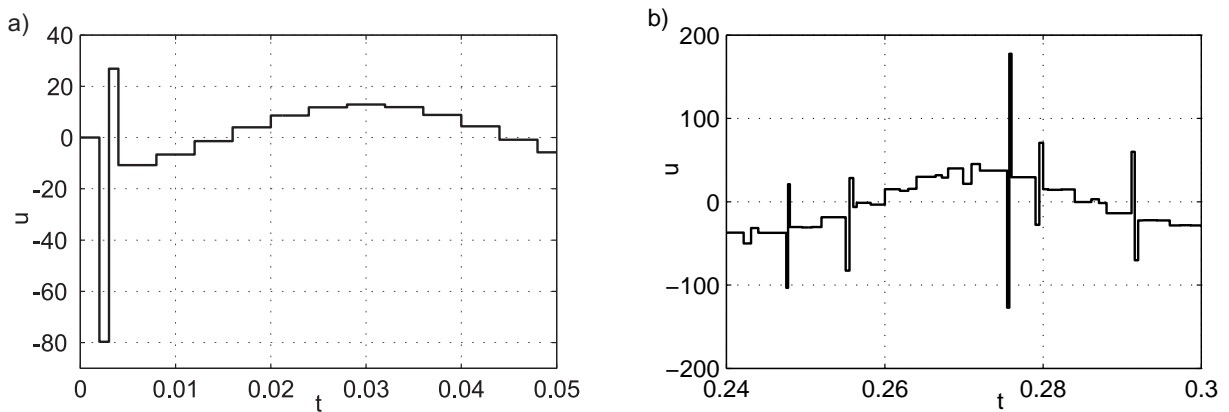


Rys. III.20: Przebiegi czasowe stanu $x(t)$ w układach regulacji podczas symulacji komputerowych: a) układ odniesienia bez opóźnień, b) sterowanie niezwłoczne, bez estymacji, c) sztuczne wydłużanie opóźnień, z estymacją stanu, d) sterowanie niezwłoczne, estymacja jednopunktowa, e) sterowanie niezwłoczne, estymacja trójpunktowa ($x_1(t)$ – linia ciągła, $x_2(t)$ – linia przerywana).



Rys. III.21: Przebieg czasowy (a) i histogram (b) opóźnień τ_k transmisji podczas symulacji komputerowych.

zakłóceń oraz w ich obecności. Wykresy ujawniają podstawową wadę tego układu – występowanie



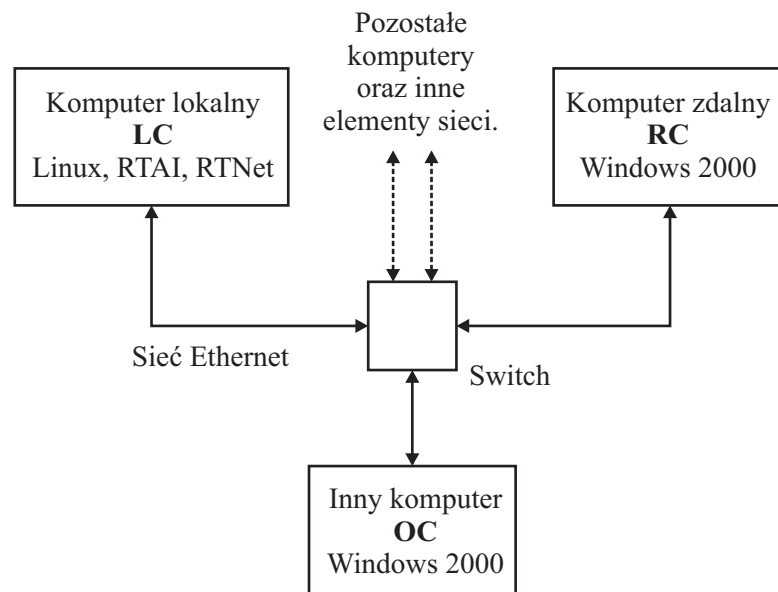
Rys. III.22: Przebieg czasowy sterowania $u(t)$ w układzie ze sterowaniem bezwzględnie z estymacją trójpunktową: a) przypadek bez zakłóceń, b) przypadek z zakłóceniami.

obok siebie znacznych i istotnie różnych wartości sterowania („szpilek”). W układzie bez zakłóceń zjawisko to ma charakter jednorazowego incydentu w pierwszym okresie próbkowania. Jeśli jednak zakłócenia są obecne, zjawisko powtarza się regularnie. Skoki sterowania są tym większe, im dłuższe jest opóźnienie τ_k w danym kroku próbkowania. Dłgie opóźnienia oznaczają bowiem krótkie przedziały $[kT + \tau_k, kT + \tau_k + \sigma_k/2)$ oraz $[kT + \tau_k + \sigma_k/2, (k + 1)T)$, w których musi nastąpić korekta stanu do wartości pomocniczej estymaty $\hat{x}((k + 1)T | kT)$, a to pociąga za sobą konieczność stosowania znacznych wartości sterowań $u(kT + \tau_k | kT)$ oraz $u(kT + \tau_k + \sigma_k/2 | kT)$ (patrz rysunek III.17).

III.1.1.7 Eksperymenty laboratoryjne

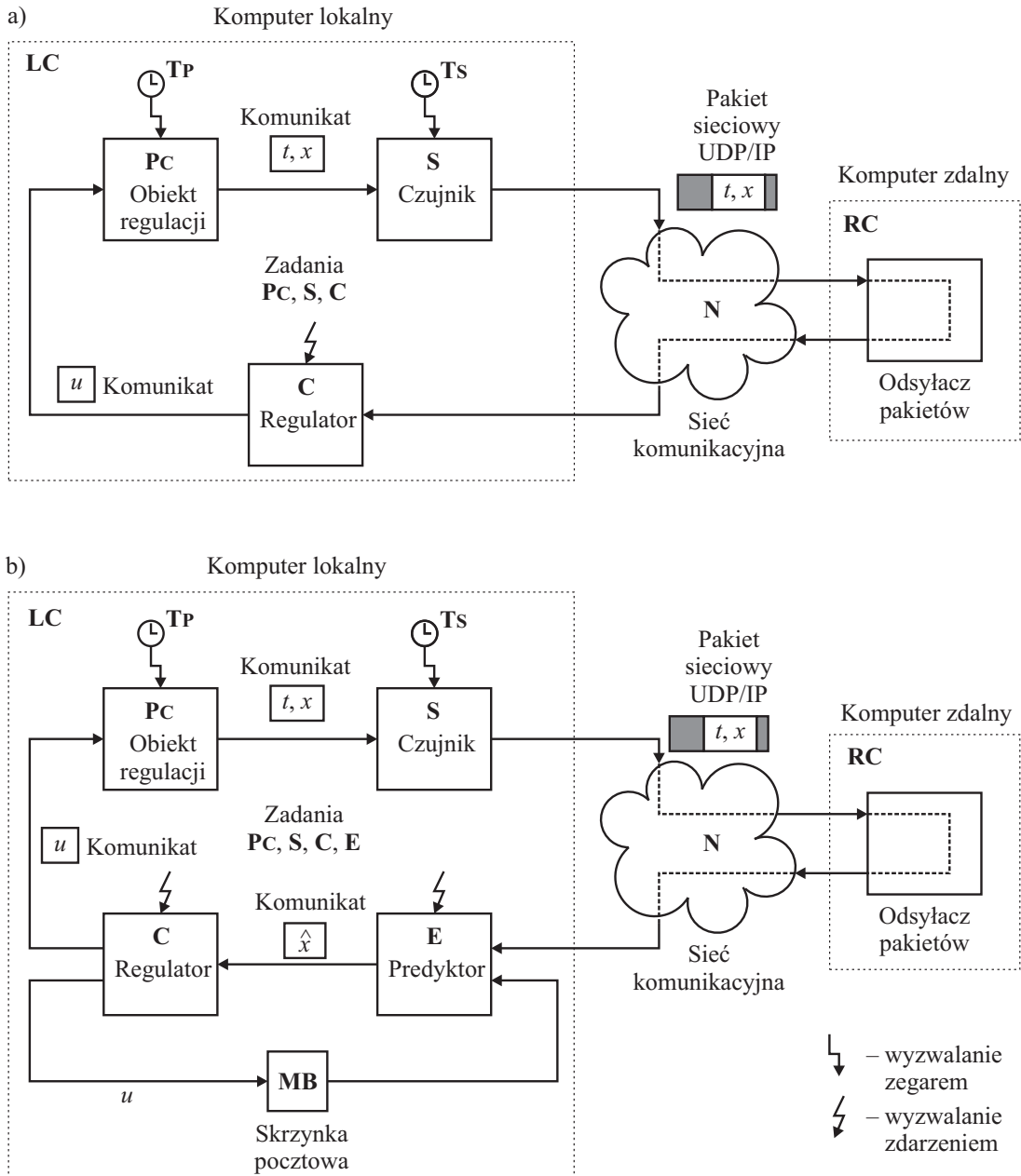
Działanie dwóch spośród czterech opisanych wyżej wariantów rozproszonego układu regulacji (ze sterowaniem bezwzględnie bez estymacji oraz ze sterowaniem niezwłocznie i estymacją jednopunktową) przetestowane zostało podczas eksperymentów laboratoryjnych. Wykorzystano w nich metodę podobną do techniki *hardware in the loop*, symulując w czasie rzeczywistym działanie obiektu regulacji. Schemat użytej instalacji laboratoryjnej przedstawiony jest na rysunku III.23. W jej skład

wchodzą trzy komputery klasy PC, wyposażone w karty sieciowe Ethernet 100 Mb i dołączone kablem typu skrętka do wspólnego niezarządzanego przełącznika sieciowego (*switch*). Komputer **LC**,



Rys. III.23: Elementy i konfiguracja zestawu komputerowego wykorzystywanego podczas eksperymentów.

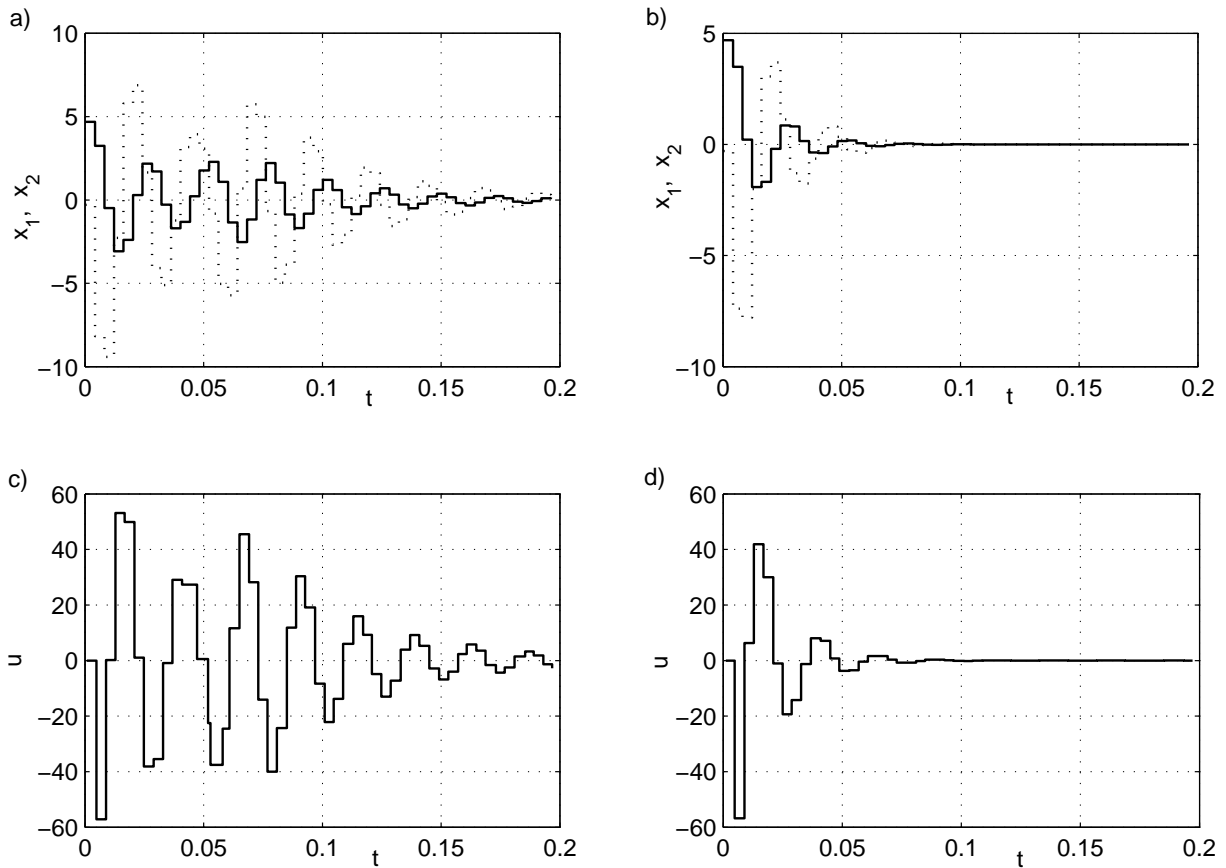
zwany dalej *lokalnym* lub *miejscowym*, wyposażony był w system operacyjny *Fedora Linux* z zainstalowanym jądrem RTAI (*Real-Time Application Interface*) [10, 33, 34] oraz sterownikiem sieci RTnet [71], czyniącym z niego system czasu rzeczywistego (RT), mogący pełnić rolę węzła sieciowego. W komputerze obecny był kompilator GNU C, umożliwiający tworzenie w języku C [139] aplikacji pracujących pod kontrolą systemu RTAI. Komputer **RC**, zwany dalej *zdalnym* lub *odległym*, wyposażono w system operacyjny *MS Windows 2000*. Dodatkowo zainstalowano na nim kompilator *MS Visual C/C++ 6.0*, umożliwiający tworzenie aplikacji pracujących w środowisku systemu *Windows*. Na komputerze lokalnym, pod kontrolą jądra czasu rzeczywistego RTAI, uruchomiono aplikację złożoną z kilku zadań współpracujących z sobą w sposób przedstawiony na rysunku III.24. Utworzono dwie odrębne aplikacje – odpowiednio dla wariantu sterowania z estymacją stanu (rysunek III.24b) i bez niej (rysunek III.24a). Zadania aplikacji odpowiadają z grubsza elementom schematu blokowego przedstawionego na rysunkach III.1 i III.9. Zadania **E** oraz **C** realizują odpowiednio funkcję estymatora oraz regulatora. Zadanie **S** jest odpowiedzialne za próbkowanie stanu obiektu. Zadanie **PC** służy do symulowania obiektu regulacji (technika *hardware in the loop*). Próbkę stanu przesyłane są z wykorzystaniem protokołu UDP/IP, za pośrednictwem sieci Ethernet, z komputera lokalnego do odległego, a następnie z powrotem. Na komputerze zdalnym pracuje aplikacja, której zadaniem jest odsyłanie otrzymanego pakietu natychmiast po jego otrzymaniu. Aplikację tę napisano w języku C++ [139], korzystając z bibliotek klas MFC [59], a następnie skompilowano przy pomocy kompilatora dostępnego w zintegrowanym środowisku programistycznym (IDE) *MS Visual C/C++ 6.0*. W tej konfiguracji pojedyncza próbka wysłana z czujnika przechodzi na swej drodze dwukrotnie przez przełącznik (*switch*) oraz przez interfejsy sieciowe obu komputerów (lokalnego i zdalnego). Transmisja ta jest źródłem zmiennych w czasie opóźnień, oddziałujących na pracę układu regulacji. Trzeci komputer wchodzący w skład instalacji laboratoryjnej, oznaczony na



Rys. III.24: Zadania aplikacji czasu rzeczywistego: a) układ bez estymacji stanu, b) układ z jednopunktową estymacją stanu (**Pc** – obiekt regulacji, **S** – czujnik, **E** – predyktor, **C** – regulator, **MB** – skrzynka pocztowa, **Ts** – zegar o okresie T , **TP** – zegar o okresie $T/50$; **LC** – komputer miejscowy (lokalny), **RC** – komputer odległy (zdalny), **N** – sieć komunikacyjna Ethernet, protokół UDP/IP).

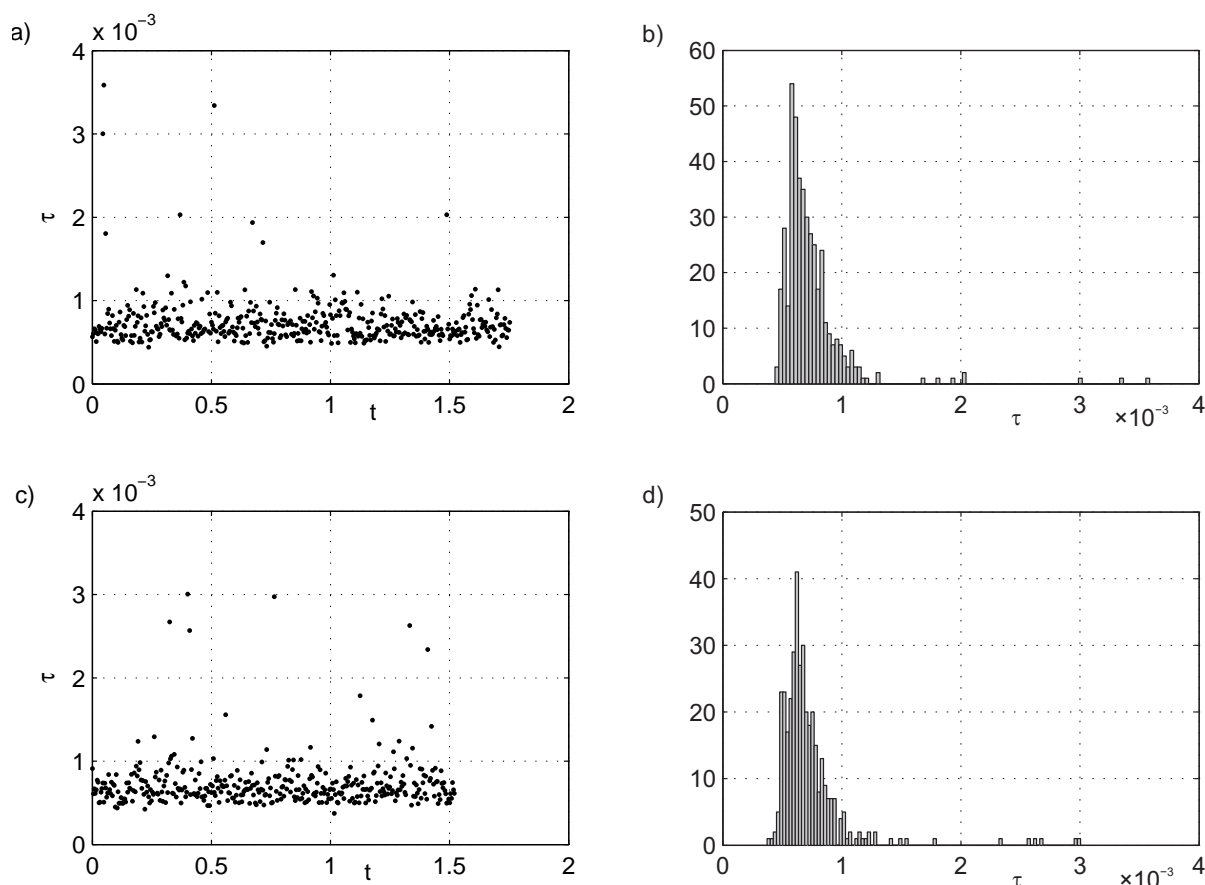
rysunku III.23 literami **OC**, z zainstalowanym systemem operacyjnym *MS Windows 2000*, służy do generowania dodatkowego ruchu w sieci, oddziałującego z transmisją wywoływaną przez badany układ regulacji. Dodatkowy ruch jest uzyskiwany przez kopiowanie plików między komputerami **RC** i **OC**, z wykorzystaniem mechanizmu systemu *Windows*, zwanego *Otoczeniem Sieciowym*.

Zadaniem aplikacji pracującej na komputerze zdalnym **RC** było natychmiastowe odsyłanie otrzymanych pakietów sieciowych. Została ona napisana jako program „okienkowy”, pracujący pod kontrolą systemu operacyjnego *MS Windows 2000*. Podczas eksperymentów wykorzystywano regulator proporcjonalny o macierzy wzmocnień $K = \begin{bmatrix} 12.5 & 5 \end{bmatrix}$, zaś warunek początkowy wynosił $x(0) = \begin{bmatrix} 4.7 & -0.3 \end{bmatrix}^T$. Próbkowanie sygnałów odbywało się z okresem $T = 0.004$ sekundy. Przebiegi czasowe stanu x i sterowania u , zarejestrowane podczas doświadczeń, zaprezentowane są na rysunku III.25. Odpowiadają one dwóm porównywanym układom regulacji: ze sterowaniem bezzwłocznym bez estymacji stanu oraz ze sterowaniem bezzwłocznym i estymacją jednopunktową. Stosowne przebiegi czasowe opóźnień komunikacyjnych oraz ich histogramy przedstawiono na ry-



Rys. III.25: Przebiegi czasowe stanu x (a, b) obiektu oraz sterowania u (c, d) w układach regulacji podczas eksperymentów laboratoryjnych: a, c) sterowanie niezwłoczne, bez estymacji, b, d) sterowanie niezwłoczne, z estymacją (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana).

sunku III.26. Na wykresach tych pominięto opóźnienia, które przekraczały okres próbkowania T . Przekroczenia te zdarzały się sporadycznie (rzadziej niż jedno na sto). Wyniki eksperymentów potwierdzają wnioski wyciągnięte na podstawie analizy rezultatów symulacji. Predykcja stanu w kompensatorze, w oparciu o znany model obiektu, pozwala istotnie polepszyć jakość regulacji. Z drugiej



Rys. III.26: Przebiegi czasowe (a, c) i histogramy (b, d) opóźnień τ_k zanotowanych podczas eksperymentów laboratoryjnych: a, b) sterowanie niezwłoczne bez estymacji; c, d) sterowanie niezwłoczne z estymacją jednopunktową.

strony, nieuwzględnienie opóźnień na etapie projektowania kompensatora może doprowadzić do jej znacznego pogorszenia.

III.1.1.8 Ilościowe porównanie jakości regulacji

Zadając we wskaźniku jakości (III.8) macierze Q , R i S równe odpowiednio

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad R = r = 1, \quad S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymuje się optymalny liniowo-kwadratowy regulator proporcjonalny (III.9) o macierzy wzmocnień

$$K = \begin{bmatrix} 3.1535 & 1.958 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy stanu zamkniętego układu regulacji (w systemie odniesienia) z takim regulatorem wynoszą

$$\lambda(\Phi - \Gamma K) = \{z_1, z_2\} = \{0.7929 + j0.3987, 0.7929 - j0.3987\}$$

Moduły obu biegunów, równe $|z_1| = |z_2| = 0.8875$, są mniejsze od jedności. Wyznaczony w ten sposób regulator został wykorzystany do ilościowego porównania jakości regulacji dla czterech opisanych

wyżej algorytmów sterowania w systemie rozproszonym. Jakość regulacji mierzona była wskaźnikami jakości wzorowanymi na formule (III.8). Załóżmy, że $u[k] = -Kx[k]$. Wówczas drugi i trzeci składnik wyrażenia pod znakiem sumy w (III.8) można przekształcić w następujący sposób

$$\begin{aligned} u[k]^T R u[k] &= (-Kx[k])^T R (-Kx[k]) = x[k]^T K^T R K x[k] \\ x[k]^T S u[k] &= x[k]^T S (-Kx[k]) = -x[k]^T S K x[k] \end{aligned}$$

Wskaźnik jakości przyjmuje postać

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q x[k] + x[k]^T K^T R K x[k] - 2x[k]^T S K x[k])$$

a następnie

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]^T (Q + K^T R K - 2 S K) x[k]$$

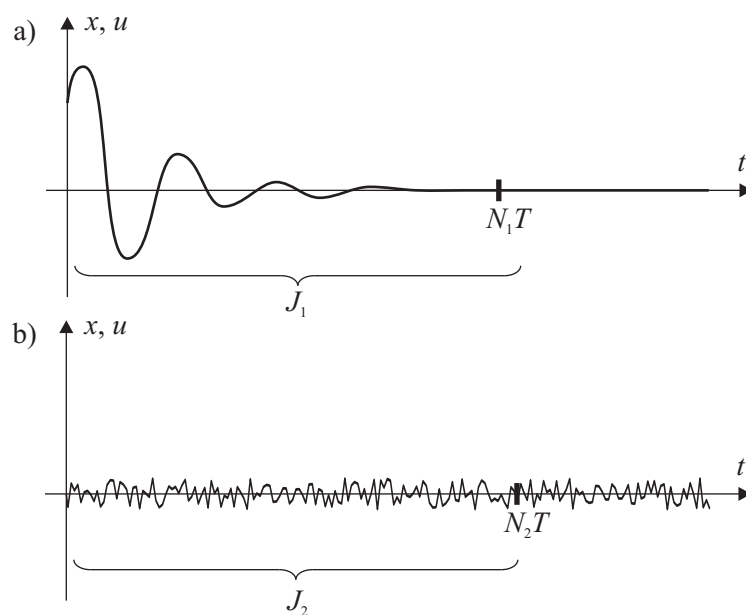
Do celów obliczeń numerycznych górną granicę sumowania zastąpiono wartością skończoną

$$J = \sum_{k=0}^N x[k]^T (Q + K^T R K - 2 S K) x[k]$$

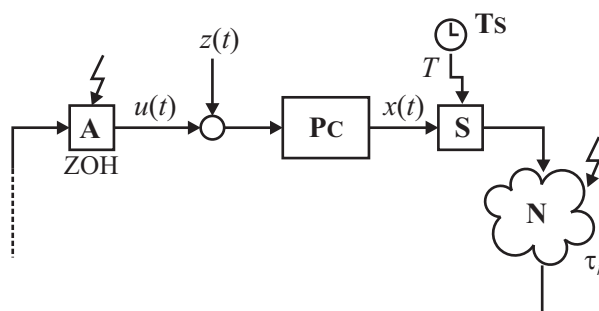
Jakość regulacji zmierzono na podstawie wyników symulacji, przy pomocy dwóch wskaźników jakości, wzorowanych na (III.8), opisanych poniżej:

1. Deterministycznego wskaźnika J_1 , z górną granicą sumowania N_1 , w układzie bez zakłóceń ($z \equiv 0$), z niezerowym warunkiem początkowym ($x(0) \neq 0$).
2. Stochastycznego wskaźnika jakości J_2 z górną granicą całkowania N_2 , w układzie z zerowym warunkiem początkowym ($x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n$), w obecności niezależnych zakłóceń losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ (o zerowej wartości średniej i jednostkowej wariancji), poddanych operacji ZOH (lub inaczej S&H – próbkowanie i podtrzymanie) z okresem $T/10$.

Horyzont czasowy N_1 należy dobrać tak, by pod koniec przedziału czasu $[0, N_1 T]$ przebiegi przejściowe w układzie, związane z niezerowym warunkiem początkowym, zaniknęły niemalże do zera (rysunek III.27). Wówczas wartości wskaźników z nieskończonym i skończonym horyzontem czasowym będą zbliżone. Wielkość N_2 powinna być z kolei na tyle duża, by wskaźnik jakości J_2 , obliczony na przedziale czasu $[0, N_2 T]$ stanowił dobrą ocenę własności probabilistycznych sygnałów x i u . W przeprowadzonych symulacjach komputerowych przyjęto $N_1 = N_2 = 250$. Wskaźnik J_1 wyznaczany był w układzie bez zakłóceń, zaś J_2 – przy ich obecności. Miejsce ich wprowadzenia do układu pokazane jest na rysunku III.28. Wartości obu opisanych wskaźników jakości J_1 i J_2 , wyznaczone na podstawie wyników symulacji, dla układu odniesienia oraz czterech opisanych wyżej układów rozproszonych, zebrane są w tabeli III.1. Przedstawiono je również w postaci wykresów słupkowych na rysunku III.29. Warunek początkowy w symulacjach, na podstawie których obliczano wartość wskaźnika J_1 , wynosił $x(0) = \begin{bmatrix} 0.3 & 1.4 \end{bmatrix}^T$. We wszystkich symulacjach stosowano ten sam losowy ciąg opóźnień τ_k oraz identyczny przebieg czasowy zakłóceń $z(t)$. Pozwoliło to na przeprowadzenie miarodajnego porównania jakości pracy poszczególnych układów. Oba wskaźniki – zarówno deterministyczny, jak i stochastyczny – wskazują na podobne relacje jakości regulacji



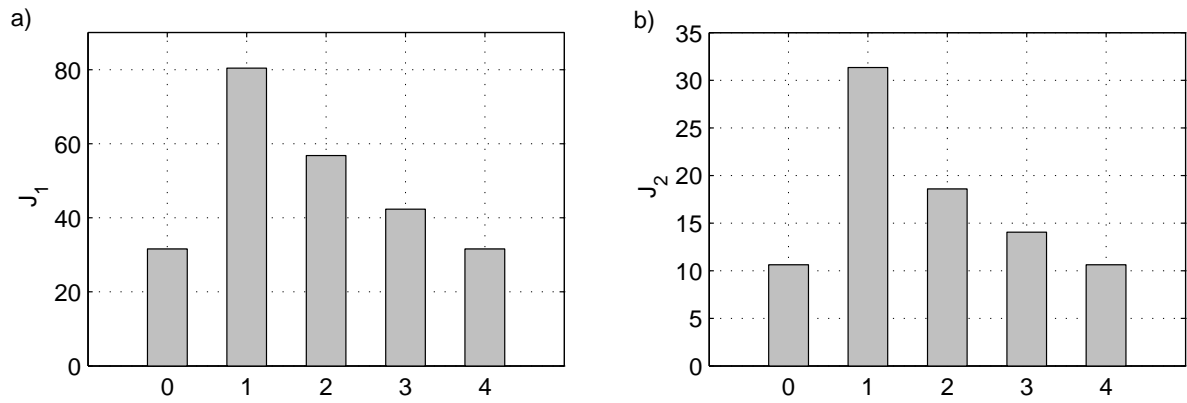
Rys. III.27: Sposób doboru parametrów N_1 i N_2 dla obliczenia wskaźników jakości: a) J_1 – deterministycznego, b) J_2 – stochastycznego.



Rys. III.28: Miejsce wprowadzenia zakłóceń $z(t)$ do układu regulacji.

Tab. III.1: Jakość regulacji dla różnych wariantów sterowania.

Nr	Wariant układu sterowania	Wartość wskaźnika jakości	
		J_1 – deterministyczny	J_2 – stochastyczny
1	układ odniesienia, bez sieci telekomunikacyjnej	31.5928	10.6290
2	układ ze sterowaniem niezwłocznym, bez estymacji stanu	80.4093	31.3425
3	układ ze sztucznym wydłużaniem opóźnień, z estymacją stanu	56.8076	18.5855
4	układ ze sterowaniem niezwłocznym, z prostą estymacją stanu	42.3201	14.0498
5	układ ze sterowaniem niezwłocznym, z trójpunktową estymacją stanu	31.5928	10.6290



Rys. III.29: Jakość regulacji dla różnych wariantów sterowania: a) wskaźnik deterministyczny J_1 , b) wskaźnik stochastyczny J_2 (0 – układ odniesienia (bez sieci), 1 – układ ze sterowaniem niezwłocznym, bez estymacji, 2 – układ z wydłużaniem opóźnień, z estymacją stanu, 3 – układ ze sterowaniem niezwłocznym, z estymacją jednopunktową, 4 – układ ze sterowaniem niezwłocznym, z estymacją trójpunktową).

w poszczególnych układach. Najwyższa, identyczna jakość uzyskiwana jest w dwóch systemach: odniesienia oraz z estymacją trójpunktową. Równość wynika z faktu, iż regulator z estymacją trójpunktową tak doбира wartości sterowań, by stan obiektu odwzorowywał wartości stanu osiągnięte w układzie odniesienia. Wśród pozostałych trzech układów, najlepsza jakość uzyskiwana jest przy sterowaniu natychmiastowym z estymacją jednopunktową, a najgorsza – w przypadku sterowania natychmiastowego bez estymacji. Najgorszy wynik układu bez estymacji wynika z nieuwzględnienia w nim opóźnień podczas obliczania sterowania. Z kolei przewaga układu z estymacją jednopunktową i sterowaniem natychmiastowym nad układem z estymacją i sztucznym wprowadzaniem opóźnień jest efektem sterowania w pierwszym z wymienionych systemów w oparciu o mniej przeterminowane dane. Powyższe wyniki wymagają komentarza:

1. Oba wskaźniki jakości (J_1 i J_2) wyznaczano wyłącznie w oparciu o przebieg stanu $x[k]$ obiektu, zakładając że sterowanie związane jest ze stanem zależnością $u[k] = -Kx[k]$. W rzeczywistości związek ten spełniony jest tylko w układzie odniesienia. W pozostałych układach sterowanie może przyjmować inne wartości, a w systemie z estymacją trójpunktową – zmieniać się kilkukrotnie w ciągu okresu próbkowania T . Gdyby fakty te uwzględnić konstruując wskaźniki jakości, wyniki porównania mogłyby być odmienne.
2. Postacie wzorów opisujących oba wskaźniki jakości – deterministyczny J_1 i stochastyczny J_2 – są w zasadzie takie same. Różnią się tylko warunki, w jakich przeprowadzane są symulacje przed obliczeniem wartości każdego z nich (obecność lub brak zakłóceń, zerowy lub niezerowy warunek początkowy).
3. Użyty regulator K wyznaczony został w oparciu o teorię sterowania liniowo-kwadratowego i jest on optymalny w sensie deterministycznego wskaźnika jakości z nieskończonym horyzontem czasowym, pod warunkiem pracy w układzie odniesienia. Nie wynika stąd optymalność tego regulatora w przypadku zastosowania w układzie rozproszonym. Podobnie nie należy oczekiwać jego optymalności w sensie stochastycznego wskaźnika jakości. Należy o tych fak-

tach pamiętać, interpretując wyniki porównania jakości regulacji w poszczególnych układach.

III.1.1.9 Jakościowe porównanie właściwości układów

W poprzednim podrozdziale przedstawiono wyniki ilościowego porównania jakości regulacji dla czterech omawianych odmian rozproszonego układu regulacji. Obecnie uzupełnimy to porównanie uwagami o charakterze jakościowym, odnoszącymi się do kwestii stabilności układów oraz łatwości praktycznej implementacji przedstawionych rozwiązań. Najłatwiejszy w realizacji jest układ ze sterowaniem bezzwłocznym, bez estymacji stanu. Jedynym elementem taktowanym przez zegar jest w nim czujnik **S**. Zaletą układu jest natychmiastowa reakcja po otrzymaniu nowej próbki stanu obiektu, natomiast istotna wada polega na nieuwzględnieniu opóźnienia komunikacyjnego przy obliczaniu sterowania. Utrudnione jest też analiza oraz zapewnienie stabilności układu. System z wydłużaniem opóźnień do pełnego okresu próbkowania wymaga użycia dwóch zegarów, zainstalowanych w dwóch różnych węzłach sieci oraz zapewnienia ich synchronicznej pracy. Zapewnienie stabilności jest łatwe, jednak wprowadzanie dodatkowych opóźnień w pętli sprzężenia przyczynia się do pogorszenia jakości regulacji, zwłaszcza przy obecności zakłóceń. Układ ze sterowaniem bezzwłocznym i estymacją jednopunktową nie wprowadza dodatkowych opóźnień, a jednocześnie uwzględnia te związane z obecnością sieci. Jednak – podobnie jak w przypadku systemu bez estymacji – utrudniona jest analiza stabilności układu. Ostatni z badanych wariantów sterowania – bezzwłoczne z estymacją trójpunktową – łączy w sobie zalety innych rozwiązań: sterowanie natychmiast po otrzymaniu danych, uwzględnianie opóźnień komunikacyjnych, łatwość zapewnienia i wykazania stabilności. Istotną jego wadą jest natomiast występowanie w sygnale sterującym krótkotrwałych, naprzemiennych „szpilek” o znacznej amplitudzie (rysunek III.22). W rzeczywistym układzie regulacji, w którym występuje zjawisko nasycenia urządzenia wykonawczego (przedział dopuszczalnych wartości sterowania jest ograniczony), mogłoby dochodzić do „obcinania” szpilek występujących w sygnale sterującym i wiążącego się z tym pogorszenia jakości sterowania. Omówione tu własności zebrano w tabeli III.2.

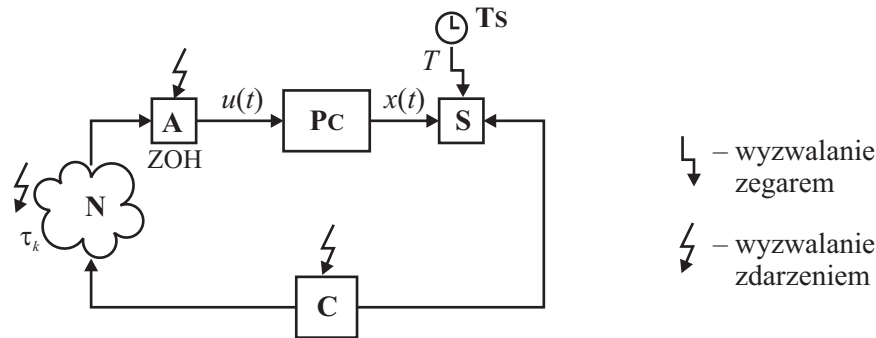
III.1.1.10 Opóźnienie zmienne sygnału sterującego, mniejsze od okresu próbkowania

Powyżej opisano cztery warianty rozproszonego układu sterowania, w których sieć komunikacyjna obecna jest na drodze sygnału z czujnika do kompensatora dynamicznego (rysunek III.1). Dwa spośród nich, w odpowiednio zmienionej formie, mogą być stosowane także w przypadku, gdy sieć telekomunikacyjna włączona jest pomiędzy kompensatorem a urządzeniem wykonawczym (rysunek III.30). Są to: system z bezzwłocznym sterowaniem, bez predykcji stanu oraz system z estymacją stanu i sztucznym wydłużaniem opóźnień do pełnego okresu próbkowania. W obu tych układach do wyznaczenia sterowania nie jest bowiem konieczna znajomość wartości opóźnienia komunikacyjnego. W pozostałych dwóch systemach (ze sterowaniem bezzwłocznym i jednopunktową lub trójpunktową estymacją stanu) kompensator dokonuje pomiaru opóźnienia komunikacyjnego τ , a to jest możliwe tylko wówczas, gdy występuje ono na drodze sygnału przed, a nie za kompensatorem. Formuły matematyczne opisujące działanie obu możliwych tu do zastosowania algorytmów sterowania są analogiczne, jak w przypadku systemu rozproszonego z siecią włączoną pomiędzy czujnikiem a kompensatorem. Odmienne są natomiast sposoby implementacji oraz zależności czasowe pomiędzy

Tab. III.2: Własności poszczególnych układów regulacji.

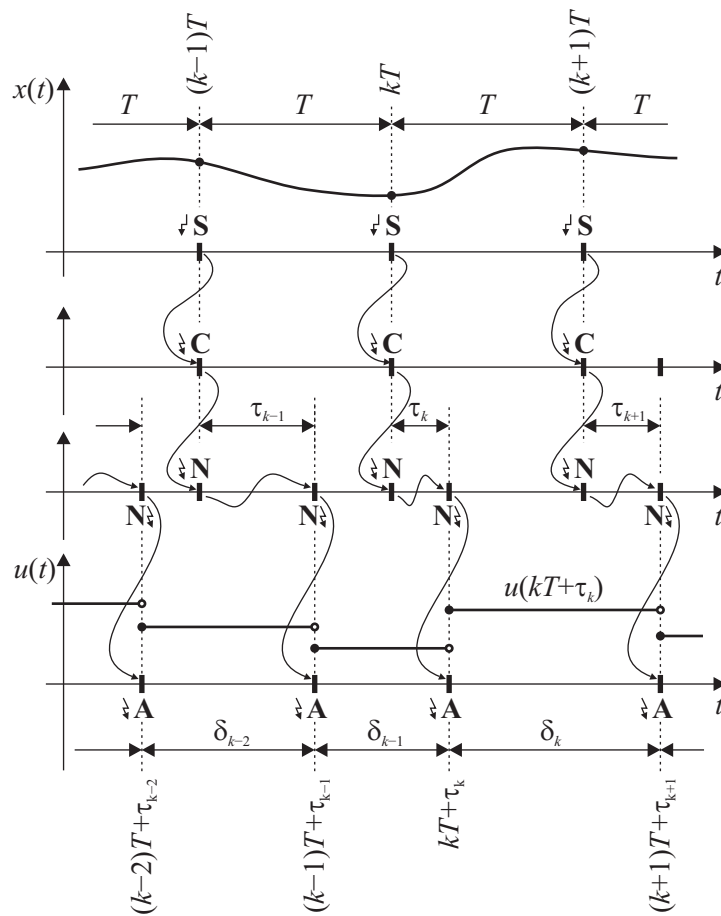
Nr	Wariant algorytmu sterowania w układzie rozproszonym	Cechy układu regulacji				
		Potrzeba synchronizacji zegarów	Charakter opóźnień po kompensacji	Uwzględnianie opóźnień w algorytmie regulacji	Zapewnienie asymptotycznej stabilności układu	Obecność „szpilek” w sterowaniu
1	sterowanie niezwołczne, bez estymacji stanu	nie ma potrzeby	zmienne	brak	trudne (układ niestacjonarny)	brak
2	sztuczne wydłużanie opóźnień, estymacja stanu	konieczna	stałe	<i>off-line</i> , przy projektowaniu regulatora	łatwe (układ stacjonarny), warunek $\lambda(\Phi - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\ominus$	brak
3	sterowanie niezwołczne, jednopunktowa estymacja stanu	konieczna	zmienne	<i>on-line</i> , w czasie pracy regulatora	trudne (układ niestacjonarny)	brak
4	sterowanie niezwołczne, trójpunktowa estymacja stanu	konieczna	zmienne	<i>on-line</i> , w czasie pracy regulatora	łatwe (układ stacjonarny), warunek $\lambda(\Phi - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\ominus$	obecne

akcjami poszczególnych elementów systemów. Schematy blokowe obu układów regulacji przedstawione są odpowiednio na rysunkach III.30 oraz III.32, zaś diagramy czasowe obrazujące ich pracę – na rysunkach III.31 i III.33. Schemat przedstawiony na rysunku III.30 różni się od schematu z ry-

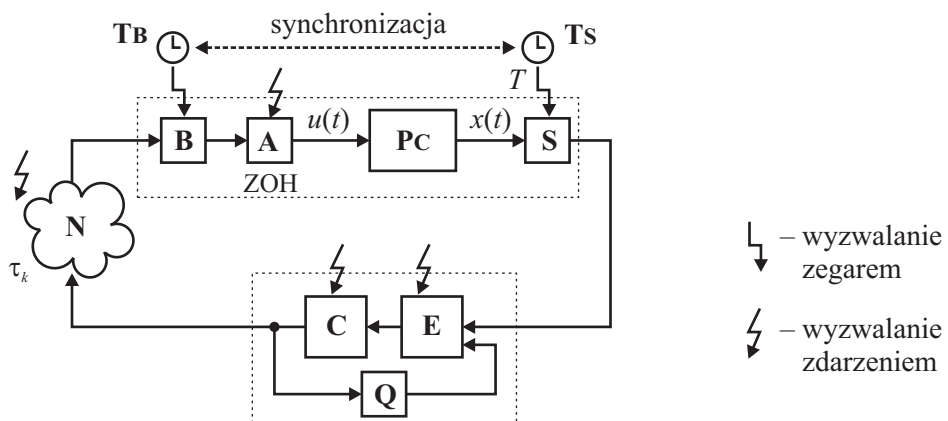


Rys. III.30: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji z siecią w torze sterowania (**S** – czujnik, **C** – regulator, **A** – urządzenie wykonawcze, **N** – sieć telekomunikacyjna, **PC** – obiekt regulacji (z czasem ciągłym), **Ts** – zegar wyzwalający akcje czujnika).

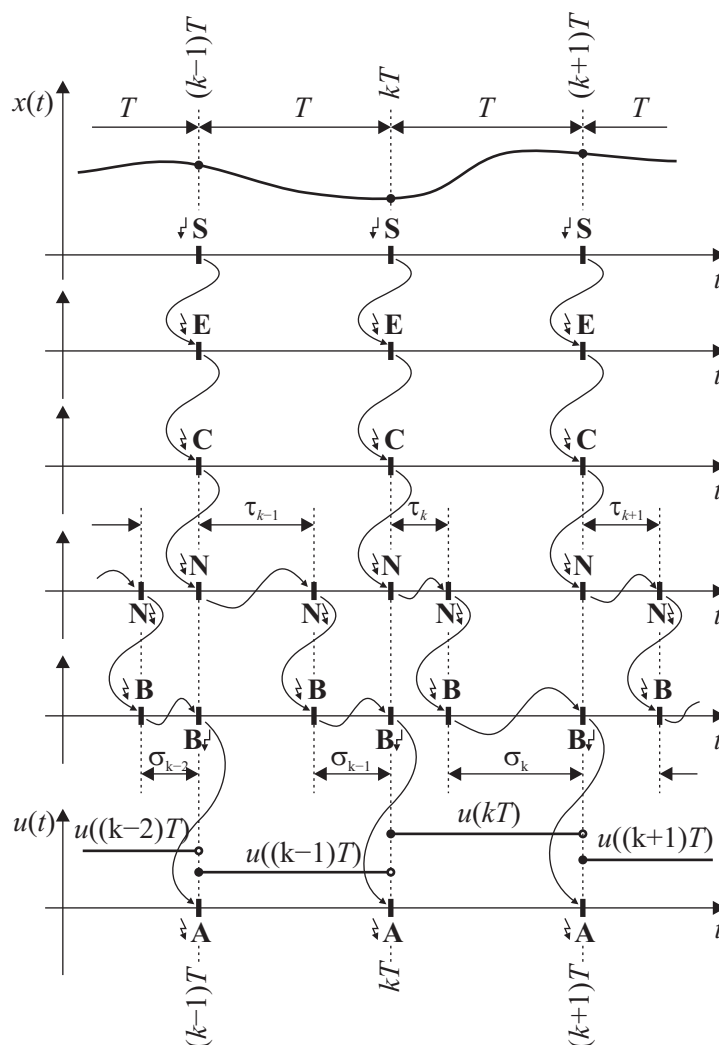
sunku III.1 jedynie umiejscowieniem sieci telekomunikacyjnej. Natomiast schematy na rysunkach III.32 oraz III.7 różnią się między sobą dodatkowo umiejscowieniem bufora **B** wydłużającego opóźnienia do pełnego okresu próbkowania T . W omawianym obecnie układzie bufor ten umieszczony jest w pobliżu urządzenia wykonawczego, za siecią telekomunikacyjną. Jest on wyzwalany zegarem **TB**, który dla prawidłowego działania układu musi być zsynchronizowany z zegarem **Ts**. Zegary te nie są rozdzielone siecią telekomunikacyjną, co ułatwia ich synchronizację, jeśli tylko odległość



Rys. III.31: Zależności czasowe między zdarzeniami w układzie regulacji.



Rys. III.32: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji z buforem wydłużającym opóźnienia (**B** – bufor, **TB** – zegar wyzwalający akcje bufora, **Q** – pomocnicza kolejka, **E** – predyktor stanu).



Rys. III.33: Zależności czasowe w układzie regulacji.

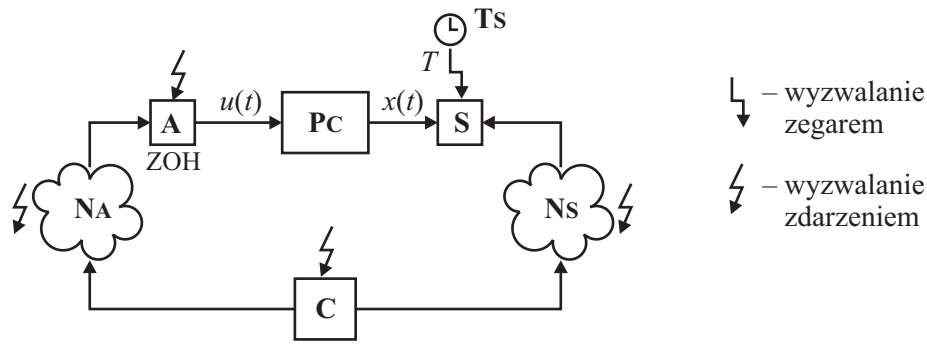
między urządzeniem wykonawczym a czujnikiem jest niewielka.

III.1.1.11 Opóźnienia zmienne sygnałów sterującego i pomiarowego, mniejsze od okresu próbkowania

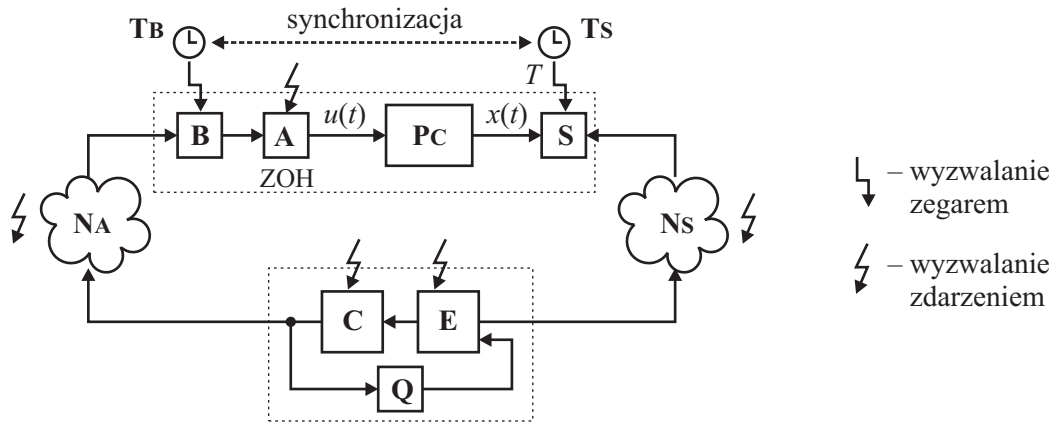
Obie metody sterowania, wymienione w poprzednim podrozdziale, mogą być stosowane również w przypadku, gdy w tym samym układzie regulacji zarówno sygnał pomiarowy, jak i sterujący przesyłane są za pośrednictwem sieci telekomunikacyjnej. Może to być jedna, wspólna sieć, jak i dwie odrębne. Schematy obu możliwych do zastosowania układów sterowania, dla przypadku dwóch niezależnych sieci telekomunikacyjnych, przedstawione są odpowiednio na rysunkach III.34 oraz III.35. Warunkiem stosowalności obu układów jest, by suma opóźnień komunikacyjnych w obu sieciach $\tau_k^N = \tau_k^{NS} + \tau_k^{NA}$ w żadnym kroku próbkowania k nie wykroczyła z przedziału $[\underline{\tau}, \bar{\tau}]$, gdzie $0 < \underline{\tau} < \bar{\tau} < T$.

III.1.1.12 Uwagi końcowe

W zamieszczonych wyżej rozważaniach założono pełną zgodność obiektu **PC** z modelem używanym do projektowania regulatora oraz do estymacji stanu. Wykorzystano model liniowy w postaci rów-



Rys. III.34: Schemat układu regulacji z dwiema sieciami telekomunikacyjnymi **NS** i **NA**, ze sterowaniem natychmiastowym, bez estymacji stanu.



Rys. III.35: Schemat układu regulacji z dwiema sieciami telekomunikacyjnymi **NS** i **NA**, ze sztucznym wydłużaniem opóźnienia i estymacją stanu.

nań stanu. Jednak w praktycznych zastosowaniach nie sposób uniknąć rozbieżności model–obiekt ze względu na niechronne błędy identyfikacji oraz fakt, iż zazwyczaj liniowy model stanowi jedynie przybliżenie nieliniowego obiektu, użyteczne w pewnym niewielkim otoczeniu punktu pracy. Obecność niezgodności prowadzi zwykle do pogorszenia jakości regulacji i może spowodować utratę stabilności. Problem ten rozważany był w szeregu prac, między innymi [89–91].

III.1.2 Zastosowanie buforów ujednocających opóźnienia

Powyżej opisano kilka wariantów rozproszonych układów sterowania, w których opóźnienia komunikacyjne w sieci (stałe lub zmienne w czasie) nie przekraczały pojedynczego okresu próbkowania T . W trzech spośród czterech przypadków częściową lub pełną kompensację wpływu opóźnień osiągnięto przez zastosowanie techniki predykcji stanu w oparciu o model obiektu. Stosowanie tego podejścia wiąże się jednak z trudnością wynikającą z konieczności posiadania dokładnego modelu, a do tego wymagane jest nieraz przeprowadzenie złożonych eksperymentów identyfikacyjnych.

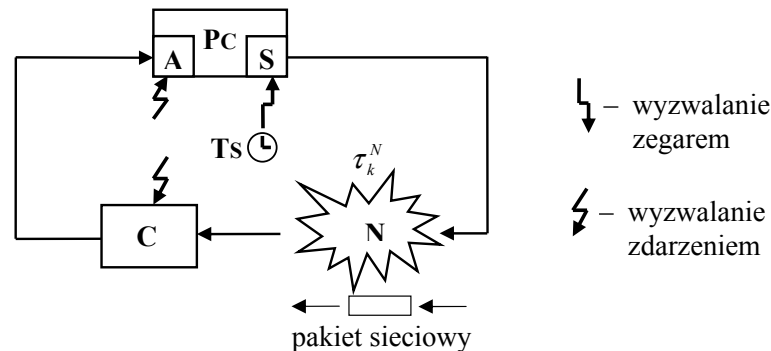
Obecnie przedstawimy metodę ujednociania zmiennych w czasie opóźnień (w tym także przekraczających T) przy pomocy bufora włączonego pomiędzy siecią telekomunikacyjną a regulatorem (kompensatorem dynamiczny). Zadaniem bufora jest przechwytywanie pakietów docierających z sieci w nieregularnych odstępach czasu i przesyłanie ich dalej w taki sposób, by zmniejszyć lub zlikwidować ich wahania. Zmieniony przez jego obecność charakter opóźnień ułatwia zapewnienie stabilności

i wymaganej jakości regulacji. Regulator może być projektowany prostszymi metodami, po stwierdzeniu, że opóźnienia są stałe lub wolnozmiennie.

W systemach rozproszonych opóźnieniom towarzyszą często inne niekorzystne zjawiska, takie jak gubienie pakietów, dostarczanie ich w innej kolejności, niż zostały wysłane czy kilkakrotne dostarczanie (zwielokrotnianie) tych samych danych. Odpowiednio dobrany bufor, wyposażony w dodatkowe mechanizmy, obok swego „filtrowania” opóźnień może zaradzić również i tym problemom. Przykłady podane są w kolejnych podrozdziałach.

Poniżej opisano kilka różnych wersji buforów, które można zastosować, gdy sieć telekomunikacyjna włączona jest między czujnikiem a regulatorem. Dla każdego z prezentowanych typów buforów podano własności sieci, dla których może on być użyty. Dalej zamieszczony jest przykład zastosowania jednego z opisywanych buforów, zilustrowany wynikami symulacji komputerowych. Na zakończenie tego podrozdziału podano uwagi dotyczące stabilności układów regulacji z buforami, a całość zamykają wnioski i uwagi końcowe.

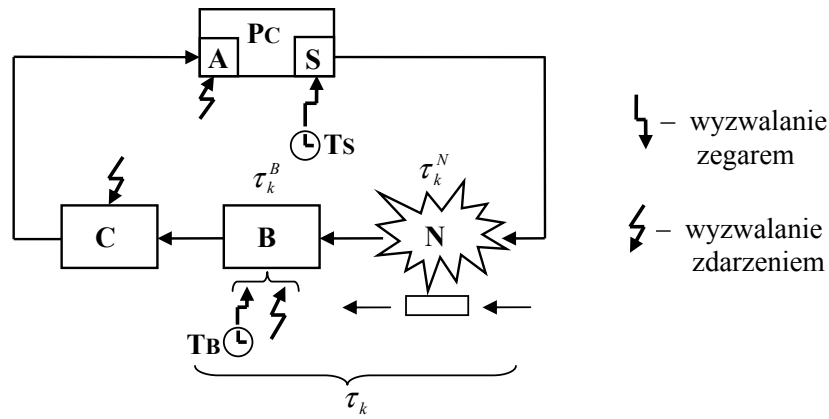
Na rysunku III.36 przedstawiono schemat blokowy prostego jednoobwodowego rozproszonego układu regulacji, w którym sieć komunikacyjna \mathbf{N} pośredniczy w przesyłaniu danych z czujnika \mathbf{S} (współpracującego z obiektem \mathbf{PC}) do regulatora (lub kompensatora dynamicznego) \mathbf{C} . Akcja czujnika \mathbf{S}



Rys. III.36: Schematy blokowy rozproszonego układu regulacji bez bufora (\mathbf{PC} – obiekt regulacji z czasem ciągłym, \mathbf{A} – urządzenie wykonawcze, \mathbf{S} – czujnik, \mathbf{N} – sieć telekomunikacyjna, \mathbf{C} – regulator (kompensator dynamiczny), \mathbf{Ts} – zegar taktujący czujnik ze stałym okresem T).

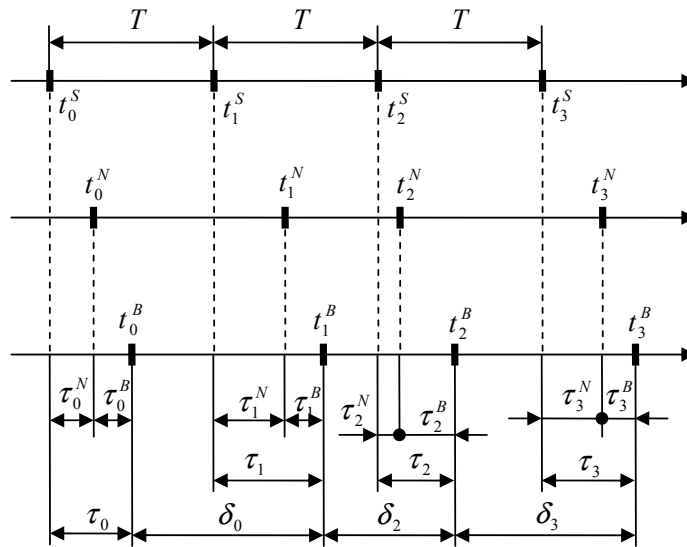
wyzwalana jest zegarem \mathbf{Ts} , zaś akcje regulatora \mathbf{C} i urządzenia wykonawczego \mathbf{A} – zdarzeniami. Sposób działania sieci \mathbf{N} zależy od jej typu i używanego w niej protokołu transmisyjnego [45, 78]. Dalej zakładamy, że pojedynczy pakiet sieciowy zawiera w polu danych wartość pojedynczej próbki sygnału wyjściowego obiektu. Przenoszone w sieci pakiety doznają zmiennego w czasie opóźnienia τ_k^N . Indeks dolny $k \in \mathbf{N}$ może być interpretowany zarówno jako numer dyskretnej chwili czasu $t_k = kT$, jak i numer kolejny pakietu wysłanego przez czujnik do sieci.

W celu ujednoczenia opóźnień, między siecią \mathbf{N} a regulatorem \mathbf{C} można włączyć bufor \mathbf{B} , jak na rysunku III.37. Jego zadaniem jest przechwytywanie pakietów docierających z sieci ze zmiennym opóźnieniem τ_k^N i uwalnianie ich w regularniejszych odstępach czasu. Wiąże się to z wprowadzaniem dodatkowego, lecz kontrolowanego opóźnienia w pętli sprzężenia zwrotnego. Sposób wyzwalania akcji bufora zależy od jego typu i może być mniej lub bardziej skomplikowany (na przykład kombinacja inicjowania zegarem i zdarzeniami). Rysunek III.38 przedstawia zależności czasowe w układzie po-



Rys. III.37: Schematy blokowy rozproszonego układu regulacji z buforem ujednociającym opóźnienia (**B** – bufor, **TB** – zegar taktujący bufor).

kazanym na rysunku III.37. Oto objaśnienia oznaczeń z rysunku III.38:



Rys. III.38: Zależności czasowe w rozproszonym układzie regulacji.

δ_k – odstęp czasu między uwolnieniem z bufora **B** k -tego i $(k + 1)$ -go pakietu

t_k^S – chwila czasu, w której k -ty pakiet opuszcza czujnik **S** i trafia do sieci **N**

t_k^N – chwila czasu, w której k -ty pakiet opuszcza sieć **N** i dociera do bufora **B**

t_k^B – chwila czasu, w której k -ty pakiet opuszcza bufor **B** i dociera do regulatora **C**

τ_k^N – opóźnienie, jakiego doznaje w sieci **N** k -ty pakiet

τ_k^B – opóźnienie, jakiego doznaje w buforze **B** k -ty pakiet

τ_k – całkowite opóźnienie, jakiego k -ty pakiet doznaje podczas przesyłu przez sieć **N** i bufor **B**

T – okres, z jakim czujnik **S** wysyła pakietu do sieci **N**

Pomiędzy wymienionymi wyżej wielkościami zachodzą następujące relacje

$$\begin{aligned}
 t_0^B &= \tau_0 + t_0^S \\
 t_k^N &= t_k^S + \tau_k^N, & t_k^B &= t_k^N + \tau_k^B \\
 \tau_k &= \tau_k^N + \tau_k^B, & t_k^B &= t_k^S + \tau_k, & t_k^S &= kT \\
 \delta_k &= t_{k+1}^B - t_k^B, & \delta_k &= T + \tau_{k+1} - \tau_k \\
 \delta_k &= T + \tau_{k+1}^N + \tau_{k+1}^B - \tau_k^N - \tau_k^B
 \end{aligned}$$

W kolejnych sekcjach opisano kilka różniących się między sobą rozwiązań bufora **B** (oznaczonych symbolami od **B1** do **B5**) i wskazano, w jakich warunkach mogą one być użyte.

III.1.2.1 Bufor typu B1

Pierwszy, najprostszy typ bufora można stosować, jeśli sieć komunikacyjna obecna w układzie regulacji ma następujące własności:

1. Pakiety nie są gubione ani dublowane.
2. Pakiety opuszczają sieć w kolejności, w jakiej zostały do niej dostarczone.
3. Opóźnienie w przesyłaniu pakietów jest zmienne, ale ograniczone z góry. Wartość ograniczenia górnego jest znana na etapie projektowania bufora.

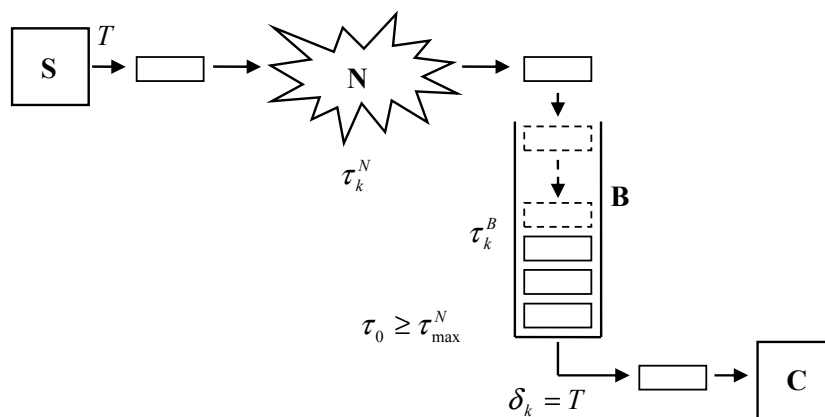
Zasadę działania bufora można opisać w kilku punktach:

1. Pakiety opuszczają bufor **B** w takiej samej kolejności, w jakiej docierają do niego z sieci; bufor jest więc kolejką FIFO (*First-In, First-Out*).
2. Odstęp czasowy δ_k między uwalnianiem kolejnych pakietów z bufora **B** jest równy okresowi T , z jakim pakiety są wysyłane do sieci przez czujnik **S**

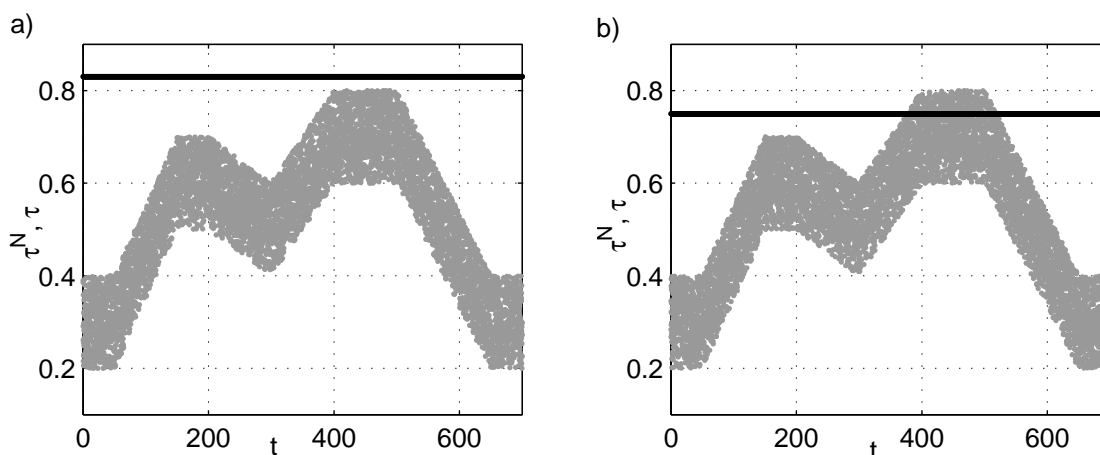
$$\delta_k = T, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$
3. Uwalnianie pakietów z bufora **B** rozpoczyna się z odstępem τ_0 w stosunku do rozpoczęcia wysyłania pakietów przez czujnik **S** do sieci **N**. Odstęp τ_0 nie może być mniejszy od największego możliwego opóźnienia sieci

$$\tau_0 \geq \bar{\tau}^N = \sup_{k \in \mathbb{N}} \tau_k^N$$

Do realizacji wymogu z punktu 3 konieczna jest synchronizacja zegarów **Ts** i **TB**, sterujących pracą czujnika i bufora oraz znajomość górnego ograniczenia $\bar{\tau}^N$ opóźnienia sieci. Synchronizacja musi być zachowana podczas całego czasu pracy układu. Opisany bufor uwalnia pakiety w stałych odstępach czasu, równych okresowi próbkowania T przez czujnik, lecz ze stałym w stosunku do czujnika przesunięciem czasowym $\tau_k = \tau_0$, $k \in \mathbb{N}$, dobranym tak, by nie było ono mniejsze od największego możliwego opóźnienia w sieci. Schemat omówionego bufora przedstawiony jest na rysunku III.39. Rysunek III.40 pokazuje uzyskane symulacyjnie przebiegi czasowe opóźnień pakietów opuszczających sieć (kolor szary) oraz pakietów opuszczających bufor (kolor czarny). Przebieg III.40b odpowiada przypadkowi niedoszacowania górnego ograniczenia opóźnień ($\tau_0 < \bar{\tau}^N$). W miejscach, gdzie szary kolor przewyższa czarny, pakiety z sieci nie docierają na czas. Przedstawione na wykresach opóźnienie τ^N ma dwie składowe: wolno- i szybkozmienną. Przebieg pierwszej z nich jest



Rys. III.39: Zasada działania bufora typu **B1** w sieciowym układzie regulacji.



Rys. III.40: Przykładowe przebiegi czasowe opóźnień w układzie regulacji z buforem **B1** (kolor szary – τ^N , kolor czarny – τ).

przesunięty o 0.1 w dół w stosunku do górnej obwiedni wykresu z rysunku III.40b, zaś druga ma rozkład losowy jednostajny na przedziale $[-0.1, 0.1]$.

III.1.2.2 Bufor typu B2

Bufor opisany w poprzednim podrozdziale ma dwie zasadnicze wady:

- wymaga synchronizacji zegarów sterujących pracą czujnika **S** i bufora **B**,
- wymaga znajomości górnego ograniczenia opóźnienia sieci $\bar{\tau}^N$.

Od wad tych wolny jest bufor, którego zasadę działania opisano poniżej. Może on znaleźć zastosowanie w przypadku sieci o podobnych jak poprzednio własnościach, z jednym wyjątkiem – nie jest konieczna znajomość górnego ograniczenia opóźnienia. Oto własności sieci komunikacyjnej, dla której właściwy jest opisywany obecnie bufor:

1. Pakiety nie są gubione ani dublowane.
2. Pakiety opuszczają sieć w kolejności, w jakiej zostały do niej wprowadzone.
3. Opóźnienie w przesyłaniu pakietów przez sieć jest zmienne, ale ograniczone z góry. Znajomość górnego ograniczenia nie jest jednak wymagana na etapie projektowania bufora.

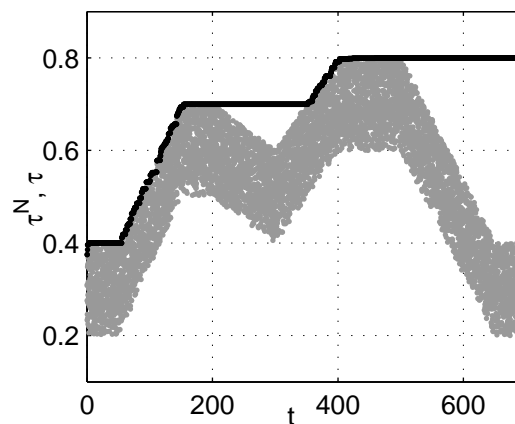
Zasada działania bufora:

1. Pakiety opuszczają bufor w takiej samej kolejności, w jakiej docierają do niego z sieci; bufor jest więc kolejką FIFO.
2. Jeśli bufor nie jest pusty, odstęp czasowy δ_k między uwalnianiem kolejnych pakietów z bufora **B** jest równy okresowi T , z jakim pakiety są wysyłane do sieci przez czujnik **S**

$$\delta_k = T$$
3. Jeśli bufor **B** jest pusty, a upłynął już okres T od chwili wysłania poprzedniego pakietu, odstęp czasowy do wysłania następnego pakietu jest jednorazowo wydłużany do chwili, gdy do bufora dotrze nowy pakiet z sieci

$$\delta_k = \max \{T, t_{k+1}^N - t_k^B\}$$
4. Pierwszy pakiet, który dotrze do bufora od chwili jego uruchomienia, jest uwalniany bezzwłocznie.

Bufor **B2**, w odróżnieniu od **B1**, nie wymaga synchronizacji chwili startu zegarów **Ts** i **TB**. Rysunek III.41 przedstawia przykładowe przebiegi czasowe opóźnień w układzie z opisanym buforem, który w trakcie pracy „uczy się” maksymalnego opóźnienia sieci.



Rys. III.41: Przykładowe przebiegi czasowe opóźnień w układzie z buforem typu **B2** (kolor szary – τ^N , kolor czarny – τ).

III.1.2.3 Bufor typu B3

Bufor **B1** utrzymuje na wyjściu stałe, założone na etapie projektowania opóźnienie – nawet w przypadku, gdy rzeczywiste opóźnienie sieci jest mniejsze. Bufor **B2** dopasowuje się do rzeczywistego opóźnienia w sieci, jednak tylko w jedną stronę – opóźnienie na jego wyjściu może wyłącznie rosnąć. Nawet jeśli na skutek zmiany warunków pracy opóźnienie wnoszone przez sieć w układzie z buforem **B2** zmaleje, τ_k w kolejnych okresach próbkowania pozostanie bez zmian. Niedogodność tę można wyeliminować, stosując inny, opisany poniżej typ bufora. Oto własności sieci komunikacyjnej, dla której ma on zastosowanie:

1. Sporadycznie pakiety mogą być gubione, dublowane lub docierają niechronologicznie.
2. Opóźnienie w przesyłaniu pakietów posiada dwie składowe: wolnozmienną oraz szybkozmienną – obie o ograniczonych amplitudach.

Wyjątek od założenia o ograniczonej amplitudzie stanowi zdarzenie zgubienia pakietu, gdy opóźnienie staje się nieskończone. Zasadę działania bufora można przedstawić w kilku punktach:

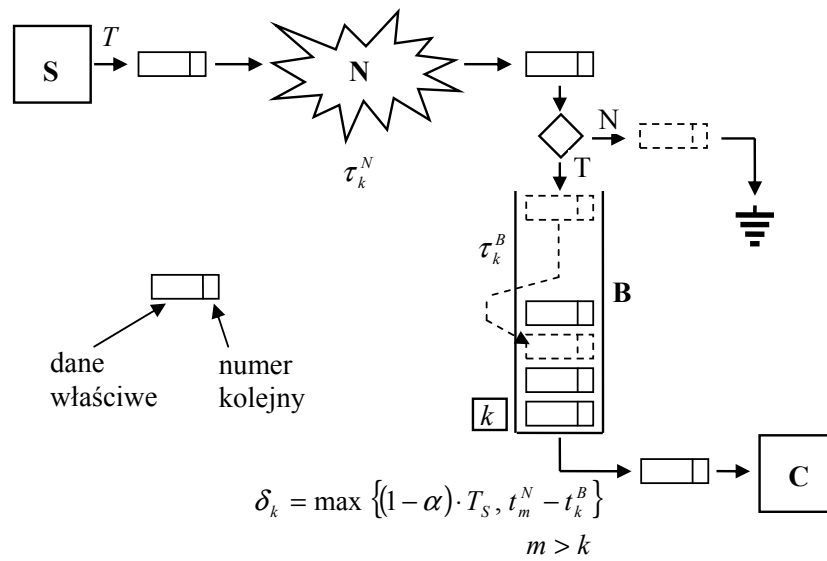
1. Bufor **B**, odebrawszy nowy pakiet, sortuje swoją zawartość według kolejności wysyłania pakietów przez czujnik **S**. By sortowanie było możliwe, czujnik **S** musi w każdym pakiecie przesyłać, prócz właściwych danych, także jego numer kolejny (znakowanie pakietów).
2. Jeśli otrzymany pakiet jest starszy niż ten, który jako ostatni opuścił bufor lub też poprzednia kopia otrzymanego pakietu znajduje się już w buforze, to jest on odrzucany. By spełnić ten wymóg, bufor musi posiadać pamięć numeru ostatnio wysłanego pakietu.
3. Jeśli bufor nie jest pusty, odstęp czasowy δ_k między uwalnianiem kolejnych pakietów z bufora **B** jest nieco mniejszy niż okres T , z jakim pakiety są wysyłane do sieci przez czujnik **S**

$$\delta_k = (1 - \alpha)T, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \approx 0$$
4. Jeśli bufor **B** jest pusty przez czas równy $(1 - \alpha)T$ od wysłania ostatniego pakietu, odstęp czasowy do wysłania następnego pakietu jest jednorazowo wydłużany do chwili, gdy do bufora dotrze nowy pakiet z sieci
$$\delta_k = \max \{ (1 - \alpha)T, t_m^N - t_k^B \}, \quad m > k$$
5. Pierwszy pakiet, który dotrze do bufora od chwili jego uruchomienia, jest uwalniany bezzwłocznie.

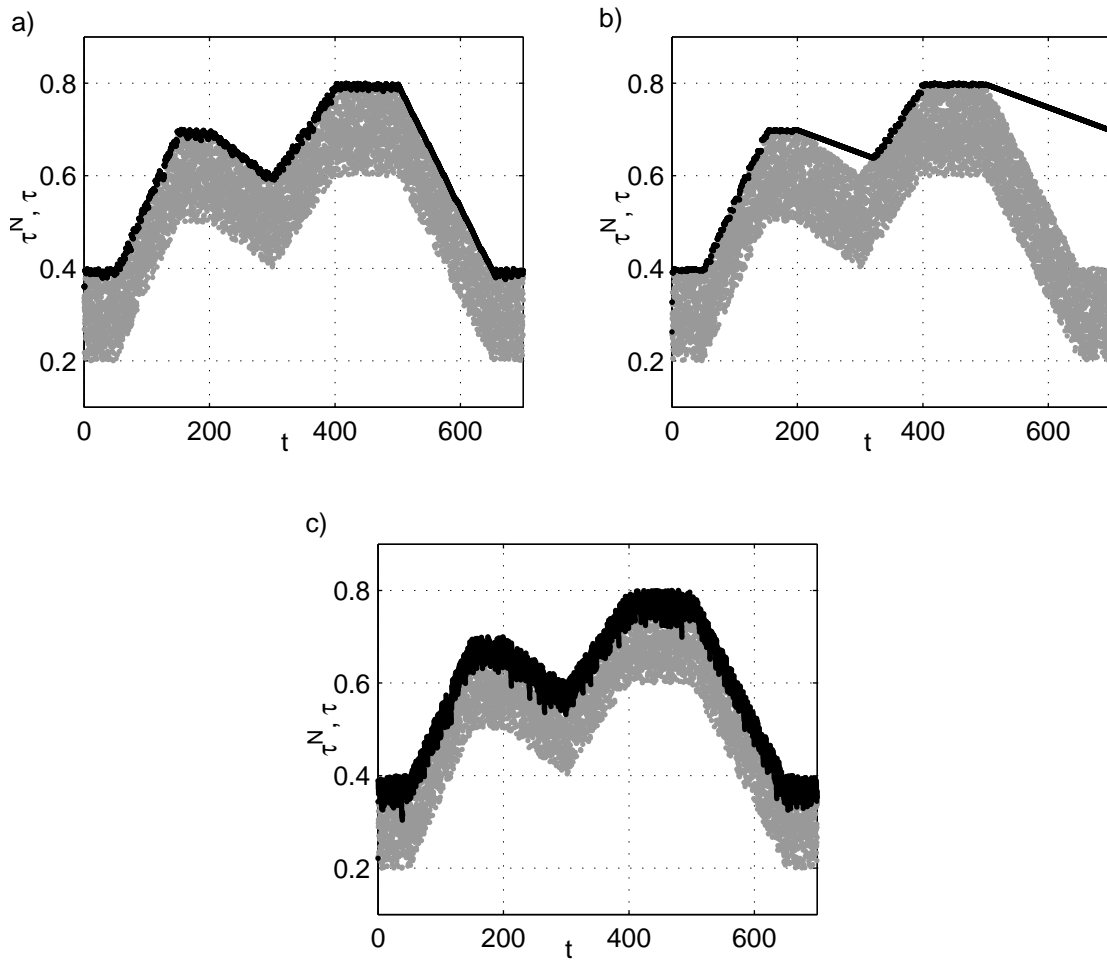
Dla realizacji punktu 1 konieczne jest, by czujnik **S** wysyłał razem z każdym pakietem jego numer kolejny. Punkt 2 wymaga pamiętania przez bufor numeru ostatnio uwolnionego pakietu. Przedstawiony bufor dopasowuje się zarówno do przypadku wzrastającego, jak i malejącego opóźnienia. Jeśli opóźnienie wzrasta, reakcja bufora jest natychmiastowa – musi on czekać na docierające pakiety. Jeśli maleje – jej szybkość zależy od wartości parametru α . Jeśli chwilowy okres, z jakim pakiety docierają z sieci, jest mniejszy niż $(1 - \alpha)T$, przez pewien czas bufor stopniowo się wypełnia. Wartość α wpływa także na wygładzenie przebiegu opóźnienia za buforem. Im α bliższe zeru, tym gładszy przebieg opóźnienia wypadkowego τ_k , ale też tym wolniejsza reakcja bufora na malejące opóźnienie. Schemat fragmentu układu regulacji z opisanym buforem pokazano na rysunku III.42, zaś przykładowe przebiegi czasowe opóźnień dla trzech różnych wartości parametru α przedstawiają rysunki III.43a, b oraz c. Zbyt duża wartość parametru α powoduje znaczne wahania opóźnień na wyjściu bufora (rysunek III.43c), zaś zbyt mała – nienadążanie bufora za szybkimi zmianami opóźnień sieci (rysunek III.43b).

III.1.2.4 Bufor typu B4

W przypadku sieci, w której szybkozmienna składowa opóźnienia ma znaczną amplitudę w stosunku do składowej wolnozmiennnej, stosowanie bufora **B3** jest niewskazane. Jeśli bowiem w sieci wystąpi pojedyncze, wyraźnie większe od pozostałych opóźnienie, bufor „dostroi” się do niego, opóźniając znacznie kolejne, nadchodzące bezpośrednio potem pakiety. W takim przypadku korzystniejsze może być nieczekanie na nadmiernie opóźniony pakiet, pominięcie go i poinformowanie o tym fakcie odbiorcy (którym jest regulator **C**). W rozwiązaniu tym zakłada się mniejszą od jedności stopę p pakietów, które dotrą na czas do bufora. Pozostałe pakiety, docierające zbyt późno, są odrzucane. Istnieje tu konieczność przyjęcia kompromisu przy doborze założonej stopy otrzymanych pakietów:



Rys. III.42: Zasada działania układu regulacji z buforem typu **B3**.



Rys. III.43: Przykładowe przebiegi czasowe opóźnień w układzie z buforem **B3**: a) $\alpha = 0.003$, b) $\alpha = 0.0005$, c) $\alpha = 0.04$ (kolor szary – τ^N , kolor czarny – τ).

im mniejsza, tym uboższa otrzymywana informacja (zgubione pakiety), ale jednocześnie bardziej aktualna (mniejsze opóźnienie). Poniżej przedstawiono działający w ten właśnie sposób bufor. W jego opisie występuje funkcja φ_k . Informuje ona czy k -ty pakiet dotarł na czas do bufora i został przesłany dalej do kompensatora (wartość 1), czy też spóźnił się nadmiernie i zamiast niego wysłano informację o jego braku (wartość 0)

$$\varphi_k = \begin{cases} 1, & t_k^B \geq t_k^N \\ 0, & t_k^B < t_k^N \end{cases}$$

Własności sieci, dla której można zastosować omawiany bufor, są następujące:

1. Wolnozmiennne opóźnienia o ograniczonej amplitudzie z szybkozmiennymi wahaniami o znacznej, również ograniczonej amplitudzie.
2. Pakiety nie są dublowane ani gubione.
3. Pakiety opuszczają sieć \mathbf{N} w takiej samej kolejności, w jakiej są do niej wysyłane przez czujnik \mathbf{S} .

Algorytm działania bufora \mathbf{B} jest następujący:

1. Odstęp czasu δ_k pomiędzy uwolnieniem k -tego oraz $(k + 1)$ -go pakietu wyliczany jest według wzoru

$$\delta_k = T + \alpha T (p - \varphi_k) \tag{III.47}$$

gdzie:

T – okres wysyłania pakietów w sieć przez czujnik (okres próbkowania)

α – współczynnik decydujący o szybkości zmian opóźnienia ($\alpha > 0$, $\alpha \approx 0$)

p – założony udział pakietów, które dotrą do bufora na czas ($p \in (0, 1)$)

φ_k – informacja, czy k -ty pakiet dotarł na czas (1), czy nie (0)

2. Jeśli w chwili, w której bufor powinien uwolnić następny pakiet, jest on pusty, zamiast brakującego pakietu, który nie dotarł na czas, wysyłana jest odpowiednia informacja o niedotarciu pakietu. Nie jest wprowadzane dodatkowe opóźnienie.
3. Pierwszy pakiet, który dotrze do bufora od chwili jego uruchomienia, jest uwalniany bezzwłocznie.

Interpretacja wzoru (III.47) jest następująca. Jeśli poprzedni pakiet nie dotarł na czas, należy nieco (o wartość równą αT) opóźnić próbę wysłania następnego pakietu. Jeśli poprzedni pakiet nie spóźnił się, odstęp ten należy nieco skrócić w stosunku do okresu próbkowania T . Opóźnienie pakietu opuszczającego bufor w $k + 1$ -szym kroku wyraża się formułą

$$\tau_{k+1} = t_{k+1}^B - t_{k+1}^S$$

Odjemna i odjemnik po prawej stronie w powyższym wzorze dane są wzorami

$$t_{k+1}^S = \sum_{j=0}^k T = (k + 1) T, \quad t_{k+1}^B = \sum_{j=0}^k \delta_j$$

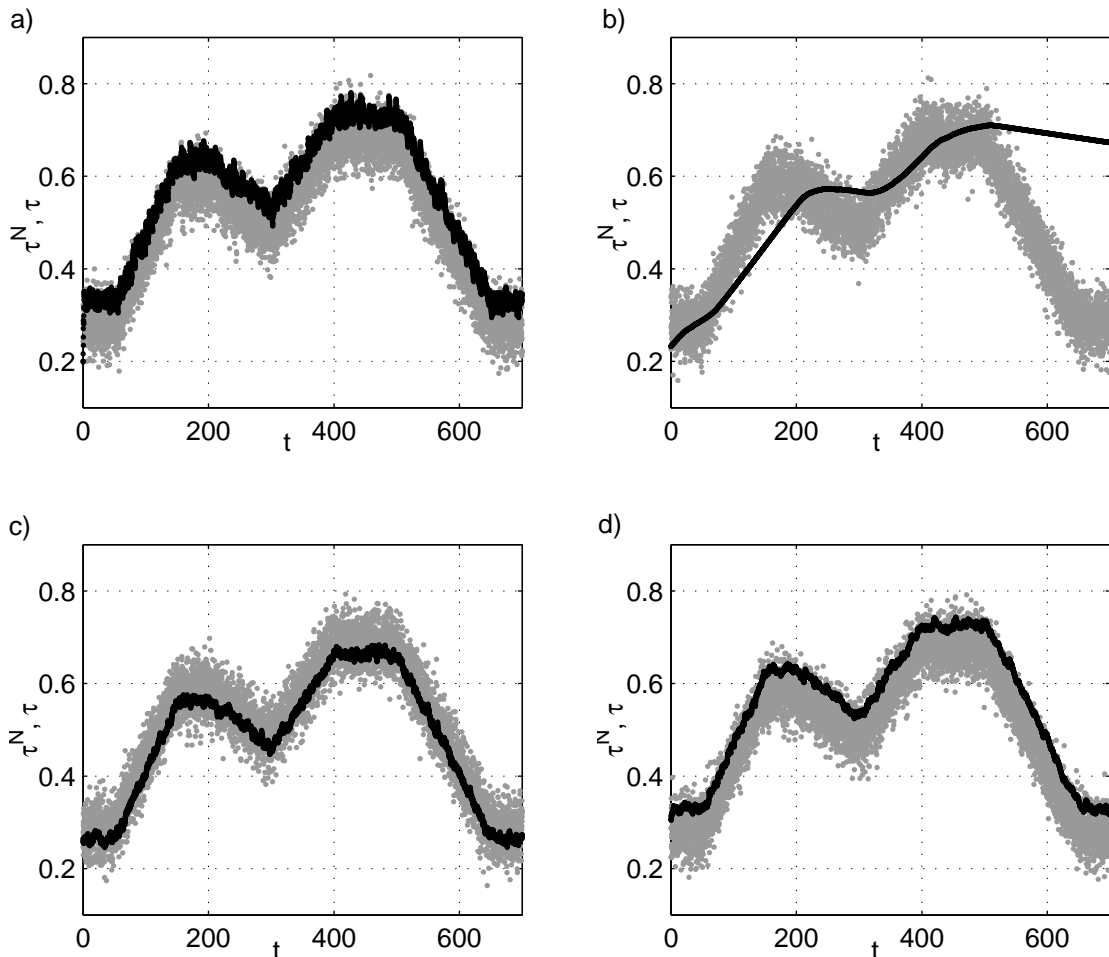
Stąd

$$\tau_{k+1} = \sum_{j=0}^k \delta_k - (k+1) T$$

Po uwzględnieniu wzoru (III.47) otrzymujemy

$$\tau_{k+1} = \alpha T \sum_{j=0}^k (p - \varphi_j)$$

Ostatni wzór wskazuje na „całkujący” charakter zastosowanego algorytmu sterującego pracą bufora. Opóźnienie w $(k+1)$ -szym kroku wyraża się bowiem sumą składników zależnych od φ_j z wszystkich poprzednich kroków. Jeśli średnia wartość φ jest równa założonemu udziałowi p przeterminowanych pakietów, to średnia wartość opóźnienia τ pozostanie stała. Jeśli natomiast, na skutek zmian własności sieci, średnia wartość φ spadnie poniżej lub przekroczy p , nastąpi odpowiednio systematyczny (średnio) wzrost lub spadek τ . Rysunek III.44 przedstawia przykładowe przebiegi czasowe opóźnień w układzie z buforem typu **B4** dla różnych wartości parametrów α i p . Rysunki III.44c



Rys. III.44: Przebiegi czasowe opóźnień w układzie z buforem typu **B4**: a) $\alpha = 0.2$, $p = 0.9$, b) $\alpha = 0.002$, $p = 0.9$, c) $\alpha = 0.05$, $p = 0.3$, d) $\alpha = 0.05$, $p = 0.9$ (kolor szary – τ^N , kolor czarny – τ).

i III.44d uwiadcniają wpływ parametru p na przebiegi opóźnienia. Wraz ze wzrostem p rosną również opóźnienia na wyjściu bufora. Rysunki III.44a, III.44b i III.44c pokazują wpływ parametru α

na działanie układu. Zbyt duża wartość α wywołuje znaczne wahania wypadkowego opóźnienia τ_k (rysunek III.44a). Zbyt mała wartość α spowalnia reakcję bufora na zmianę opóźnień sieciowych τ_k^N (rysunek III.44b).

III.1.2.5 Bufor typu B5

Jeśli w sieci opisanej w poprzednim podrozdziale zdarza się sporadyczne dublowanie, gubienie i niechronologiczne dostarczanie pakietów, należy nieco zmodyfikować algorytm działania bufora. Musi on być zdolny do sortowania zgromadzonych pakietów według kolejności wysłania przez czujnik oraz do odrzucania duplikatów już otrzymanych pakietów. W tym celu konieczne jest, by czujnik **S** dodawał do każdego wysyłanego pakietu jego numer kolejny, a bufor **B** pamiętał numer ostatnio uwolnionego przez siebie pakietu. Poniżej wyliczono własności sieci, w której ma zastosowanie opisywany bufor:

1. Wolnozmiennie opóźnienia o ograniczonej amplitudzie ze znacznymi szybkozmiennymi wahaniami o nieograniczonej amplitudzie.
2. Sporadyczne dublowanie, gubienie i niechronologiczne dostarczanie pakietów.

Zasada działania bufora **B5** jest następująca:

1. Odstęp czasu δ_k pomiędzy uwolnieniem k -tego oraz następnego pakietu wyliczany jest według wzoru

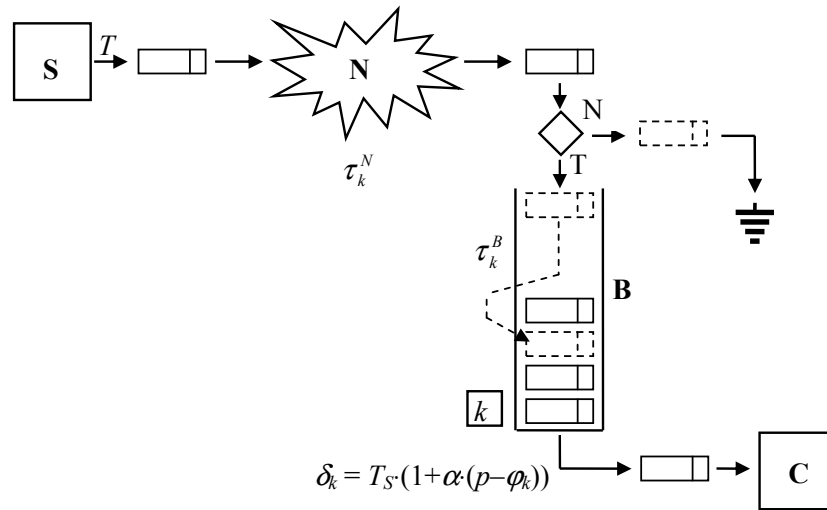
$$\delta_k = T + \alpha T (p - \varphi_k)$$
 gdzie:
 T – okres wysyłania pakietów w sieć przez czujnik
 α – współczynnik decydujący o szybkości zmian opóźnienia
 p – założony udział pakietów, które dotrą do bufora na czas
 φ_k – informacja, czy k -ty pakiet dotarł na czas (1), czy nie (0)
2. Jeśli bufor jest pusty, zamiast brakującego pakietu, który nie dotarł, uwalniana jest informacja o niedotarciu pakietu na czas. Nie jest wprowadzane dodatkowe opóźnienie.
3. Wysyłane przez czujnik **S** pakiety otrzymują kolejne numery. Bufor **B**, odebrawszy nowy pakiet, sortuje swoją zawartość według numerów zgromadzonych w nim pakietów.
4. Jeśli otrzymany pakiet jest starszy niż ten, który ostatnio opuścił bufor, lub wcześniejsza kopia otrzymanego pakietu jest już w buforze, to jest on odrzucany.
5. Pierwszy pakiet, który dotrze do bufora od chwili jego uruchomienia, jest uwalniany bezzwłocznie.

Zasada działania opisanego bufora przedstawiona jest schematycznie na rysunku III.45.

Niektóre własności opisanych wyżej buforów różnych typów zebrano dla porównania w tabeli III.3.

Przykład III.5

Skuteczność jednego z opisanych wyżej buforów sprawdzona została symulacyjnie. Wykorzystano w tym celu pakiet obliczeń numerycznych MATLAB i specjalnie do tego celu napisany M-plik skryptowy. Porównano działanie dwóch układów regulacji, podobnych do tych z rysunków III.36 i III.37,



Rys. III.45: Zasada działania bufora typu **B5** w rozproszonym układzie regulacji.

Tab. III.3: Właściwości buforów.

Typ bufora	Sposób wyzwalania bufora	Numerowanie pakietów	Synchronizacja zegarów czujnika i bufora (TS i TB)
B1	tylko zegarem	zbędne	wymagana dokładna zgodność okresów i faz początkowych
B2	zegarem i/lub zdarzeniami	zbędne	wymagana dokładna zgodność okresów
B3	zegarem i/lub zdarzeniami	konieczne	wymagana przybliżona zgodność okresów
B4	zasadniczo zegarem z korektą od zdarzeń	zbędne	wymagana przybliżona zgodność okresów
B5	zasadniczo zegarem z korektą od zdarzeń	konieczne	wymagana przybliżona zgodność okresów

z buforem typu **B2** (opisanym w podrozdziale III.1.2.2) i bez bufora. W obu układach przyjęto, że czujnik **S** taktowany jest zegarem o okresie T , zaś akcje regulatora **C** i urządzenia wykonawczego **A** wyzwalane są zdarzeniami polegającymi na dotarciu pakietu danych. Założono, że czujnik realizuje operację próbkowania, zaś urządzenie wykonawcze – zadanie ekstrapolacji zerowego rzędu. Różnica między układami przedstawionymi na rysunkach III.36 i III.37 i układami wykorzystanymi w symulacjach komputerowych polegała na dodaniu bezpośrednio przed regulatorem **C** węzła sumacyjnego, porównującego sygnał wyjściowy obiektu z wartością zadaną. W rozpatrywanym przykładzie okres próbkowania wynosił $T = 2$ [s]. Opóźnienie τ_k^N wnoszone przez sieć miało rozkład jednostajny na przedziale $[0, 2]$. Jego wartość oczekiwana (średnia) wynosiła 1 i była równa połowie okresu próbkowania T , zaś wartość maksymalna równała się okresowi próbkowania T . Regulator **C** wyznaczono metodą lokowania biegunów, zakładając stałą wartość opóźnień komunikacyjnych wnoszonych przez sieć. Obliczenia przeprowadzono dwukrotnie, przyjmując odpowiednio wartość średnią oraz maksymalną τ_k^N . Poniżej podany jest sposób doboru nastaw regulatora, a dalej zamieszczone są wyniki

symulacji komputerowych.

Niech obiekt **PC** opisany będzie równaniami stanu z czasem ciągłym

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad (\text{III.48a})$$

$$y(t) = \bar{C}x(t) \quad (\text{III.48b})$$

gdzie

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podanym wyżej równaniom stanu odpowiada transmitancja z czasem ciągłym

$$\bar{P}(s) = \frac{1}{s^2}$$

a jej z kolei – transmitancja z czasem dyskretnym

$$P_0[z] = P_\tau[z] \Big|_{\tau=0} = \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2} = \frac{2(z+1)}{(z-1)^2} = \frac{2z+2}{z^2-2z+1}$$

reprezentująca obiekt **PC** uzupełniony o pracujące synchronicznie elementy **S** i **A**. W układzie regulacji przedstawionym na rysunku III.37 synchronizacja taka ma miejsce tylko wówczas, gdy całkowite opóźnienie τ_k jest stałe i równe zero. Fakt ten podkreślono, umieszczając zero w indeksie dolnym w oznaczeniu $P_0[z]$.

Stałe opóźnienie $\tau_k \equiv 2$, które jest równe okresowi próbkowania T , można łatwo uwzględnić w transmitancji dyskretniej $P_2[z]$, dodając jeden zerowy biegun do transmitancji $P_0[z]$, obowiązującej dla przypadku bez opóźnienia [46]

$$P_2[z] = P_\tau[z] \Big|_{\tau=T} = \frac{1}{z} P_0[z] = \frac{2z+2}{z^3-2z^2+z} \quad (\text{III.49})$$

Uwzględnienie stałego opóźnienia $\tau \equiv 1$, równego połowie okresu próbkowania, wymaga skorzystania ze zmodyfikowanego przekształcenia Z [43], a jego wynik dany jest wzorem

$$P_1[z] = P_\tau[z] \Big|_{\tau=1} = \frac{T^2}{2} \left(\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right) = \frac{z^2+6z+1}{2z(z-1)^2} = \frac{z^2+6z+1}{2z^3-4z^2+2z} \quad (\text{III.50})$$

gdzie parametr $m \in (0, 1)$ określa relację między opóźnieniem τ a okresem próbkowania T

$$m = 1 - \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$$

Dyskretne regulatory $C_1[z]$ i $C_2[z]$ dla obiektów opisanych transmitancjami $P_1[z]$ i $P_2[z]$ wyznaczono metodą lokowania biegunów [97]. W obu przypadkach wielokrotny biegun transmitancji zamkniętych układów regulacji z obiektami (III.50) i (III.49) był równy 0.6. Szczegółowe obliczenia zamieszczone są w dodatku D.2. Ich wyniki są następujące

$$C_1[z] = \frac{-0.12864z^2 + 0.28672z - 0.15552}{z^2 - 0.93568z + 0.9712}$$

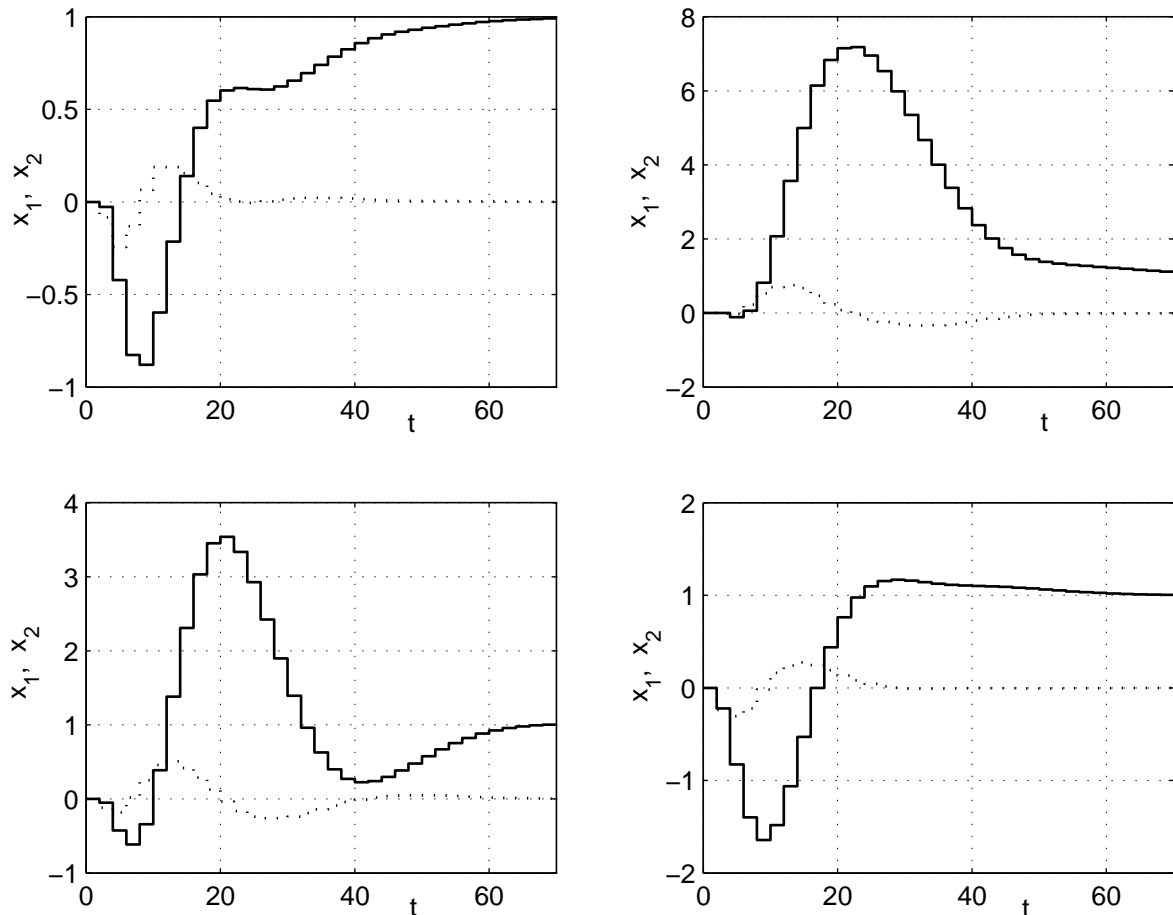
$$C_2[z] = \frac{-0.01072z^2 + 0.05216z - 0.03888}{z^2 - z + 0.62144}$$

Transmitancje zamkniętych układów regulacji z podanymi wyżej regulatorami dane są wzorami

$$G_1[z] = \frac{-0.06432 z^4 - 0.24256 z^3 + 0.71808 z^2 - 0.3232 z - 0.07776}{z^5 - 3 z^4 + 3.6 z^3 - 2.16 z^2 + 0.648 z - 0.07776}$$

$$G_2[z] = \frac{-0.02144 z^3 + 0.08288 z^2 + 0.02656 z - 0.07776}{z^5 - 3 z^4 + 3.6 z^3 - 2.16 z^2 + 0.648 z - 0.07776}$$

Rysunek III.46 przedstawia przebiegi czasowe spróbkowanego stanu obiektu (III.48a), (III.48b) w odpowiedzi na skok jednostkowy wartości zadanej w układzie bez bufora, w którym pracuje regulator $C_1[z]$. Na rysunku III.47 zamieszczono przebiegi uzyskane w przypadku użycia regulatora $C_2[z]$,

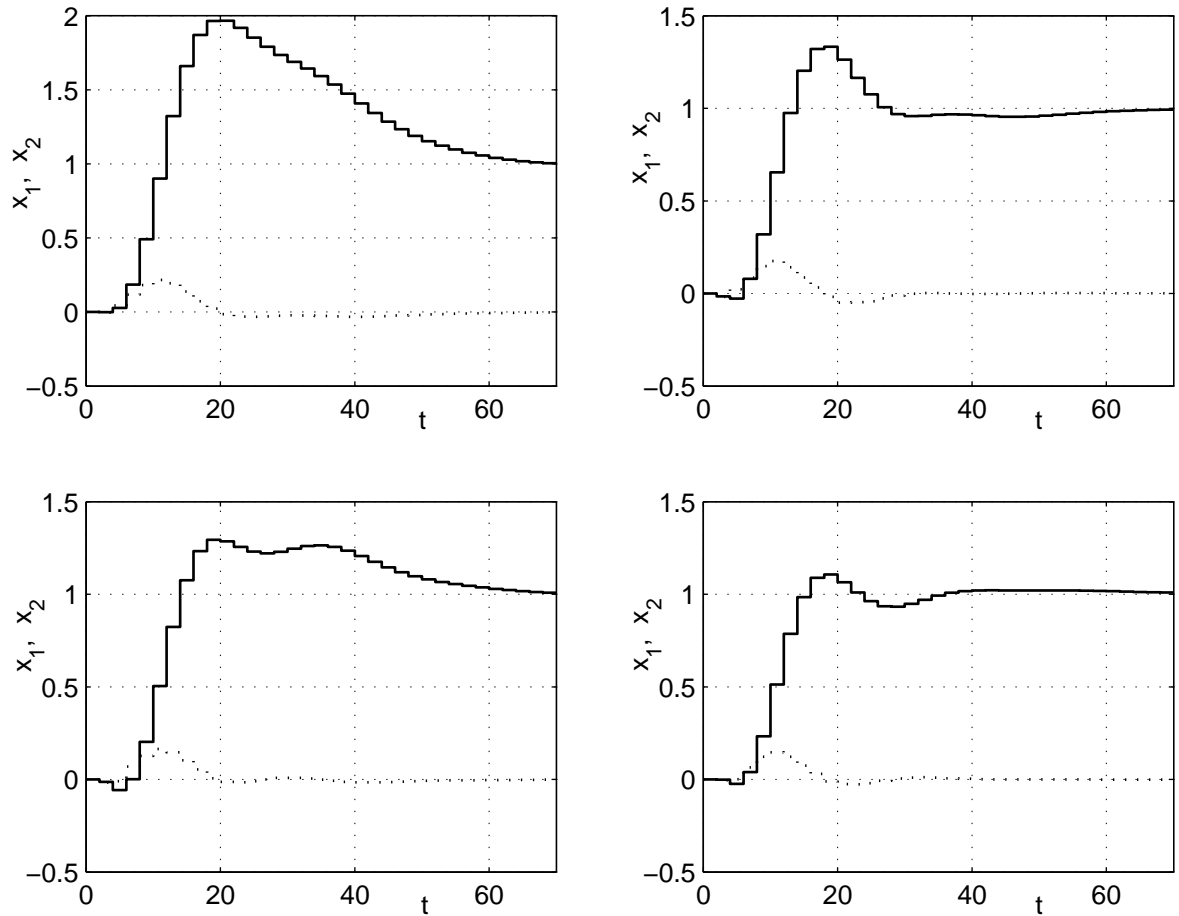


Rys. III.46: Przebiegi czasowe sygnału wyjściowego obiektu w układzie bez bufora i z regulatorem $C_1[z]$ (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana).

również bez bufora. Wreszcie rysunek III.48 odpowiada regulatorowi $C_2[z]$, zastosowanemu łącznie z buforem typu **B2**. Dla każdego przypadku zamieszczono cztery różne przebiegi, uzyskane dla różnych losowych sekwencji opóźnień komunikacyjnych w sieci. Jak widać z wykresów, użycie bufora zwiększa przede wszystkim powtarzalność przebiegów, a w większości przypadków zmniejsza czas regulacji i wartość przeregulowania. Ze względu na czytelność wykresów, zrezygnowano z liczbowego wyrażania wskaźników jakości regulacji.

III.1.2.6 Stabilność układów regulacji z buforami

Zachowanie stabilności układu regulacji zawsze stanowi nadrzędny cel podczas projektowania regulatora. Wprowadzenie bufora w pętlę sprzężenia zwrotnego zmienia własności dynamiczne całego



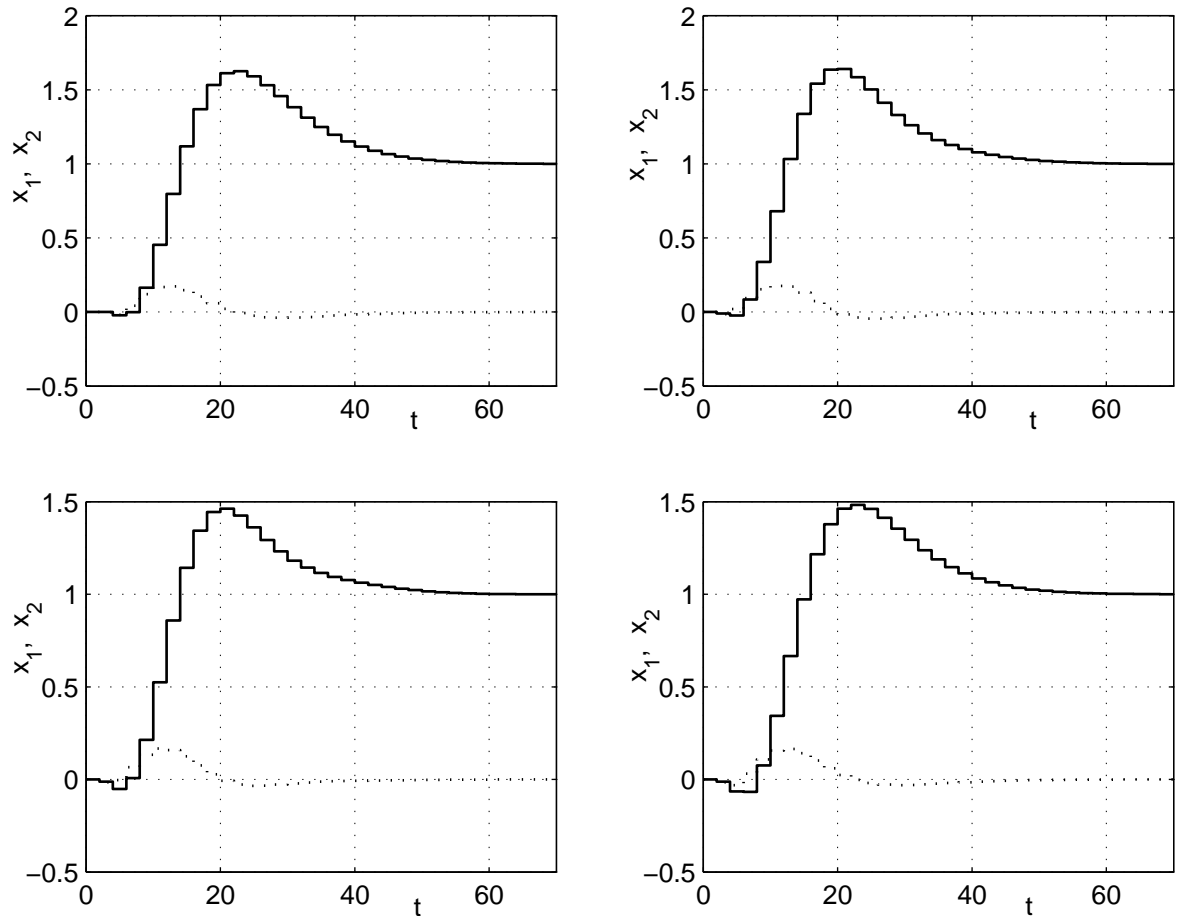
Rys. III.47: Przebiegi czasowe sygnału wyjściowego obiektu w układzie bez bufora i z regulatorem $C_2[z]$ (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana).

systemu i może bądź pogorszyć, bądź polepszyć warunki stabilności. Wpływu bufora na system regulacji zależy nie tylko od jego typu, ale też od własności sieci transmisji danych, wprowadzającej opóźnienia.

Bufor **B1** czyni wypadkowe opóźnienie τ_k stałym. Jest to sytuacja najłatwiejsza do analizy, zwłaszcza wówczas, gdy uzyskane opóźnienie jest wielokrotnością okresu próbkowania [46]. Dla pozostałych buforów, wypadkowe opóźnienia zmieniają się zazwyczaj w sposób przypadkowy. W niektórych przypadkach można jednak założyć, że stają się one wolnozmiennie w porównaniu z szybkością dynamiki obiektu (zwłaszcza w układach z buforem typu **B4** lub **B5**). Wówczas do zapewnienia stabilności można wykorzystać metody stosowane dla układów o niepewnych parametrach [8, 16, 17, 28]. W układach z buforami **B4** i **B5** dopuszczalne jest gubienie pakietów. Kwestia stabilności takich systemów poruszona jest w pracy [142].

W przypadku bufora **B2**, wypadkowe opóźnienie może z czasem jedynie rosnać. Załóżmy, że opóźnienia wprowadzane przez sieć są ograniczone z góry. Niech w kolejnych krokach będą one losowo niezależne i opisane rozkładem jednostajnym. W takim przypadku wypadkowe opóźnienie wzrasta w sposób znaczący jedynie na pewnym skończonym odcinku czasu. Po jego upływie jest ono niemal stałe i stabilność może być badana przy założeniu jego stałości.

W układzie z buforem **B3** wypadkowe opóźnienie zmienia się ustawnie w czasie, również po po-



Rys. III.48: Przebiegi czasowe sygnału wyjściowego obiektu w układzie z buforem **B2** i z regulatorem $C_2[z]$ (x_1 – linia ciągła, x_2 – linia przerywana).

czątkowym gwałtownym skoku, jednak jego wahania są mniejsze od wahań opóźnień sieciowych. Fakt ten może sprawić, że wyniki badania stabilności metodami stochastycznymi będą mniej zachowawcze.

III.1.2.7 Uwagi końcowe

Opisane powyżej rozwiązania układów regulacji z buforami ujednolicającymi opóźnienia nie mają charakteru uniwersalnego. Można je stosować jedynie w przypadku sieci telekomunikacyjnych o określonych własnościach. Użycie buforów to tylko jeden z wielu sposobów radzenia sobie z problemem zmienności opóźnień transmisyjnych. Zaprezentowane metody nadają się dobrze do dwóch przypadków: gdy regulator zaprojektowano przy założeniu stałych opóźnień, a sieć wprowadza opóźnienia zmienne, bądź też jeśli na etapie projektowania założono ich wolnozmiennność, a w rzeczywistości podlegają one szybkim wahaniom. Mogą być również przydatne, gdy model procesu nie jest zbyt dobrej jakości. Zalety buforów mogą się uwidocznic zwłaszcza we współpracy z regulatorami adaptacyjnymi, które dostosowują się do zmiennych opóźnień [122]. Praktyczna implementacja przedstawionych buforów jest stosunkowo prosta, gdyż ich algorytmy nie wymagają prowadzenia złożonych obliczeń. Największą trudność może sprawiać występująca w niektórych buforach konieczność synchronizacji zegarów oraz sortowania zawartości. O typie bufora, który należałoby użyć w danym przypadku, decyduje przede wszystkim rodzaj sieci oraz jej właściwości. Przybliżone wskazówki

Tab. III.4: Typy sieci i zalecane dla nich typu buforów.

Sieć lub protokół	Zalecany bufor	Komentarz
ControlNet	B1	W sieci ControlNet harmonogram transmisji ustalany jest w sposób statyczny, na etapie konfigurowania systemu. Znany jest zatem maksymalny odstęp czasowy między dwiema kolejnymi transmisjami interesującego sygnału, a opóźnienie transmisji nigdy go nie przekracza. W takim przypadku odpowiednim rozwiązaniem jest bufor B1 , nastrojony na maksymalną możliwą wartość opóźnienia.
CAN	B2, B3	W prawidłowo zaprojektowanym systemie z siecią CAN maksymalne opóźnienie jest ograniczone z góry, jednak niekoniecznie znane na etapie projektowania sieci. Co więcej, może ono ulec natychmiastowej zmianie, jeśli w danym segmencie sieci nadawać rozpoczną węzły dotychczas nieaktywne. Z drugiej strony, wyłączenie niektórych węzłów prowadzi do zmniejszenia opóźnienia. W układzie tym można zastosować bufor typu B3 , który dostosowuje się zarówno do rosnącego, jak i malejącego opóźnienia. Jeśli liczba aktywnych węzłów w sieci nie ulega zmianie w czasie działania systemu, bufor B3 można zastąpić prostszym w implementacji buforem B2 .
TCP/IP	B4	Transmisja danych z wykorzystaniem protokołu TCP cechuje się umiarkowanym rozrzutem opóźnień, zmianami w czasie ich wartości oczekiwanej, oraz sporadycznymi opóźnieniami istotnie większymi od wartości średniej. Bufor B4 jest tu najwłaściwszym rozwiązaniem, ponieważ płynnie dostosowuje się do powolnych zmian opóźnienia, a jednocześnie nie jest „rozstrajany” przez pojedyncze znacznie opóźnione pakiety, które odrzuca.
UDP/IP	B5	W odróżnieniu od TCP, protokół UDP nie gwarantuje zachowania kolejności pakietów, nie retransmituje zagubionych danych i nie zabezpiecza przed zwielokrotnionym dostarczaniem tego samego datagramu. Poza wymienionymi różnicami, charakter opóźnień jest podobny, jak w przypadku TCP (rysunek III.26). Dlatego właściwym buforem jest tutaj B5 , którego algorytm jest podobny do B4 , ale dodatkowo zawiera mechanizmy ochrony przez zjawiskami właściwymi wyłącznie protokołowi UDP.

doboru zawarto w tabeli III.4. Z wyjątkiem **B1**, wszystkie opisane bufory mają w większym lub mniejszym stopniu charakter adaptacyjny – dostosowują się do zmieniających się warunków panujących w sieci.

III.2 Ograniczenie częstotliwości przesłań pakietów w sieci telekomunikacyjnej

Obecność sieci transmisji danych o określonej przepustowości w rozproszonym systemie regulacji wprowadza szereg ograniczeń na przesył informacji między połączonymi siecią elementami układu sterowania (a zarazem węzłami sieciowymi). Ograniczenia te mogą się manifestować między innymi limitowaniem częstotliwości transmisji sieciowych (liczby pakietów, które mogą być przesłane przez sieć w jednostce czasu). W układzie sterowania przekłada się to na ograniczenie możliwej do uzyskania częstotliwości próbkowania (dyskretyzacji) sygnałów. Zjawisko to jest szczególnie dotkliwe w tych wielowymiarowych układach regulacji, w których próbki sygnałów pomiarowych z poszczególnych czujników oraz sygnałów sterujących dla poszczególnych urządzeń wykonawczych przesyłane są w odrębnych pakietach, lecz za pośrednictwem tej samej sieci. Dla obiektu MIMO o p wejściami i q wyjściami oznacza to bowiem (zazwyczaj) konieczność przesłania $p + q$ pakietów w każdym okresie próbkowania T . Zmusza to do $(p + q) / 2$ krotnego obniżenia częstotliwości próbkowania w stosunku do układu jednowymiarowego, jeśli tylko sieć telekomunikacyjna narzuca ograniczenia na częstotliwość przesłań.

Pogorszeniu jakości sterowania, wynikającemu z ograniczonej częstotliwości przesłań w sieci, można częściowo zapobiegać na trzy podane niżej sposoby, opisane szczegółowo w kolejnych podrozdziałach.

Pierwsza metoda polega na grupowaniu próbek sygnałów pomiarowych i sterujących w M -elementowe paczki i przesyłaniu ich przez sieć z częstotliwością M -krotnie niższą od częstotliwości pracy (próbkowania i odtwarzania) czujników i urządzeń wykonawczych [50]. W rezultacie efektywna częstotliwość próbkowania w układzie regulacji może być M -krotnie wyższa od ograniczenia narzuconego przez sieć telekomunikacyjną. W metodzie tej konieczne jest użycie technik estymacji stanu i sterowania.

Drugie rozwiązanie ma zastosowanie w przypadku wielowymiarowego rozproszonego układu regulacji z wieloma niezależnymi węzłami pomiarowymi. Ograniczona maksymalna częstotliwość transmisji w sieci może w takim układzie uniemożliwić przesłanie w jednym okresie próbkowania $T = 1/f$ sygnałów pomiarowych ze wszystkich czujników. Alternatywą dla wydłużenia okresu T jest wówczas zastosowanie harmonogramu niejednoczesnego próbkowania poszczególnych zmiennych stanu obiektu. Dalej zaproponowany jest system, w którym w pojedynczym okresie próbkowania mierzona jest tylko jedna z dwóch zmiennych stanu obiektu regulacji. Pozwala to zachować niezmienną wartość okresu próbkowania T , ale zmusza do stosowania estymacji nieznanymi pomiarów.

Trzeci sposób, pozwalający zachować wymaganą jakość regulacji przy obniżonej częstotliwości próbkowania, polega na wykorzystaniu zmodyfikowanej wersji ekstrapolatora pierwszego rzędu (FOH). Ekstrapolator taki otrzymuje w każdym kroku próbkowania dwie liczby: jedna z nich określa początkową wartość sterowania na przedziale o długości T , zaś druga – szybkość jego zmiany. Sterowanie w przedziale $[kT, (k + 1)T]$ jest więc określone wielomianem pierwszego stopnia (sparametryzowane dwoma jego współczynnikami). Zastosowanie ulepszanego ekstrapolatora FOH formalnie podwaja liczbę wejść obiektu i pozwala uzyskać lepsze wyniki sterowania przy niezminionej częstotliwości próbkowania lub też zachować niepogorszoną jakość przy jednoczesnej redukcji ruchu w sieci przenoszącej pakiety danych do urządzeń wykonawczych.

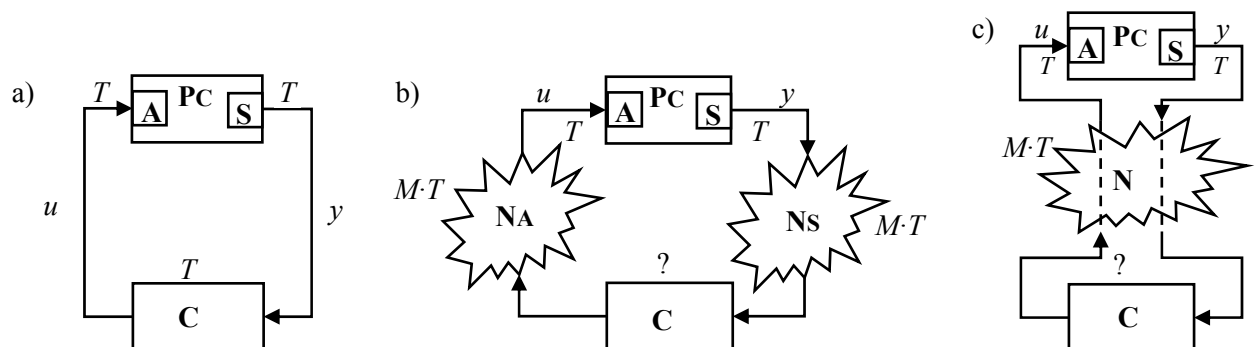
W pewnych przypadkach obniżenie częstotliwości przesłań sieciowych może okazać się wskazane nawet wówczas, gdy wykorzystywana sieć telekomunikacyjna jest w stanie transmitować dane z pier-

wotnie założoną częstotliwością f . Redukcja obciążenia w niektórych typach sieci powoduje bowiem zmniejszenie opóźnień komunikacyjnych lub ograniczenie ich wahań. W ogólnym bilansie korzystny wpływ zmiany charakteru opóźnień może przewyższyć straty związane z obniżeniem częstotliwości wymiany danych w sieci.

III.2.1 Grupowanie próbek sterowań i pomiarów

Na rysunku III.49a przedstawiony jest schemat blokowy klasycznego układu regulacji z obiektem **PC**, urządzeniem wykonawczym (aktuatorem) **A**, czujnikiem (sensorem) **S** i kompensatorem dynamicznym (regulatorem) **C**. Obiekt opisywany jest modelem matematycznym z czasem ciągłym, zaś czujnik, kompensator i urządzenie wykonawcze są elementami dyskretnymi, podejmującymi swoje akcje synchronicznie, ze wspólnym okresem próbkowania T . Dla prostoty rysunku pominięto na nim zegar (bądź zegary) wyzwalający akcje poszczególnych jego elementów. Czujnik realizuje operację próbkowania, zaś urządzenie wykonawcze – ekstrapolacji zerowego rzędu.

W przedstawionym układzie przesył danych między czujnikiem a kompensatorem oraz między kompensatorem a urządzeniem wykonawczym odbywa się natychmiastowo i nie podlega żadnym ograniczeniom, ponieważ elementy te połączone są bezpośrednio. W związku z tym wymiana danych między elementami **S** i **C** oraz **C** i **A** może zachodzić z dowolnym okresem T , narzuconym przez pozostałe elementy układu.

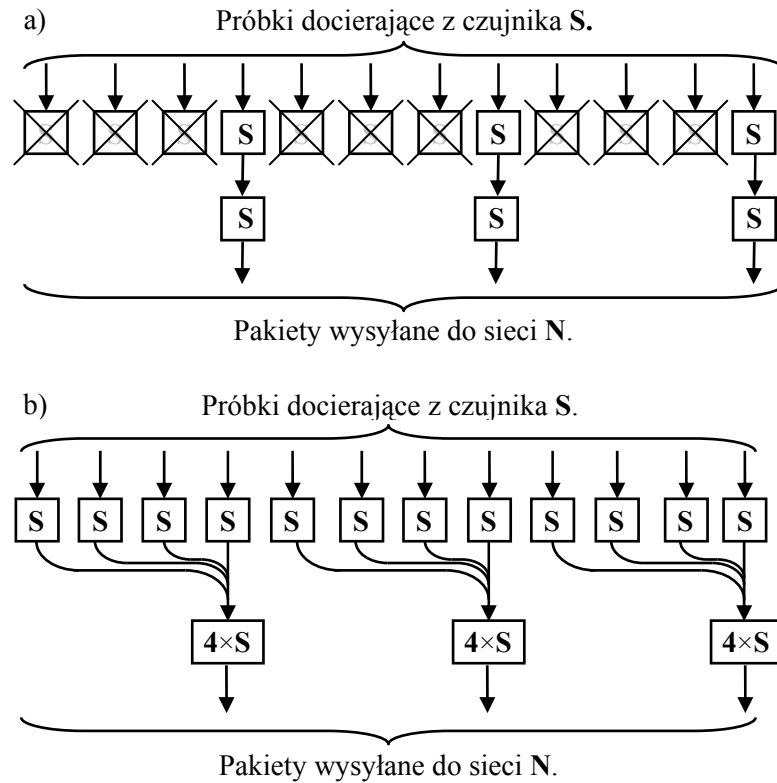


Rys. III.49: Układy regulacji: a) klasyczny, b) rozproszony z dwiema niezależnymi sieciami, c) rozproszony z jedną wspólną siecią (**PC** – obiekt regulacji, **A** – urządzenie wykonawcze (aktuator), **S** – czujnik (sensor), **C** – regulator (kompensator dynamiczny), **N**, **NS**, **NA** – sieci telekomunikacyjne).

Założmy, że w rozproszonym układzie regulacji, przedstawionym na schemacie III.49b lub III.49c, maksymalna częstotliwość przesyłania danych w sieci jest M -krotnie mniejsza od przyjętej częstotliwości próbkowania $f = 1/T$, z jaką wyzwalane są akcje pozostałych elementów układu. Powoduje to powstanie niedopasowania częstotliwości pracy poszczególnych składników systemu i niemożność punktualnego przesłania przez sieć wszystkich próbek sygnału pomiarowego i sterującego, dostarczanych odpowiednio przez czujnik **S** i regulator **C**.

Problem ten można rozwiązać na dwa sposoby. Pierwszy polega na zachowaniu niezmięnionej częstotliwości pracy elementów **S**, **C** i **A** układu i odrzucaniu tych próbek, które nie mogą być przesłane ze względu na ograniczone możliwości sieci (rysunek III.50a). Metoda ta wiąże się z utratą części informacji zawartej w odrzucanych próbkach. Podany sposób jest w zasadzie równoważny obniże-

niu częstotliwości taktowania f wszystkich elementów całego układu regulacji do wartości równej maksymalnej możliwej do uzyskania częstotliwości przesłań sieciowych f/M . Takie obniżenie częstotliwości próbkowania czy sterowania może prowadzić do istotnego pogorszenia jakości regulacji. Alternatywne rozwiązanie, pozwalające uniknąć odrzucania danych, polega na zastosowaniu opisa-



Rys. III.50: Dwa sposoby dopasowania różnych częstotliwości próbkowania i przesyłania sieciowego (przykład dla $M = 4$): a) odrzucanie próbek, b) grupowanie próbek.

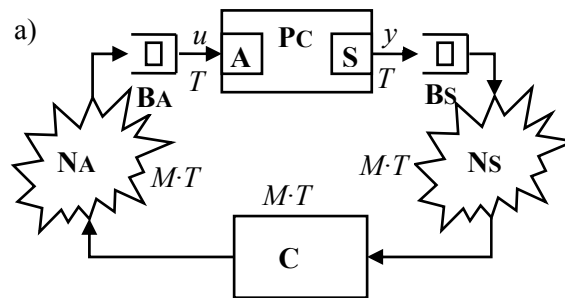
nej dalej techniki grupowania próbek sygnałów w M -elementowe paczki. Paczki te przesyłane są z maksymalną częstotliwością, na jaką pozwala sieć. W tym przypadku żadne dane nie są odrzucane (rysunek III.50b), jednak część z nich dociera z dodatkowym opóźnieniem. Przy zastosowaniu tego rozwiązania konieczne jest pomocniczo estymowanie stanu lub sterowań w oparciu o znany model procesu.

W dwóch następnych podrozdziałach opisano szczegółowo podane tu metody dopasowania częstotliwościowego poszczególnych elementów układu (odrzucanie i grupowanie próbek). W kolejnym przedstawiono algorytmy sterowania, które można zastosować łącznie z podanymi sposobami dopasowania częstotliwości. Dalej zamieszczono wyniki symulacji komputerowych, które pozwalają porównać skuteczność działania obu zaproponowanych rozwiązań. Następnie zaprezentowano rezultaty eksperymentów, w których zastosowano opisywane algorytmy do sterowania laboratoryjnym modelem obiektu aerodynamicznego. Ostatnia sekcja zawiera posumowanie i uwagi końcowe.

III.2.1.1 Dopasowanie częstotliwości metodą odrzucania próbek

Na rysunku III.51 przedstawiono schemat blokowy układu regulacji, w którym realizowany jest algorytm dopasowania częstotliwości metodą odrzucania próbek. O sieciach NS i NA zakładamy,

że przenoszą pakiety w niezmienionej kolejności, wprowadzając opóźnienia komunikacyjne, których suma τ jest stała i stanowi naturalną wielokrotności okresu próbkowania T . Maksymalna częstotliwość przesłań w sieciach jest ograniczona do wartości f/M , przy czym $f = 1/T$. Obecny w układzie

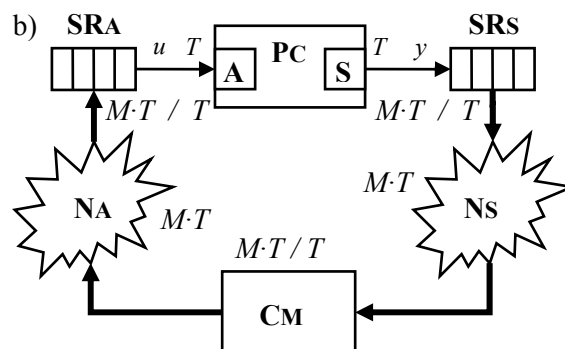


Rys. III.51: Rozproszony układ regulacji z dopasowywaniem częstotliwości przez odrzucanie próbek (**Bs**, **Ba** – bufory jednoelementowe).

kompensator **C** odbiera jedynie co M -tą próbkę sygnału wyjściowego y z czujnika **S**. Pozostałe próbki są odrzucane przez bufor **BS**, przez wzgląd na ograniczenia wnoszone przez sieć **NS**. Podobnie bufor **BA** otrzymuje nową wartość sterowania u tylko jeden raz na M okresów próbkowania T i przesyła ją M -krotnie do urządzenia wykonawczego **A** w każdym „długim” okresie MT . Oznacza to faktycznie obniżenie efektywnej częstotliwości pracy całego układu regulacji do częstotliwości pracy najwolniejszych elementów (sieci **NA** i **NS**). Wprowadzie czujnik **S** próbuje sygnał wyjściowy obiektu **PC** z okresem T , jednak dalej przesyłana jest tylko co M -ta próbka, co z punktu widzenia kompensatora faktycznie oznacza, że próbkowanie odbywa się z okresem MT . Podobnie rzecz się ma z urządzeniem wykonawczym **A**, które jest wyzwalane z okresem T , ale powtarza M -krotnie każdą nową wartość sterowania wyznaczoną przez kompensator **C**.

III.2.1.2 Dopasowanie częstotliwości metodą grupowania próbek

Na rysunku III.52 przedstawiono schemat blokowy systemu, w którym realizowany jest algorytm grupowania próbek. Metoda ta zakłada zróżnicowanie okresów próbkowania elementów układu. Czujnik **S** pracuje z okresem T , a wysyłane przez niego próbki trafiają do rejestru przesuwającego



Rys. III.52: Rozproszony układ regulacji z dopasowywaniem częstotliwości przez grupowanie próbek (**SRs**, **SRA** – M -elementowe rejestry przesuwne).

SRs, gdzie są gromadzone. Po skompletowaniu M -elementowej paczki próbek, rejestr **SRs** przesyła

ją pojedynczym pakietem sieciowym do kompensatora **CM**. Kolejne przesłania następują z odstępem czasowym MT . Z takimi samymi odstępami kompensator przygotowuje paczki zawierające M wartości sterowania i wysyła je do rejestru **SRA**. Urządzenie to z okresem T pobiera kolejne wartości z paczki i podaje je do aktuatora **A**, współpracującego z obiektem **PC**.

W układzie przedstawionym na rysunku III.52 kompensator otrzymuje dane z czujnika z tym samym okresem MT , co w systemie na rysunku III.51, jednak dane te zawierają pełniejszą informację – M próbek zamiast jednej. Bufor **Bs** odrzuca próbki, zaś rejestr **SRS** gromadzi je wszystkie. Po otrzymaniu danych kompensator wyznacza M nowych wartości sterowania, zamiast pojedynczej. W opisywanym rozwiązaniu przesyłanie sygnału wyjściowego u i wejściowego y dla obiektu odbywa się z tym samym, co poprzednio okresem, równym MT , lecz po stronie czujnika nie są odrzucane żadne próbki, a po stronie urządzenia wykonawczego w każdym okresie wyzwalania T do obiektu doprowadzana jest inna (w ogólnym przypadku) wartość sterowania. W obu przedstawionych rozwiązaniach kompensator jest taktowany z okresem MT . W drugim przypadku wykorzystuje on jednak M -krotnie większą liczbę danych i również wyznacza M -krotnie większą liczbę nowych wartości sterowania. Pozwala to postawić hipotezę, że jakość regulacji, skuteczność eliminacji zakłóceń czy wreszcie odporność na błędy identyfikacji obiektu będą większe w układzie z rejestrami przesunymi zamiast buforów.

Przesył danych przez sieci **NS** i **NA** wiąże się z występowaniem opóźnień komunikacyjnych. Dalej rozpatrzone będą cztery ich przypadki: w pierwszym z nich łączne opóźnienia transmisji τ obu sieci są zanedbywalnie małe, w drugim – równe okresowi próbkowania T , w trzecim – MT , a w czwartym – $(1 + M)T$. O pozostałych elementach układu regulacji (**C**, **A**, **S**) zakładamy, że czas trwania ich akcji jest zanedbywalnie mały. Cztery rozważane wartości opóźnień i dwa brane pod uwagę sposoby przesyłania danych (z grupowaniem lub odrzucaniem próbek) dają osiem możliwych przypadków (kombinacji), które rozważane będą w dalszej części pracy. Ilekroć konieczne będzie założenie konkretnej wartości parametru M (na rysunkach, w przykładach, do symulacji), przyjmiemy arbitralnie przykład $M = 4$ (jak na rysunku III.50).

III.2.1.3 Algorytmy kompensatorów dynamicznych

Do sterowania obiektem można być użyty kompensator dynamiczny, złożony z identycznościowego obserwatora Luenbergera oraz proporcjonalnego macierzowego regulatora od stanu. Obok obserwatora i regulatora, konieczne jest również użycie predyktora, który wyznacza estymaty stanu obiektu w chwilach czasu, w których – ze względu na brak danych pomiarowych – nie można użyć obserwatora Luenbergera. Niżej zamieszczono szczegółowy opis algorytmów sterowania w dwóch odmiennych wersjach: z odrzucaniem próbek oraz z ich grupowaniem. Opis odnosi się do przypadku z opóźnieniem transmisji równym T . Zasada konstrukcji algorytmów dla pozostałych rozważanych wartości opóźnień (0 , MT , $(M + 1)T$) jest podobna.

Rozważamy liniowy obiekt regulacji **PC** typu SISO (o jednym (skalarnym) wejściu i jednym (skalarnym) wyjściu) z czasem ciągłym, który po dyskretyzacji typu ZOH opisany jest równaniami stanu z czasem dyskretnym. Jeśli założyć, że na zdyskretyzowany obiekt **PD** oddziałują zewnętrzne

zakłócenia losowe $v[\cdot]$ i $w[\cdot]$, równania te przyjmują postać

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma (u[k] + v[k]) \quad (\text{III.53a})$$

$$y[k] = C x[k] + w[k] \quad (\text{III.53b})$$

gdzie $y[k] \in \mathbb{R}^q$, $u[k] \in \mathbb{R}^p$ i $x[k] \in \mathbb{R}^n$ to odpowiednio wartości sygnałów: wyjściowego i wejściowego oraz stanu systemu w chwili czasu $t_k = kT$

$$y[k] = y(kT), \quad x[k] = x(kT), \quad u[k] = u(kT)$$

Zajmijmy się chwilowo przypadkiem obiektu bez zakłóceń ($v \equiv 0$, $w \equiv 0$). Oznaczmy estymaty macierzy Φ , Γ i C , uzyskane w wyniku identyfikacji obiektu, odpowiednio przez $\hat{\Phi}$, $\hat{\Gamma}$ i \hat{C} . Estymaty te użyte będą przy projektowaniu kompensatora. Niech rząd macierzy C będzie mniejszy od rozmiaru przestrzeni stanu systemu (uzasadnia to konieczność użycia obserwatora [65, 86])

$$\text{rank } C < n$$

Załóżmy, że obiekt (III.53a), (III.53b) jest sterowalny i obserwowalny (rzędy macierzy sterowalności Q_c i obserwowalności Q_o są równe rozmiarowi n przestrzeni stanów).

$$Q_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \Gamma & \Phi \Gamma & \Phi^2 \Gamma & \dots & \Phi^{n-1} \Gamma \end{array} \right], \quad \text{rank } Q_c = n$$

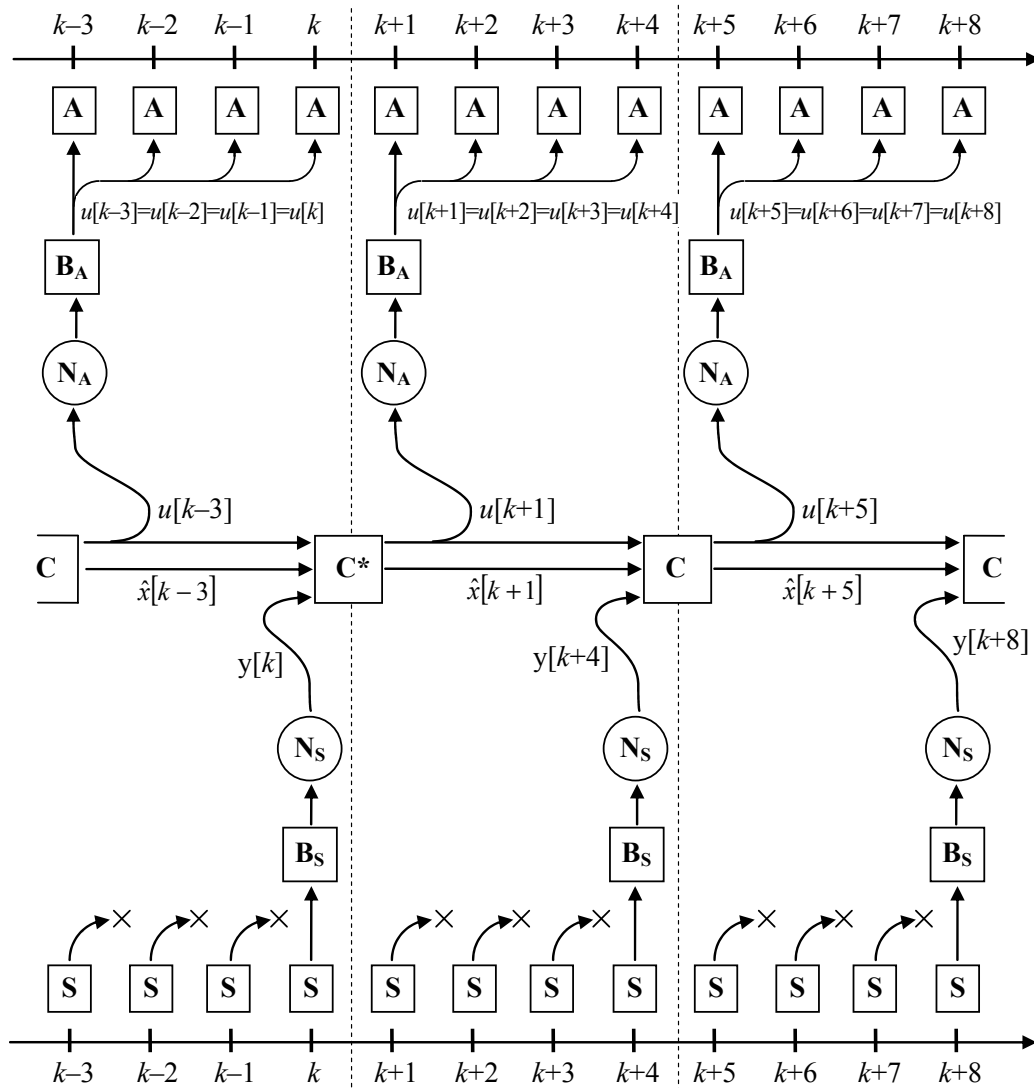
$$Q_o = \left[\begin{array}{c} C \\ C \Phi \\ C \Phi^2 \\ \vdots \\ C \Phi^{n-1} \end{array} \right], \quad \text{rank } Q_o = n$$

Wariant z odrzucaniem próbek

Rozważmy wpieryw układ regulacji wykorzystujący bufory **BA** i **BS**, przedstawiony na rysunku III.51 (wariant z odrzucaniem próbek – z przesyłaniem pojedynczej próbki). Faktyczny, efektywny okres próbkowania w tym układzie wynosi MT . Na rysunku III.53 przedstawiono diagram pokazujący uzależnienia czasowe (kolejność akcji) w układzie regulacji, sposób przepływu sygnałów i kolejność obliczeń dla przypadku $M = 4$ i $\tau = T$. Podobny diagram można utworzyć dla dowolnego skończonego M ($M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$) oraz τ ($\tau = d \cdot T$, $d \in \mathbb{N}$). Kwadraty oznaczone literą **S** (dolna oś czasu) oznaczają akcje próbkowania podejmowane przez czujnik. Bloki oznaczone literami **BS**, **NS**, **NA** i **BA** reprezentują zadania realizowane przez bufory i sieci komunikacyjne. Kwadrat z literą **A** to akcja urządzenia wykonawczego, zaś większy kwadrat z literą **C** reprezentuje wykonanie algorytmu kompensatora. Algorytm ten przedstawiony jest na rysunku III.54.

Dla $M = 4$ i $\tau = T$ pojedynczy krok algorytmu kompensatora można opisać następująco (podane w opisie chwile czasu odnoszą się do instancji kompensatora oznaczonej na rysunku III.53 gwiazdką):

1. Na podstawie znajomości wartości estymaty stanu $\hat{x}[k-3]$ i wartości sterowania $u[k-3]$ z chwili czasu $k-3$, predyktor wyznacza estymatę stanu $\hat{x}[k]$. Wykorzystuje przy tym fakt, iż wartości sterowań $u[k-3]$, $u[k-2]$ i $u[k-1]$ są sobie równe.



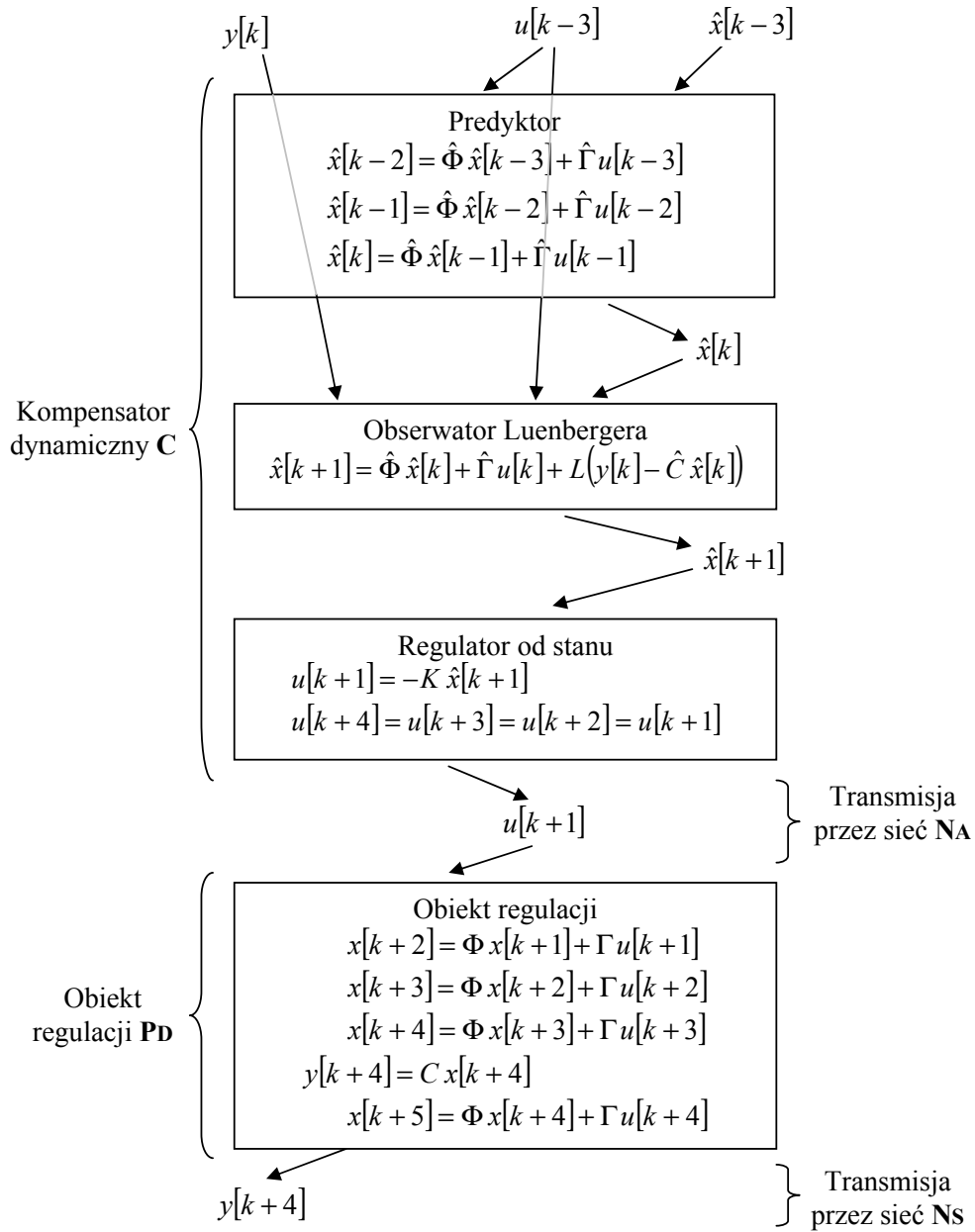
Rys. III.53: Diagram pokazujący zależności czasowe między akcjami poszczególnych elementów układu regulacji z odrzucaniem próbek dla przykładu $M = 4$ i $\tau = T$.

2. Na podstawie wyznaczonej estymaty $\hat{x}[k]$ oraz świeżo zmierzonej wartości $y[k]$, obserwator Luenbergera wyznacza estymatę stanu $\hat{x}[k+1]$. Wykorzystuje przy tym fakt, iż wartość sterowania $u[k]$ jest równa $u[k-3]$.
3. Regulator od stanu wylicza wartość sterowania $u[k+1]$. Jest to zarazem wartość sterowań $u[k+2]$, $u[k+3]$ i $u[k+4]$.

Podany wyżej algorytm może być zaadaptowany dla dowolnego skończonego $M \in \{2, 3, 4, \dots\}$ oraz dowolnego $\tau \in \{0, T, 2T, 3T, \dots\}$ będącego naturalną wielokrotnością okresu próbkowania T .

Wariant z grupowaniem próbek

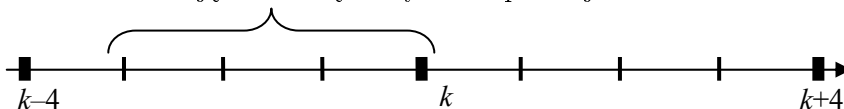
Układ regulacji z rejestrami przesuwными **SRS** i **SRA**, realizujący algorytm grupowania próbek, przedstawiony jest na rysunku III.52. W układzie tym, jak poprzednio, również można wykorzystać kompensator dynamiczny złożony z obserwatora Luenbergera, regulatora od stanu i predyktora. Tym razem dostępne są jednak wszystkie próbki sygnału wyjściowego y obiektu, zmierzone z okresem T oraz zachodzi konieczność wyznaczenia różnych (w ogólności) wartości sterowań dla każdego

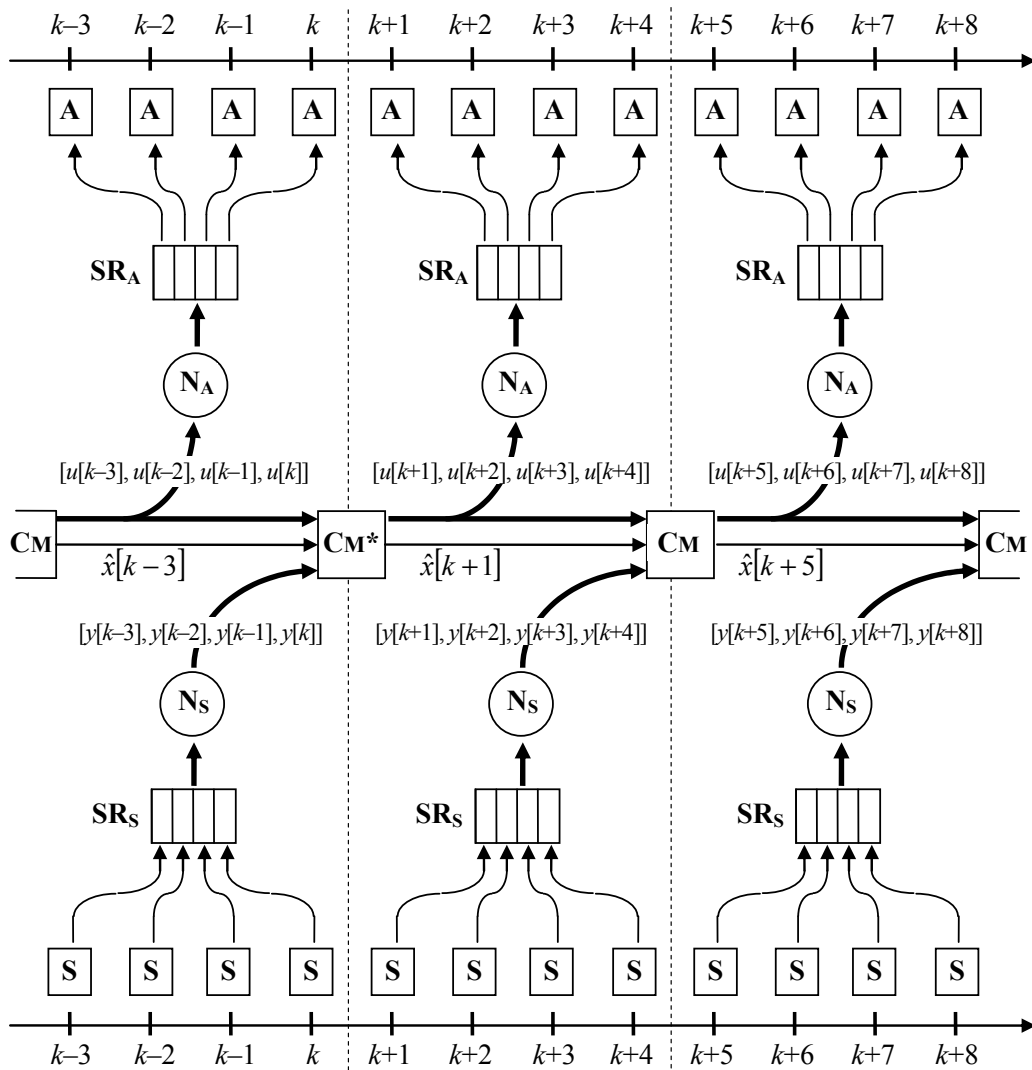


Rys. III.54: Schemat przedstawiający kolejność obliczeń prowadzonych w kompensatorze dynamicznym w układzie z odrzucaniem próbek dla przykładu $M = 4$ i $\tau = T$.

okresu o długości T . Rysunek III.55 przedstawia zależności czasowe w układzie regulacji, a rysunek III.56 – algorytm kompensatora właściwy dla tego przypadku. Dla $M = 4$ i $\tau = T$ algorytm ten można w uproszczeniu opisać następująco (podane w opisie chwile czasu odnoszą się do instancji kompensatora oznaczonej na rysunku III.55 gwiazdką):

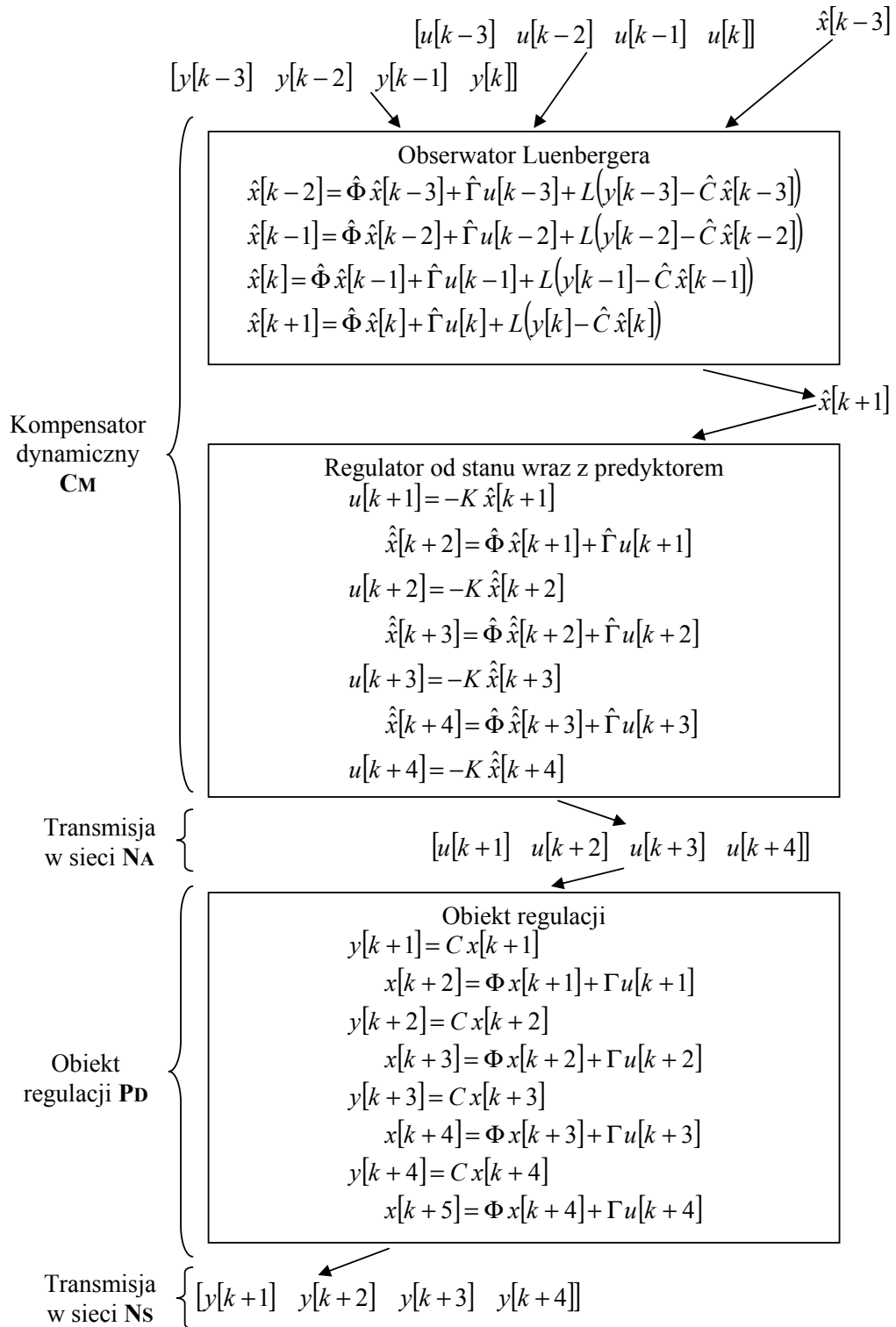
1. Rejestr **SRs** gromadzi próbki sygnału wyjściowego y obiektu **PC**, docierające z czujnika **S** z okresem T . Wektor (gdy obiekt ma $q = 1$ wyjście) lub macierz (dla $q > 1$) zebranych próbek to $[y[k-3] \ y[k-2] \ y[k-1] \ y[k]]$ (dla $M = 4$). Odpowiadające tym próbkom chwile czasu objęto klamrą na rysunku poniżej.





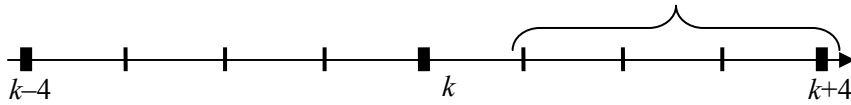
Rys. III.55: Diagram pokazujący zależności czasowe między akcjami poszczególnych elementów układu regulacji z grupowaniem próbek dla $M = 4$ i $\tau = T$.

2. W chwili czasu k następuje wysłanie zawartości rejestru **SRs** do kompensatora **CM** przez sieć **Ns**.
3. W ramach procedury złożonej z trzech etapów, obserwator Luenbergera wyznacza estymatę stanu $\hat{x}[k+1]$ na podstawie:
 - (a) świeżo otrzymanych próbek $[y[k-3] \ y[k-2] \ y[k-1] \ y[k]]$ sygnału wyjściowego y obiektu **PC**,
 - (b) zapamiętanych próbek $[u[k-3] \ u[k-2] \ u[k-1] \ u[k]]$ sygnału sterującego u , które wysłano poprzednio (w chwili czasu $k-4$) przez sieć **NA**,
 - (c) estymaty stanu $\hat{x}[k-3]$ z początku poprzedniego długiego okresu.
4. Regulator oblicza cztery wartości sterowania $[u[k-3] \ u[k-2] \ u[k-1] \ u[k]]$ na rozpoczynający się „długi” okres $4T$. Do tego konieczne mu są estymaty stanów w chwilach czasu od $k+1$ do $k+4$. Ponieważ znana jest jedynie estymata $\hat{x}[k+1]$, równoległe z regulatorem musi pracować estymator, który w trzech krokach wyznaczy estymaty $\hat{x}[k+2]$, $\hat{x}[k+3]$ i $\hat{x}[k+4]$.
5. Wektor przygotowanych sterowań jest wysyłany przez sieć **NA** do rejestru **SRA**, który przeka-



Rys. III.56: Schemat przedstawiający kolejność obliczeń prowadzonych w kompensatorze dynamicznym w układzie z grupowaniem próbek dla $M = 4$ i $\tau = T$.

zuje je kolejno, począwszy od chwili czasu $k + 1$, do urządzenia wykonawczego **A**. Na rysunku poniżej zaznaczono klamrą chwile czasu, w których stosowane są próbki sterowań z przesłanej paczki.



Wektor sterowań musi być ponadto zapamiętany w kompensatorze, ponieważ na początku kolejnego długiego okresu zostanie użyty przez obserwator do wyznaczenia estymaty.

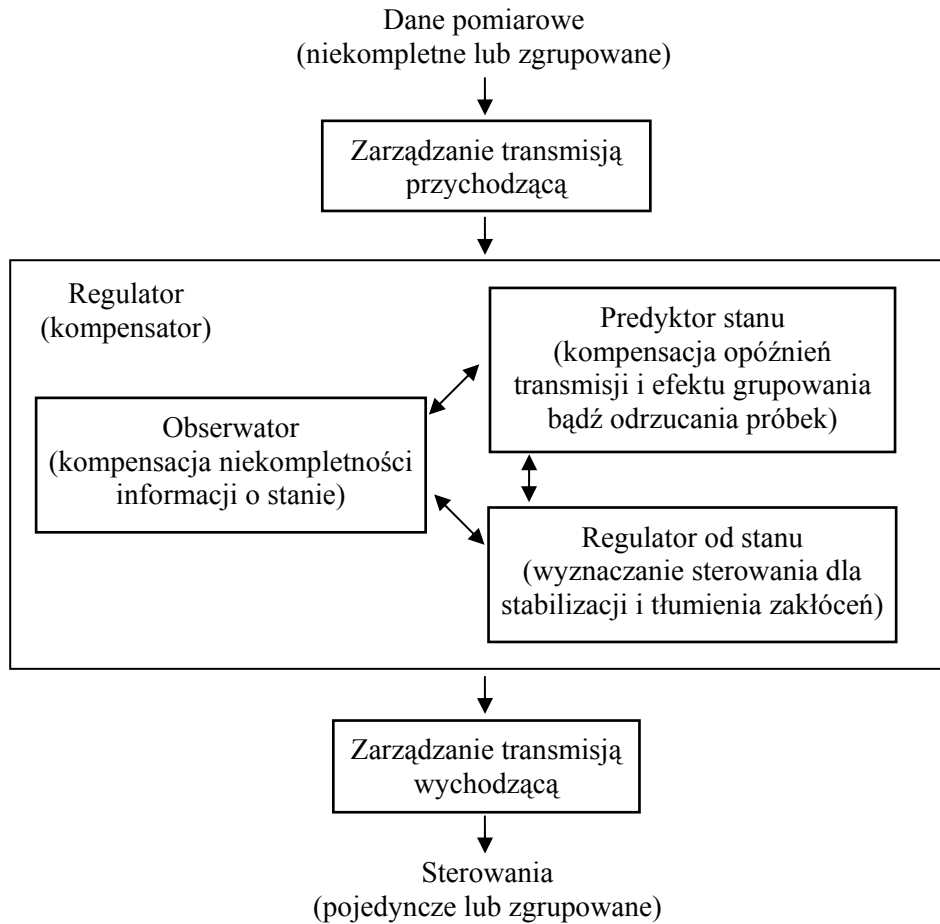
Podany wyżej algorytm może być zaadaptowany dla dowolnego skończonego $M \in \{2, 3, 4, \dots\}$ oraz dowolnego $\tau \in \{0, T, 2T, 3T, \dots\}$ będącego naturalną wielokrotnością okresu próbkowania T .

Zauważmy, że rejestry **SRs** i **SRA** pracują synchronicznie. W każdym „długim” okresie próbkowania MT pierwszy z nich przesyła kolejne wartości sterowań do urządzenia wykonawczego **A**, a w tym samym czasie drugi zbiera próbki sygnału wyjściowego obiektu z czujnika **S**. Obserwator Luenbergera na końcu każdego „długiego” okresu MT otrzymuje paczkę składającą się z M próbek sygnału wyjściowego y obiektu. Na podstawie paczki tych próbek, jak również paczki poprzednio wysłanych sterowań oraz estymaty stanu z początku poprzedniego „długiego” okresu, obserwator wyznacza estymatę stanu obowiązującą w rozpoczynającym się „długim” okresie. Odbywa się to w ramach M -krokowej procedury (rysunek III.56).

W przedstawionym opisie zastosowano dwa symbole oznaczające estymaty stanu: \hat{x} oraz $\hat{\hat{x}}$. Pierwszy symbol zarezerwowany jest dla estymat obliczanych w sposób rekurencyjny (wyniki z obecnego „długiego” kroku obliczeń będą wykorzystywane w następnym), z użyciem danych pomiarowych. Symbol $\hat{\hat{x}}$ odnosi się do pomocniczych prognoz stanu, których zastosowanie ogranicza się jedynie do wyznaczenia wartości sterowań. Estymaty $\hat{\hat{x}}$ w danym „długim” kroku nie zależą od $\hat{\hat{x}}$ z kroku poprzedzającego; są zamiast tego wyznaczane na podstawie \hat{x} . Przy obliczaniu $\hat{\hat{x}}$ nie są też brane pod uwagę dane pomiarowe z chwil czasu, którym odpowiadają te estymaty. Można powiedzieć, że \hat{x} to estymaty „zasadnicze”, śledzące historię zmian stanu systemu na podstawie pomiarów, zaś estymaty $\hat{\hat{x}}$ mają charakter pomocniczych prognoz, wykorzystywanych do obliczania sterowań na nadchodzący „długi” okres, wyznaczane od początku w każdym kroku.

Powyżej opisano działanie kompensatorów dynamicznych w układach z odrzucaniem lub grupowaniem próbek dla opóźnienia równego okresowi próbkowania T . Opisy zilustrowano rysunkami przedstawiającymi zależności czasowe w systemach i kolejne etapy działania algorytmów. Ogólną ideę działania przedstawionych metod podsumowuje schemat blokowy na rysunku III.57.

Macierze regulatora K oraz obserwatora L można wyznaczyć metodą przesuwania wartości własnych (lokowania biegunów) [86]. W ogólności, macierze te przyjmują inne wartości dla przypadku sterowania z odrzucaniem próbek, a inne dla ich grupowania. Ponieważ celem badań jest porównanie tych dwóch wariantów dopasowania częstotliwości, K i L dla obu przypadków należy wyznaczyć w ujednolicony sposób, gwarantujący porównywalność uzyskanych wyników. Wystarczy w tym celu zapewnić równość wartości własnych macierzy $(\hat{\Phi} - L_M \hat{C})^4$ i $(\hat{\Phi} - L_1 \hat{C}) \hat{\Phi}^3$ oraz macierzy $(\hat{\Phi} - \hat{\Gamma} K_M)^4$ i $\hat{\Phi}^4 - (\hat{\Phi}^3 + \hat{\Phi}^2 + \hat{\Phi} + I) \hat{\Gamma} K_1$ (wzory dla $M = 4$). Indeksy 1 i M odnoszą się odpowiednio do wariantów odrzucania próbek (przesyłania jednorazowo jednej próbki) oraz grupowania (przesyłania M -elementowej paczki). W dodatku D.3 objaśniono sposób wyprowadzenia



Rys. III.57: Budowa algorytmu sterującego i relacje między jego elementami.

podanych wyżej warunków. Zamieszczone tam obliczenia odpowiadają opóźnieniu równemu T , ale wnioski, jakie osiąga się powtarzając przedstawione rozumowanie dla pozostałych wartości rozważanych opóźnień (0 , MT , $(M + 1)T$), są analogiczne. Macierze K i L obliczone dla $\tau = T$ mogą być więc użyte również w pozostałych przypadkach.

III.2.1.4 Wyniki symulacji komputerowych

Jakość działania obu układów regulacji (z odrzucaniem i grupowaniem próbek) została zbadana na drodze symulacji komputerowych przeprowadzonych w programie obliczeń numerycznych MATLAB. Algorytmy sterowania zakodowano w języku MATLAB-a i zapisano w formie M-plików. Zbadano w sumie osiem wariantów układu regulacji – dla czterech różnych opóźnień (0 , T , MT , $(M + 1)T$) i dla dwóch sposobów przesyłu danych (odrzucanie i grupowanie). We wszystkich przypadkach przyjęto rozmiar paczki $M = 4$.

W praktyce najczęstszymi przyczynami pogorszenia jakości regulacji w układach sterowania są:

1. Niezgodności modelu użytego przy projektowaniu regulatora (kompensatora) z obiektem regulacji.
2. Zakłócenia oddziałujące na układ regulacji. Często ich wpływ można sprowadzić na wejście oraz wyjście układu.

Oba zjawiska uwzględniono podczas symulacji. Zakłócenia $v[k]$ i $w[k]$ w równaniach (III.53a)–

(III.53b) zamodelowano jako niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym o zerowej wartości średniej i wariancjach odpowiednio 0.01 i 0.1. Błąd modelu również był losowy. Każdy z elementów macierzy Φ , Γ i C został przemnożony przez czynnik $(1 + 0.01\delta)$, dając odpowiedni element $\hat{\Phi}$, $\hat{\Gamma}$ lub \hat{C} , gdzie wielkość δ była realizacją zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-0.5, 0.5]$. Zaburzenie każdego z elementów macierzy pozostawało losowo niezależne od pozostałych. Losowano również warunek początkowy – elementy wektora $x[0] = x(0)$ były realizacjami niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[-1/2, 1/2]$. Zbadano trzy różne obiekty SISO (o jednym wejściu i jednym wyjściu) drugiego rzędu z czasem dyskretnym: niestabilny (NS), stabilny lecz nieasymptotycznie (NAS) oraz asymptotycznie stabilny (AS). Otrzymano je przez dyskretyzację typu ZOH obiektów z czasem ciągłym opisanych równaniami stanu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

z trzema podanymi niżej zestawami macierzy A , B i C

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -4/5 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Przyjęty okres próbkowania wynosił $T = 0.5$. Jakość sterowania oceniono przy pomocy sześciu różnych wskaźników jakości

$$\begin{aligned}J_1 &= \sum_{k=0}^H y[k]^2, & J_3 &= \sum_{k=0}^H |y[k]|, & J_5 &= \max_{k \in \{1, 2, 3, \dots, H\}} |y[k]| \\ J_2 &= \sum_{k=0}^H u[k]^2, & J_4 &= \sum_{k=0}^H |u[k]|, & J_6 &= \max_{k \in \{1, 2, 3, \dots, H\}} |u[k]|\end{aligned}$$

gdzie H jest założonym horyzontem, równym 150. Macierze K i L dobrano metodą przesuwania wartości własnych – oddzielnie dla układów z odrzucaniem (K_1 , L_1) i z grupowaniem (K_M , L_M) próbek. Zadane wartości własne dla układu regulacji wynosiły $\{0.75, 0.8\}$, a dla obserwatora – $\{0.5, 0.55\}$. Symulacje dla każdego z przypadków przeprowadzono wielokrotnie ($N = 150$ razy). W każdej turze losowano warunek początkowy $x[0] = x(0)$ i przyjmowano inne losowe ciągi zakłóceń oraz odmienne, również losowe błędy modelu. Wartości wskaźników jakości uzyskane z N symulacji podlegały uśrednieniu. Rezultaty symulacji umieszczono w tabeli III.5. W każdej z komórek umieszczono stosunek dwóch uśrednionych wskaźników jakości – dla wersji z odrzucaniem (licznik) i grupowaniem (mianownik) próbek sygnałów. Ułatwia to porównanie jakości regulacji dla tych dwóch wersji algorytmu zarządzania transmisją, dla szeregu różnych przypadków zebranych w tabeli: w obecności zakłóceń lub wobec ich braku, z błędem modelu lub przy zgodności model-obiekt, dla czterech różnych opóźnień komunikacji i dla trzech różnych obiektów o odmiennych

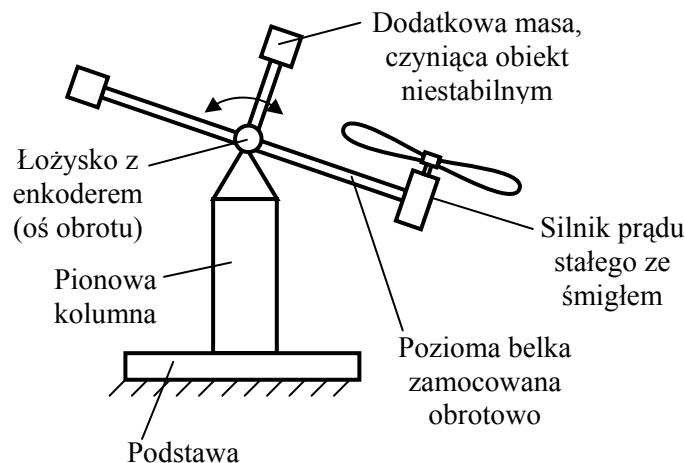
własnościach stabilności. W każdej komórce tabeli umieszczono sześć stosunków, odpowiadających kolejnym wskaźnikom jakości – od J_1 do J_6 .

W tabeli III.6 zaprezentowano wyniki innego testu numerycznego, w którym badano stabilność układów regulacji. W każdej komórce tabeli umieszczone są dwie liczby. Odpowiadają one liczbie wykrytych przypadków niestabilności, odpowiednio w układach z odrzucaniem i z grupowaniem próbek. Przyczyną utraty stabilności przez układ regulacji są błędy modelu, zmieniające się losowo w kolejnych symulacjach. Przeprowadzono sto symulacji, przy czym elementy macierzy Φ , Γ i C zaburzane były przez czynnik $(1 + 0.02\delta)$ – wielkość δ zdefiniowano nieco wyżej. W tym teście nie uwzględniano zakłóceń sygnałów.

Dane zebrane w obu tabelach wskazują, że układy z grupowaniem próbek są bardziej odporne na błędy modelu i zakłócenia niż układy z odrzucaniem próbek, a ponadto generalnie dają lepszą jakość regulacji. Przewaga ta widoczna jest zwłaszcza dla przypadku z zerowym opóźnieniem transmisji. Błędy modelu dużo łatwiej doprowadzają do niestabilności w układach z odrzucaniem próbek. Jakość regulacji w tych systemach jest zazwyczaj gorsza, zwłaszcza jeśli obiekt jest niestabilny. Natomiast w przypadku obiektów stabilnego i asymptotycznie stabilnego algorytm grupowania próbek nie wykazuje widocznej przewagi.

III.2.1.5 Wyniki doświadczeń laboratoryjnych

Obie opisane wyżej wersje algorytmu sterowania (z odrzucaniem i grupowaniem próbek) przetestowano eksperymentalnie dla przypadku $M = 4$ i $\tau = T$, wykorzystując w roli obiektu regulacji laboratoryjny model aerodynamiczny, schematycznie przedstawiony na rysunku III.58. Ruchomym



Rys. III.58: Laboratoryjny aerodynamiczny obiekt regulacji.

elementem obiektu jest ułożyskowana belka o jednym stopniu swobody, mogąca się obracać wokół poziomej osi. Na jednym z końców belki umocowany jest rewersyjny silnik prądu stałego ze śmigłem, będącym źródłem siły działającej na belkę i wywołującej jej ruch. Silnik jest elementem wykonawczym, którego pracą można sterować z zewnątrz urządzenia. Dodatkowa masa umieszczona na końcu ramienia przymocowanego prostopadłe do belki czyni punkt równowagi systemu niestabilnym. Punkt ten odpowiada mniej więcej poziomemu ułożeniu głównej belki. Położenie katowe belki jest mierzone optycznym enkoderem przyrostowym, umiejscowionym w pobliżu łożyska.

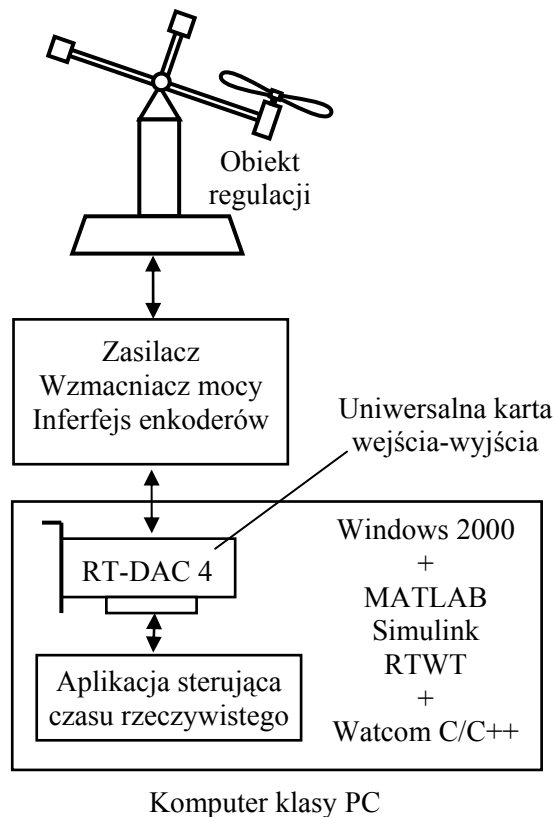
Tab. III.5: Porównanie jakości regulacji dla różnych obiektów w układach z odrzucaniem lub grupowaniem pakietów ($M = 4$).

Jakość regulacji											
obiekt niestabilny				obiekt stabilny nieasympot.				obiekt asymptotycznie stabilny			
Zakłócenia sygnału wejściowego i wyjściowego obiektu											
brak		obecne		brak		obecne		brak		obecne	
Model zgodny z obiektem											
tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie	tak	nie
Opóźnienia komunikacyjne równe 0											
17.2	20.8	17.2	20.7	1.73	1.73	1.73	1.73	0.984	0.984	0.984	0.984
11.9	12.3	11.9	12.3	1.03	1.03	1.03	1.03	0.078	0.078	0.078	0.078
4.3	6.01	4.2	5.74	1.4	1.4	1.39	1.39	0.974	0.974	0.978	0.978
4.02	4.5	3.96	4.28	0.994	0.994	1.01	1.01	0.277	0.277	0.288	0.288
4.04	4.04	4.04	4.04	1.16	1.16	1.17	1.17	1.000	1.000	1.000	1.000
2.12	2.12	2.12	2.12	0.814	0.815	0.814	0.815	0.228	0.228	0.228	0.228
Opóźnienia komunikacyjne równe T											
1.810	1.833	1.810	1.832	1.008	1.008	1.008	1.008	1.001	1.001	1.001	1.001
1.541	1.536	1.541	1.535	1.007	1.007	1.008	1.008	1.145	1.145	1.147	1.147
1.350	1.379	1.324	1.352	1.001	1.001	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002
1.453	1.456	1.449	1.447	1.005	1.005	1.029	1.029	1.072	1.072	1.113	1.113
1.346	1.346	1.346	1.346	1.008	1.008	1.008	1.008	1.000	1.000	1.000	1.000
0.726	0.726	0.726	0.726	0.761	0.761	0.761	0.761	0.817	0.817	0.817	0.817
Opóźnienia komunikacyjne równe MT											
1.734	1.847	1.734	1.846	1.006	1.006	1.006	1.006	1.000	1.000	1.000	1.000
1.553	1.546	1.552	1.544	1.007	1.008	1.008	1.008	1.152	1.152	1.154	1.154
1.321	1.445	1.300	1.425	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001
1.459	1.450	1.456	1.439	1.005	1.005	1.029	1.029	1.074	1.074	1.115	1.115
1.323	1.325	1.323	1.325	1.004	1.004	1.004	1.004	1.000	1.000	1.000	1.000
0.723	0.723	0.723	0.723	0.761	0.761	0.761	0.761	0.828	0.828	0.828	0.827
Opóźnienia komunikacyjne równe $(M + 1)T$											
1.720	2.009	1.720	2.008	1.005	1.005	1.005	1.005	1.000	1.000	1.000	1.000
1.555	1.552	1.554	1.549	1.007	1.008	1.008	1.008	1.154	1.154	1.156	1.156
1.315	1.537	1.295	1.523	1.001	1.000	1.001	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000
1.460	1.434	1.456	1.424	1.005	1.005	1.028	1.028	1.074	1.074	1.115	1.115
1.319	1.321	1.319	1.321	1.003	1.003	1.003	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000
0.723	0.722	0.722	0.722	0.761	0.761	0.761	0.761	0.832	0.831	0.832	0.831

Tab. III.6: Porównanie stabilności różnych układów regulacji z odrzucaniem lub grupowaniem pakietów ($M = 4$).

Liczba przypadków utraty stabilności dla stu symulacji		
obiekt niestabilny	obiekt stabilny nieasymptot.	obiekt asymptot. stabilny
Odrzucanie lub grupowanie próbek		
odrzucanie / grupowanie	odrzucanie / grupowanie	odrzucanie / grupowanie
Opóźnienia komunikacji równe 0		
20 / 0	0 / 0	0 / 0
Opóźnienia komunikacji równe T		
0 / 0	0 / 0	0 / 0
Opóźnienia komunikacji równe MT		
20 / 8	0 / 0	0 / 0
Opóźnienia komunikacji równe $(M + 1)T$		
34 / 26	0 / 0	0 / 0

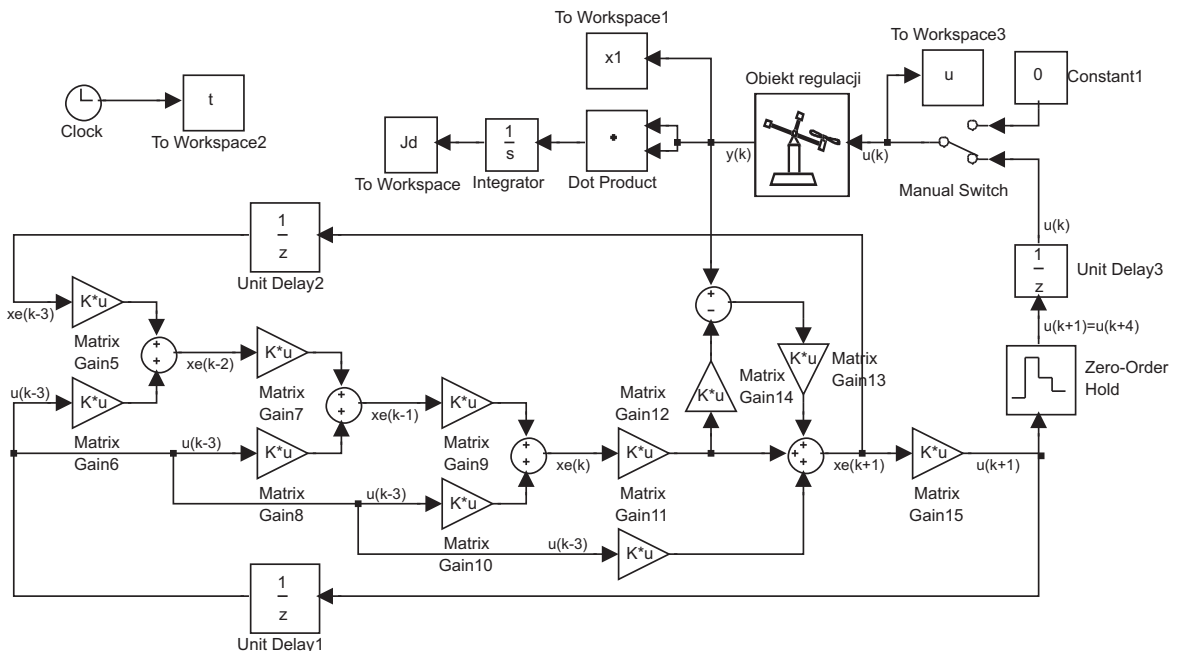
Obiekt jest połączony z komputerem klasy PC, wyposażonym w uniwersalną kartę wejścia-wyjścia RT-DAC 4 PCI [61] (rysunek III.59). Karta umożliwi wprowadzenie do komputera sygnału po-



Rys. III.59: Schemat blokowy stanowiska laboratoryjnego.

miarowego z enkodera oraz wysłanie z komputera sygnału sterującego dla silnika DC. Algorytmy sterujące implementowano w środowisku MATLAB/*Simulink*. Zakodowano je w postaci schematów graficznych w *Simulinku*, a następnie na podstawie tych schematów utworzono aplikacje czasu rze-

czywistego [48]. Wykorzystano w tym celu przybory *Real-Time Windows* i *Real-Time Windows Target* oraz zewnętrzny kompilator *Watcom C/C++*. W układzie nie była obecna sieć telekomunikacyjna – zamiast tego symulowano ją łącznie z algorytmem sterującym. Stworzono dwa odrębne modele w Simulinku – jeden dla przypadku odrzucania danych, drugi dla ich grupowania. Pierwszy z nich przedstawiony jest na rysunku III.60. Blok **Obiekt regulacji**, widoczny na schemacie, reprezentuje sterowniki wejścia-wyjścia, za pośrednictwem których aplikacja czasu rzeczywistego wymienia próbki sygnałów pomiarowych i sterujących z obiektem regulacji. Dolna część schematu odpowiada predyktorowi stanu (elementy skupione wokół trzech pierwszych węzłów sumacyjnych licząc od lewej), obserwatorowi Luenbergera (czwarty węzeł sumacyjny) i regulatorowi od stanu (blok **Matrix Gain15**). Blok **Unit Delay3** reprezentuje opóźnienie transmisji równe T , zaś **Zero-Order Hold** odpowiada buforowi **BA** z rysunku III.51 (strona 113), utrzymującemu stałą wartość sterowania przez M kolejnych okresów T . Dwa bloki **Unit Delay1** i **Unit Delay2** są częścią kompensatora dynamicznego i służą za podręczną pamięć estymaty stanu i sterowania z poprzedniego „długiego” kroku obliczeń MT .



Rys. III.60: Model aplikacji sterującej z odrzucaniem pakietów w Simulinku.

Obecnie przedstawiony będzie model matematyczny obiektu regulacji. Opisujące go równania stanu po linearyzacji mają postać [50]

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}(t) &= \omega(t) \\
 \dot{\omega}(t) &= a \alpha(t) + b \omega(t) + c \nu(t) \\
 \dot{\nu}(t) &= d \nu(t) + u(t)
 \end{aligned}
 \tag{III.56a}$$

lub inaczej, w zapisie wektorowo-macierzowym

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)
 \tag{III.57}$$

gdzie

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \omega(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zmienne występujące w równaniach stanu oznaczają odpowiednio:

α – kąt wychylenia ruchomej belki od położenia równowagi

ω – prędkość kątową belki

ν – przeskalowaną prędkość obrotową śmigła

u – znormalizowany sygnał sterujący

Normalizacja sygnału sterującego polega na podzieleniu jego wartości przez maksymalną możliwą wartość (przy której następuje nasycenie końcówki mocy). Przeskalowanie prędkości obrotowej śmigła polega na pomnożeniu jej przez tak dobrany współczynnik, by w równaniu (III.56a) współczynniki przy u i $\dot{\nu}$ były jednocześnie równe jedności. Parametry modelu, wyznaczone na drodze kilku eksperymentów identyfikacyjnych, mają następujące wartości

$$a = 3.6, \quad b = -0.31, \quad c = 4.4, \quad d = -1.8$$

W układzie zastosowano próbkowanie sygnałów z okresem $T = 0.1$ [s]. Sygnał wyjściowy obiektu jest równy pierwszej zmiennej stanu $y = x_1$. Po dyskretyzacji równań stanu z czasem ciągłym (III.57) otrzymuje się model matematyczny z czasem dyskretnym

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma u[k] \\ y[k] &= C x[k] \end{aligned}$$

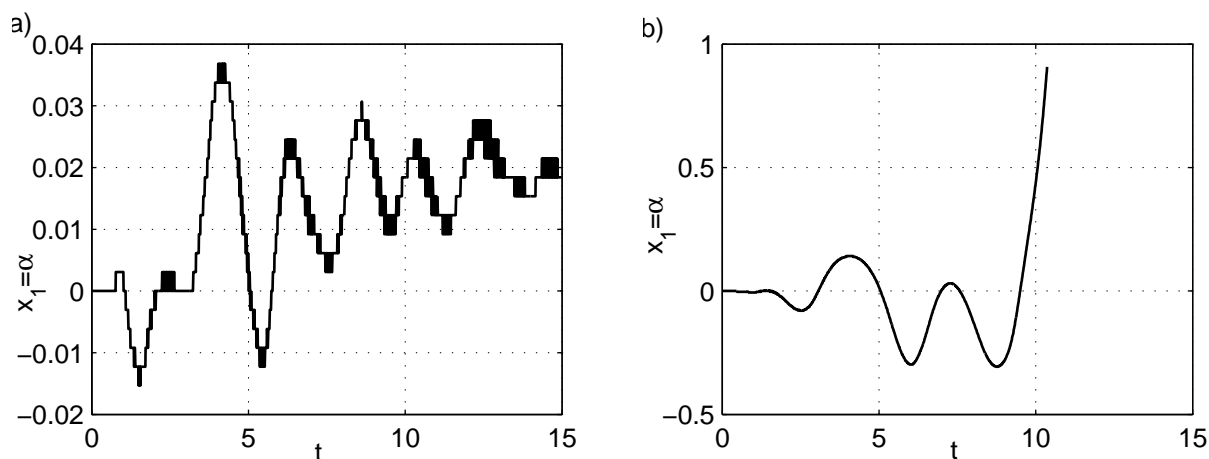
gdzie

$$\Phi = e^{TA}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{tA} B dt, \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

Macierze K_1 (dla przypadku odrzucania próbek) oraz K_M (dla grupowania próbek) regulatorów od stanu obliczono tak, by wszystkie trzy wartości własne macierzy stanu zamkniętego układu regulacji były równe 0.7. Macierze L_1 i L_M identycznościowych obserwatorów Lunebergera dobrano zakładając wszystkie trzy wartości własne macierzy występującej w równaniu błędu estymacji równe 0.6. Wyniki eksperymentów, w postaci przebiegów czasowych kąta α wychylenia belki, przedstawione są na rysunku III.61. Odpowiadają one przypadkowi z $M = 4$ i $\tau = T$. System z odrzucaniem próbek utracił stabilność (rysunek III.61b), zaś system z grupowaniem próbek zachował ją (rysunek III.61a). Warto zwrócić uwagę na różnicę skal pionowych osi na obu wykresach. Oscylacyjny charakter przebiegów sugeruje występowanie istotnych błędów użytego modelu bądź zewnętrznych zakłóceń. Jednym ze źródeł zakłóceń jest efekt kwantowania sygnału wynikający z użycia enkodera (rysunek III.61a), będący źródłem szumu kwantyzacji oddziałującego na układ sterowania.

III.2.1.6 Uwagi końcowe

Oba zaprezentowane wyżej algorytmy sterowania (z odrzucaniem i grupowaniem próbek) znajdują zastosowanie w przypadku systemów rozproszonych, w których maksymalna możliwa częstotliwość



Rys. III.61: Przebiegi czasowe sygnałów uzyskane podczas eksperymentu dla $M = 4$ i $\tau = T$: a) układ z odrzucaniem próbek, b) układ z grupowaniem próbek.

przesyłania pakietów przez sieć jest kilkukrotnie mniejsza od częstotliwości próbkowania przyjętej w układzie regulacji. Pierwszy z nich (prostszy) odrzuca część próbek i przez to ogranicza ilość informacji docierającej do kompensatora oraz zmniejsza możliwość wpływania na obiekt. Drugi jest bardziej złożony: zbiera próbki i przesyła je w postaci paczek. Dzięki temu informacja jest kompletna, choć częściowo opóźniona.

Zaprezentowane wyżej wyniki symulacji komputerowych wykazują, że w pewnych przypadkach algorytm grupowania zapewnia lepszą jakość regulacji i czyni układ bardziej odpornym na zakłócenia i błędy modelowania. Przewaga jest widoczna najwyraźniej w przypadku niestabilnego obiektu regulacji i istotnych błędów modelowania. W przypadku obiektów stabilnych i asymptotycznie stabilnych, przewaga jest bądź mniejsza, bądź nie występuje.

Zarówno grupowanie, jak i odrzucanie próbek zmniejszają zużycie zasobów sieci, ale także zmieniają charakter przesyłanej informacji (wprowadzają opóźnienia lub czynią informację niekompletną) [137, 138]. Stąd konieczne jest odpowiednie zmodyfikowanie algorytmu użytego w układzie kompensatora dynamicznego, polegające na wykorzystaniu predyktora stanu i obserwatora Luenbergera. Obserwator jest przydatny, jeśli próbki sygnału wyjściowego obiektu nie niosą pełnej informacji o stanie, zaś predyktor kompensuje brak danych pomiarowych w pewnych chwilach czasu. Zarówno estymator, jak i predyktor wymagają do swego działania znajomości modelu matematycznego obiektu.

Opisane wyżej symulacje i eksperymenty przeprowadzono dla $M = 4$. Przedstawione algorytmy można jednak uogólnić na przypadek dowolnego, skończonego rozmiaru M paczki danych. Wyżej rozważano cztery możliwe wartości opóźnień transmisji, ale algorytmy mogą być przystosowane dla dowolnego stałego i skończonego τ , będącego naturalną wielokrotnością okresu próbkowania T . Opisaną technikę można wykorzystać także dla przypadku ograniczonych opóźnień zmiennych w czasie lub nie stanowiących całkowitej wielokrotności T . Wówczas konieczne jest uzupełnienie układu regulacji o bufor sztucznie wydłużający opóźnienia do stałej wartości (podrozdział III.1.2.1). W praktycznych realizacjach należy dążyć do uzyskania jak najmniejszej wartości parametru M , który zależy od relacji między maksymalną częstotliwością przesyłań sieciowych F a przyjętą często-

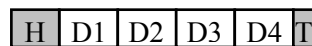
tliwością próbkowania f . Jeśli stosunek tych dwóch częstotliwości nie jest liczbą naturalną, można przyjąć $M = \lceil F/f \rceil$. Symbol $\lceil \cdot \rceil$ oznacza tu zaokrąglenie w górę.

Dotychczas wskazywano na użyteczność algorytmu grupowania próbek w przypadku ograniczenia maksymalnej częstotliwości przesłań sieciowych. Algorytm ten może być jednak wykorzystany również wówczas, gdy przesyłanie próbek pojedynczo jest niemożliwe ze względu na znaczny naddatek bajtów w pakiecie oraz ograniczoną przepustowość sieci telekomunikacyjnej. Załóżmy, że pojedyncza próbka z czujnika zajmuje 2 bajty (typowa wielkość dla wielu prostych czujników), zaś pozostałe dane tworzące pakiet sieciowy mają rozmiar 48 bajtów (na co składają się adresy nadawcy i odbiorcy, informacja o typie pakietu, suma kontrolna, preambuła itp.). Wysyłając cztery próbki w oddzielnych pakietach, zużywamy $4 \cdot (2 + 48) = 200$ bajtów. Stosując grupowanie próbek, ograniczamy wykorzystanie sieci do $48 + 4 \cdot 2 = 65$ bajtów – ponad trzykrotnie mniej (rysunek III.62).

Niezależna transmisja oddzielnych próbek.
Sumaryczny naddatek bajtów = $4 \times$ wielkość nagłówka + $4 \times$ wielkość stopki

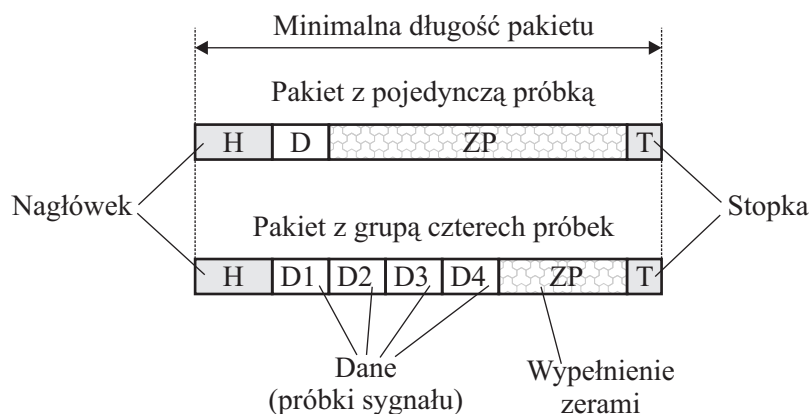


Jednoczesna transmisja grupy próbek.
Sumaryczny naddatek bajtów = $1 \times$ wielkość nagłówka + $1 \times$ wielkość stopki



Rys. III.62: Porównanie naddatku transmisji przy niezależnym i grupowym przesyłaniu próbek.

W przypadku niektórych sieci (Ethernet) istnieje ograniczenie na minimalną liczbę bajtów przesyłanych w pojedynczym pakiecie. Jeśli nawet nadawca próbuje wysłać mniejszą ich ilość, algorytmy sieciowe uzupełnią użyteczne dane dodatkowymi bajtami, by spełnić wymagania co do minimalnego rozmiaru pakietu (rysunek III.63). W przypadku takiej sieci może się okazać, że przesyłanie

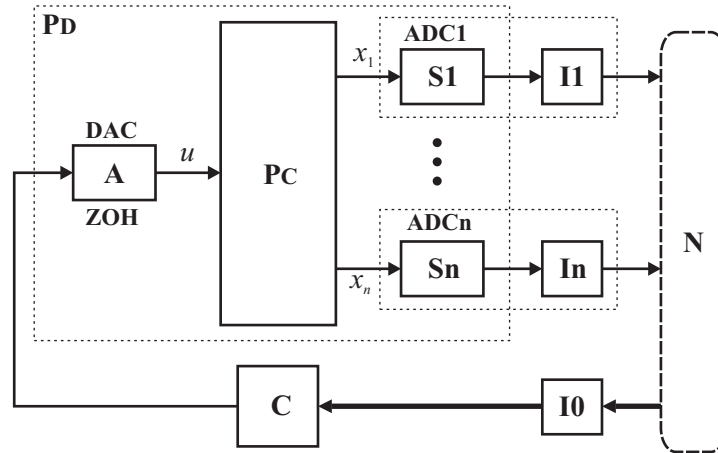


Rys. III.63: Odrzucanie i grupowanie próbek w sieciach z określonym minimalnym rozmiarem pakietu danych.

kilku próbek sygnału w pojedynczym pakiecie nie zwiększa jego rozmiaru w stosunku do przypadku przesyłania pojedynczej próbki, a tym samym nie ponosi się dodatkowych kosztów grupowego przesyłania próbek. Wynika stąd, że opłacalność zabiegu grupowania próbek winna być szacowana niezależnie dla każdego konkretnego przypadku, różniącego się rodzajem użytej sieci telekomunikacyjnej i protokołem transmisji.

III.2.2 Niejednoczesne próbkowanie sygnałów wyjściowych wielowymiarowego obiektu sterowania

Na rysunku III.64 przedstawiony jest rozproszony układ regulacji z wielowymiarowy obiektem sterowania **PC**. Każda spośród n ($n > 1$) zmiennych stanu obiektu (a jednocześnie jego sygnałów wyjściowych) mierzona jest przez niezależny czujnik, będący zarazem odrębnym węzłem we wspólnej sieci telekomunikacyjnej **N**. W układzie takim, w każdym okresie próbkowania o długości T ,

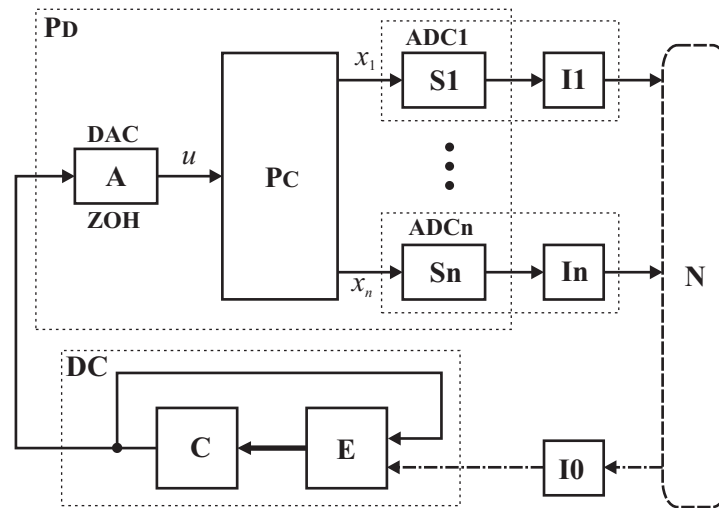


Rys. III.64: Rozproszony układ regulacji z obiektem typu SIMO (**A** – urządzenie wykonawcze (aktuator), **S1**, ..., **Sn** – czujniki (sensory), **I0**, **I1**, ..., **In** – sprzęgi (interfejsy) sieciowe, **N** – sieć telekomunikacyjna, **PC** – obiekt z czasem ciągłym, **Pd** – obiekt z czasem dyskretnym, **C** – regulator).

zachodzi konieczność przesłania przez sieć **N** dokładnie n pakietów niosących dane z czujników. Jeśli ograniczona przepustowość sieci nie pozwala na zrealizowanie wszystkich wymaganych przesłań, można zastosować rozwiązanie polegające na przesyłaniu w każdym kroku jedynie pewnego wybranego podzbioru sygnałów pomiarowych. W kolejnych krokach podzbiory te mogą się między sobą różnić. Brakujące dane muszą być w takim przypadku estymowane w kompensatorze dynamicznym **DC** w oparciu o model obiektu, na podstawie dostępnej informacji pomiarowej z aktualnego i z poprzednich kroków (rysunek III.65). W przypadku zastosowania opisanej procedury niejednoczesnego próbkowania wyjść obiektu, zachodzi konieczność doboru odpowiedniego harmonogramu próbkowania, decydującego, które wyjścia są próbkowane w poszczególnych krokach.

Rezygnacja z wybranych pomiarów może być środkiem umożliwiającym zachowanie niezmienniczej częstotliwości próbkowania w przypadku, gdy ograniczona przepustowość sieci nie pozwala na przesył kompletu danych. Zabieg ten można stosować również wtedy, gdy sieć dysponuje wprawdzie dostatecznymi zasobami do przesłania wszystkich danych, ale wiąże się to ze znacznym zwiększeniem wartości lub wahań opóźnień komunikacji, a w konsekwencji – z istotnym pogorszeniem jakości sterowania.

W dalszej części tego podrozdziału przedstawiono sposób wyznaczenia suboptymalnego harmonogramu niejednoczesnego próbkowania sygnałów wyjściowych dla przypadku obiektu SIMO drugiego rzędu, w którym pomiarowi podlegają obie zmienne stanu ($n = 2$, $y(t) = x(t) \in \mathbb{R}^2$). Rozważania można łatwo uogólnić na obiekt o wyższym rzędzie oraz o wielu wejściach. Rozwiązania poszukiwano

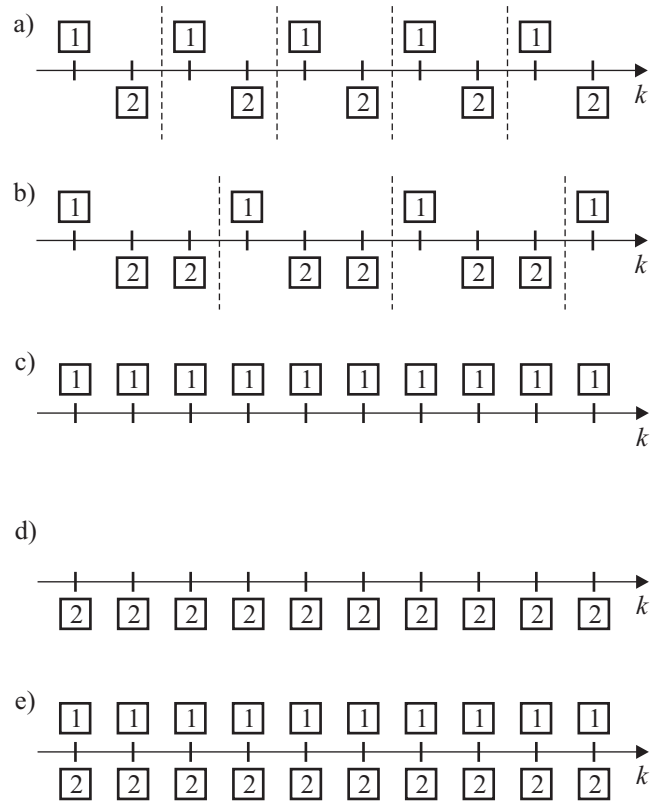


Rys. III.65: Rozproszony układ regulacji z estymacją stanów, które nie podlegają pomiarowi w danym kroku obliczeń (**E** – estymator stanu, **DC** – kompensator dynamiczny, **DAC** – przetwornik cyfrowo-analogowy, **ADC1**, **ADCn** – przetworniki analogowo-cyfrowe).

w klasie harmonogramów okresowych, o okresie nie dłuższym od zadanego parametru. Założono, że w każdym kroku próbkowana jest dokładnie jedna współrzędna stanu. Dla każdego z rozpatrywanych harmonogramów wyznaczono, na drodze obliczeń numerycznych, regulator suboptymalny, który minimalizował stochastyczny, wariancyjny wskaźnik jakości. Porównując suboptymalne wartości wskaźników dla poszczególnych harmonogramów, wybrano najlepszy z nich. Każdemu ze schematów próbkowania odpowiadała inna suboptymalna wartość macierzy wzmocnień użytego regulatora proporcjonalnego. Sposób jej wyznaczania opisany jest w dalszej części opracowania.

III.2.2.1 Harmonogramy próbkowania

Przyjmijmy, że opóźnienia transmisji wnoszone przez sieć przesyłu danych są pomijalnie małe oraz że pakiety dostarczane są niezawodnie (nie są gubione). Załóżmy, że ze względu na ograniczoną przepustowość sieci, w jednym okresie próbkowania T możliwe jest przesłanie wyniku pomiaru jedynie jednego sygnału wyjściowego obiektu. Jeden z harmonogramów próbkowania, który można wówczas zastosować, polega na cyklicznym pobieraniu danych z obu czujników na przemian. Jest on okresowy, a jego okres podstawowy, wyrażony w jednostkach równych T , wynosi 2 (sekwencja próbkowania powtarza się co dwa odcinki T). Odpowiadający mu sposób próbkowania przedstawiono schematycznie na rysunku III.66a. Harmonogram ten będziemy dalej nazywać *naprzemiennym*. Przykład innego harmonogramu, również okresowego, pokazany jest na rysunku III.66b. Jego okres wynosi 3. Tutaj w ramach pojedynczej sekwencji próbkowania jeden z sygnałów jest mierzony dwukrotnie częściej od drugiego. Harmonogram tego typu będziemy dalej nazywamy *nietrywialnym*. Należy tu jeszcze wspomnieć o dwóch harmonogramach okresowych, o okresie równym 1, polegających na próbkowaniu we wszystkich chwilach czasu wyłącznie jednego (pierwszego albo drugiego) wyjścia obiektu. Dalej nazywać je będziemy *wyłącznymi* (rysunek III.66c i d). Wreszcie na rysunku III.66e przedstawiono harmonogram odpowiadający przypadkowi, gdy w każdym kroku próbkowania dokonywany jest pomiar wszystkich sygnałów wyjściowych. Będzie on wykorzystywany dalej jako przypadek porównawczy (albo odniesienia), zapewniający (umownie) najwyższą możliwą do osiągnięcia jakość



Rys. III.66: Różne sposoby próbkowania wyjść obiektu: a) harmonogram naprzemienny, b) harmonogram nietrywialny, c), d) harmonogramy wyłączne, e) harmonogram jednoczesny.

regulacji. Nazwiemy go *jednoczesnym*.

Poniżej pokazano, jak dla każdego z harmonogramów próbkowania estymować w kompensatorze dynamicznym brakujące dane oraz jak dobrać regulator suboptymalny w sensie pewnego stochastycznego wskaźnika jakości. Porównując wartości wskaźników jakości, otrzymane dla poszczególnych harmonogramów, można wybrać najlepszy z nich, gwarantujący najwyższą jakość regulacji. Poszukiwania takie prowadzono w klasie harmonogramów okresowych (do której należą wszystkie opisane wyżej warianty), z pominięciem jednoczesnego, o okresie nie większym od zadanej liczby kroków.

III.2.2.2 Obiekt regulacji

Liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy obiekt regulacji SIMO drugiego rzędu z czasem ciągłym \mathbf{PC} opisany jest równaniami stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(k) \tag{III.59a}$$

$$y(t) = x(t) \tag{III.59b}$$

gdzie

$$t \in [0, \infty), \quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

Sygnal wyjściowy $y(t)$ rozpatrywanego obiektu jest równy jego stanowi $x(t)$. Po uzupełnieniu elementu \mathbf{PC} o pracujące synchronicznie urządzenia próbkujące oraz ekstrapolator zerowego rzędu

(rysunek III.65), otrzymuje się obiekt z czasem dyskretnym \mathbf{PD} , opisany równaniami stanu

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi x[k] + \Gamma u[k] + v[k] \\ y[k] &= x[k] \end{aligned} \quad (\text{III.60a})$$

gdzie

$$k \in \mathbb{N}, \quad x[k], y[k], v[k] \in \mathbb{R}^2, \quad u[k] \in \mathbb{R}, \quad \Phi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

W tym przypadku $x[k]$ oraz $u[k]$ oznaczają wartości sygnałów $x(t)$ i $u(t)$ w dyskretnych chwilach czasu $t_k = kT$, w których zachodzą próbkowania oraz akcje ekstrapolatora ZOH

$$x[k] = x(kT), \quad u(t) = u[k] \quad \text{dla } t \in [kT, (k+1)T)$$

zaś macierze Φ i Γ zależą od A i B według formuły (III.3). W równaniu (III.60a) dodatkowo uwzględniono oddziałujące na układ wektorowe zakłócenia stochastyczne $v[k]$. Zakładać będziemy, że mają one zerową wartość oczekiwaną, w różnych chwilach czasu są losowo niezależne od siebie, zaś ich macierz kowariancji nie zależy od czasu i wynosi V

$$\mathbb{E}\{v[k]\} = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.61a})$$

$$\mathbb{E}\{v[i] v[j]^T\} = \begin{cases} V & i = j \\ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j \in \mathbb{N} \quad (\text{III.61b})$$

$$V^T = V \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad V = \text{const}, \quad V > 0$$

Obiekt \mathbf{PD} drugiego rzędu ($n = 2$), na który oddziałują zakłócenia v , ma jedno wejście ($p = 1$) oraz dwa wyjścia ($q = 2$), niosące wprost pełną informację o jego stanie ($y = x$).

III.2.2.3 Wskaźnik jakości

Do oceny jakości regulacji wykorzystamy wskaźnik jakości będący sumą ważoną o dodatnich wagach (dodatnią kombinacją liniową) granicznych wartości wariancji poszczególnych zmiennych stanu x_1 i x_2 . Rozpatrywane będzie zadanie stabilizacji stanu obiektu w zerowym punkcie równowagi. Jeśli założyć, że dla $k \rightarrow \infty$ wartości oczekiwane elementów $x_i[k]$ wektora stanu $x[k]$ zbieżają do zera (dla $i \in \{1, 2\}$), wskaźnik jakości można zapisać następująco

$$\tilde{J}(\cdot) = \sum_{i=1}^2 p_i \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{x_i[k]^2\}, \quad p_i > 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (\text{III.62})$$

gdzie symbol $\mathbb{E}\{\cdot\}$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej. Wartość powyższego wskaźnika jest określona (istnieje), o ile istnieją właściwe granice obu wartości oczekiwanych pod znakiem sumy. Dla harmonogramów o okresie m większym od 1, ciąg $\mathbb{E}\{x_i[k]^2\}$ nie jest zazwyczaj zbieżny, jednak wciąż istnieć mogą granice podciągów, do których weźmie się co m -ty wyraz ciągu oryginalnego.

$$\forall d \in \{0, 1, 2, \dots, (m-1)\} \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{x_i[mj+d]^2\}$$

Wobec tego, w miejsce (III.62), przyjmiemy nową definicję wskaźnika jakości, jako średnią arytmetyczną wyrażeń podobnych do (III.62), zapisanych dla wszystkich, poszczególnych zbieżnych

podciągów

$$J(\cdot) = \frac{1}{m} \sum_{d=0}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^2 p_i \lim_{j \rightarrow \infty} E \{x_i[mj + d]^2\} \right) \quad (\text{III.63})$$

gdzie m jest okresem podstawowym, z jakim powtarzają się granice podciągów macierzy kowariancji (okresem podstawowym harmonogramu próbkowania).

III.2.2.4 Regulator i estymator stanu

Gdyby w każdym kroku próbkowania mierzone były obie współrzędne stanu obiektu, do sterowania nim można by wykorzystać proporcjonalny, macierzowy regulator od stanu $u[k] = -Kx[k]$, gdzie $K \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. Ponieważ jednak istnieją ograniczenia na dostępność pomiarów stanu w poszczególnych chwilach próbkowania, konieczne jest użycie w zastępstwie jego estymaty

$$u[k] = -K \hat{x}[k] \quad (\text{III.64})$$

Estymatę tę (zwaną dalej *zasadniczą*), można wyznaczać przy pomocy procedury składającej się z dwóch kroków: predykcji i korekcji [6, 7, 85]. W pierwszym z nich (predykcja) obliczana jest *pomocnicza* estymata stanu $\hat{\hat{x}}[k]$, na podstawie znajomości estymaty $\hat{x}[k-1]$ i sterowania $u[k-1]$ z poprzedniego kroku oraz w oparciu o znany model (III.60a) obiektu (po pominięciu nieznanymi zakłóceń $v[k]$)

$$\hat{\hat{x}}[k] = \Phi \hat{x}[k-1] + \Gamma u[k-1] \quad (\text{III.65})$$

W drugim kroku (korekcyjnym) wektor zasadniczej estymaty $\hat{x}[k]$ zestawiany jest ze zmierzonego elementu wektora $x[k]$ oraz estymowanego elementu wektora $\hat{\hat{x}}[k]$. Pierwszeństwo ma zmierzona wartość $x_i[k]$, jako zgodniejsza z rzeczywistością. Estymatę $\hat{\hat{x}}_j[k]$ stosuje się tylko dla tego elementu wektora $\hat{x}[k]$, który nie podlegał pomiarowi i transmisji w danym okresie próbkowania. Opisaną wyżej procedurę konstruowania zasadniczej estymaty $\hat{x}[k]$ można zapisać wzorem

$$\hat{x}[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\hat{x}}[k] \quad (\text{III.66a})$$

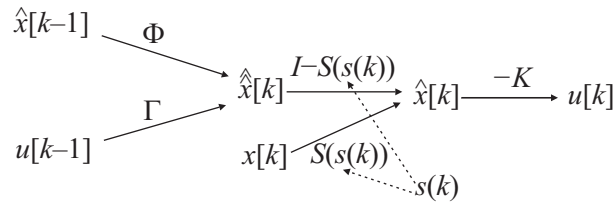
jeśli mierzony był pierwszy sygnał wyjściowy obiektu lub formułą

$$\hat{x}[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x[k] + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\hat{x}}[k] \quad (\text{III.66b})$$

jeśli w danym okresie próbkowania pomiarowi podlegało drugie wyjście. Pierwsza macierz w powyższych wzorach „pobiera” z wektora $x[k]$ element zmierzony, zaś druga „dokłada” brakujący z pomocniczej estymaty $\hat{\hat{x}}[k]$. Estymata $\hat{\hat{x}}[k]$ stanowi przybliżenie stanu $x[k]$, wyznaczone w oparciu o dane zmierzone do chwili czasu o numerze $k-1$ włącznie, zaś $\hat{x}[k]$ uwzględnia również pomiar z k -tej chwili czasu, co można zapisać następująco

$$\hat{\hat{x}}[k] = \hat{x}[k | k-1], \quad \hat{x}[k] = \hat{x}[k | k]$$

Wzór (III.64) regulatora \mathbf{C} oraz formuły (III.65) i (III.66a)–(III.66b) estymatora \mathbf{E} opisują akcje podejmowane w pojedynczym kroku próbkowania przez kompensator dynamiczny \mathbf{DC} , przedstawiony na rysunku III.65. Kolejność tych obliczeń pokazano schematycznie diagramem na rysunku III.67. Wzory (III.66a)–(III.66b) można zapisać w zwartej formie jako



Rys. III.67: Schematyczne przedstawienie kolejności obliczeń przeprowadzanych w kompensatorze.

$$\hat{x}[k] = S(s(k))x[k] + (I - S(s(k)))\hat{x}[k] \quad (\text{III.67})$$

gdzie symbole $S(\cdot)$ oraz $I - S(\cdot)$ oznaczają macierze (a ściślej – funkcje o wartościach macierzowych) występujące w prawych stronach równań (III.66a) i (III.66b). Z kolei wartość $s(k)$ ciągu $s(\cdot)$, będąca argumentem funkcji $S(\cdot)$, to numer elementu wektora stanu, który podlega pomiarowi w k -tej chwili czasu

$$S: \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{III.68})$$

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2\} \quad (\text{III.69})$$

Macierz $S(i)$ dla $i \in \{1, 2\}$ posiada dokładnie jeden niezerowy element – jedynekę na i -tej pozycji na przekątnej głównej

$$S(1) = S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(2) = S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przy pomocy tak zdefiniowanej macierzy (funkcji) $S(\cdot)$ można opisać harmonogramy: naprzemienny, nietrywialny oraz wyłączny. By w jednolity sposób potraktować również harmonogram jednoczesny, rozszerzymy następująco definicję $S(\cdot)$

$$S(3) = S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Liczba 3 reprezentuje tu jednoczesny pomiar obu wyjść 1 i 2. Konsekwentnie, wzory (III.68) i (III.69) należy zastąpić przez

$$S: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$s: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

Interpretacja wartości przyjmowanych przez ciąg $s(\cdot)$ jest następująca

$$s(k) = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } k\text{-tym kroku mierzony jest pierwszy element wektora stanu} \\ 2, & \text{gdy w } k\text{-tym kroku mierzony jest drugi element wektora stanu} \\ 3, & \text{gdy w } k\text{-tym kroku mierzone są oba elementy wektora stanu} \end{cases}$$

Ciągi $(s(k))_{k=0}^{\infty}$, odpowiadające harmonogramom okresowym, również posiadają własność okresowości. Oznaczmy okres podstawowy ciągu s przez m . Kilka przykładowych ciągów, odpowiadających

harmonogramom zilustrowanym na rysunku III.66, podano poniżej

$$\begin{aligned}
 \text{naprzemienny: } (s(k))|_{k=0}^{\infty} &= (\underline{1}, \underline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \underline{1}, \underline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \dots), \quad m = 2 \\
 \text{nietrywalny: } (s(k))|_{k=0}^{\infty} &= (\underline{1}, \underline{2}, \underline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots), \quad m = 3 \\
 \text{wyłączny: } (s(k))|_{k=0}^{\infty} &= (\underline{1}, \overline{1}, \underline{1}, \overline{1}, \dots), \quad m = 1 \\
 \text{wyłączny: } (s(k))|_{k=0}^{\infty} &= (\underline{2}, \overline{2}, \underline{2}, \overline{2}, \dots), \quad m = 1 \\
 \text{jednoczesny: } (s(k))|_{k=0}^{\infty} &= (\underline{3}, \overline{3}, \underline{3}, \overline{3}, \dots), \quad m = 1
 \end{aligned}$$

Naprzemiennymi górnymi i dolnymi pod- i nadkresleniami elementów ciągów oznaczono występujące w nich powtarzające się okresowo sekwencje.

III.2.2.5 Rozszerzone równanie stanu

Obecnie przejdziemy do wyznaczenia zastępczego opisu całego układu regulacji (złożonego z obiektu **PD** i kompensatora **DC**) przy pomocy wspólnego równania stanu, które przybierze postać

$$\bar{x}[k+1] = \bar{\Phi}(s(k)) \bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(s(k)) v[k] \quad (\text{III.71})$$

Równanie to jest (w ogólności) niestacjonarne, bowiem macierze $\bar{\Phi}(\cdot)$ i $\bar{\Gamma}(\cdot)$ zależą od wyrazów ciągu $s(k)$. Symbol $\bar{x}[k]$ oznacza rozszerzony wektor stanu

$$\bar{x}[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ \tilde{x}[k] \end{bmatrix} \quad (\text{III.72})$$

złożony ze stanu $x[k]$ obiektu **PD** (równanie stanu (III.60a)) oraz odchyłki $\tilde{x}[k]$. Ta ostatnia jest równa różnicy między pomocniczą estymatą stanu $\hat{x}[k]$ a stanem $x[k]$ (porównaj z dowodem stabilności obserwatora Luenbergera w pracy [86])

$$\tilde{x}[k] = \hat{x}[k] - x[k] \quad (\text{III.73})$$

Dalsze rozważania podzielone są na dwa etapy: w pierwszym z nich wyprowadzona jest zależność $\tilde{x}[k+1]$ od $x[k]$, $\tilde{x}[k]$ i $v[k]$, w drugim – zależność $x[k+1]$ od tych samych wielkości. Wyniki obu etapów posłużą do skonstruowania równania stanu (III.71) i wyznaczenia macierzy $\bar{\Phi}(\cdot)$ i $\bar{\Gamma}(\cdot)$.

Rozpoczynając pierwszy etap, zapiszemy równanie (III.73) dla chwili czasu o numerze $k+1$

$$\tilde{x}[k+1] = \hat{x}[k+1] - x[k+1]$$

Wstawiając do niego wzory (III.65) (z argumentem przesuniętym o jeden) oraz (III.60a), otrzymuje się

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi \hat{x}[k] + \Gamma u[k] - \Phi x[k] - \Gamma u[k] - v[k]$$

i dalej

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi \hat{x}[k] - \Phi x[k] - v[k]$$

Wynikiem wstawienia w powyższym za $\hat{x}[k]$ prawej strony (III.67) jest równanie

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi S(s(k)) x[k] + \Phi (I - S(s(k))) \hat{x}[k] - \Phi x[k] - v[k]$$

które można przekształcić następująco

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi (S(s(k)) - I) x[k] + \Phi (I - S(s(k))) \hat{x}[k] - v[k]$$

Z powyższego otrzymuje się wzór

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi (I - S(s(k))) (\hat{x}[k] - x[k]) - v[k]$$

który wobec (III.73) przyjmuje ostatecznie formę

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi (I - S(s(k))) \tilde{x}[k] - v[k] \quad (\text{III.74})$$

opisującą, jak $\tilde{x}[k+1]$ zależy od $\tilde{x}[k]$ i $v[k]$.

W drugim etapie obliczeń wyjdziemy od równania stanu obiektu (III.60a), które wobec formuły regulatora (III.64), przyjmuje postać

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K \hat{x}[k] + v[k]$$

a następnie, po zastąpieniu estymaty $\hat{x}[k]$ prawą stroną (III.67), otrzymuje formę

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K S(s(k)) x[k] - \Gamma K (I - S(s(k))) \hat{x}[k] + v[k] \quad (\text{III.75})$$

Z równania (III.73) wynika wzór

$$\hat{x}[k] = \tilde{x}[k] + x[k]$$

Z jego pomocą równanie (III.75) przekształca się do postaci

$$x[k+1] = \Phi x[k] - \Gamma K S(s(k)) x[k] - \Gamma K (I - S(s(k))) \tilde{x}[k] - \Gamma K x[k] + \\ + \Gamma K S(s(k)) x[k] + v[k]$$

Po uproszczeniach i zgrupowaniu wyrazów dostaje się formułę

$$x[k+1] = (\Phi - \Gamma K) x[k] + \Gamma K (S(s(k)) - I) \tilde{x}[k] + v[k] \quad (\text{III.76})$$

opisującą zależność $x[k+1]$ od $x[k]$, $\tilde{x}[k]$ oraz $v[k]$.

Na podstawie wzorów (III.74) i (III.76) można skonstruować podane niżej równanie stanu

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ \tilde{x}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S(s(k)) - I) \\ 0 & \Phi (I - S(s(k))) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ \tilde{x}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} v[k]$$

odpowiadające schematowi (III.71). Występująca w nim macierz stanu $\bar{\Phi}(\cdot)$ może przyjmować następujące wartości

$$\bar{\Phi}(1) = \bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_1 - I) \\ 0 & \Phi (I - S_1) \end{bmatrix} \quad (\text{III.77a})$$

$$\bar{\Phi}(2) = \bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_2 - I) \\ 0 & \Phi (I - S_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.77b})$$

$$\bar{\Phi}(3) = \bar{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_3 - I) \\ 0 & \Phi (I - S_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.77c})$$

zaś macierz wejścia $\bar{\Gamma}(\cdot)$ pozostaje stała

$$\bar{\Gamma}(1) = \bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}(2) = \bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}(3) = \bar{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \quad (\text{III.78})$$

III.2.2.6 Modele matematyczne układu regulacji dla różnych harmonogramów próbkowania

W kolejnych czterech podrozdziałach rozważać będziemy wymienione wcześniej okresowe harmonogramy próbkowania (jednoczesny, wyłączny, naprzemienny, nietrywialny). Dla każdego z nich określimy warunek stabilności układu regulacji oraz wyprowadzimy formułę pozwalającą wyznaczyć wartość wskaźnika jakości.

Harmonogram jednoczesny

Stabilność układu regulacji

W przypadku harmonogramu jednoczesnego ciąg $s(\cdot)$ jest ciągiem stałym

$$s(k) = 3, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Jego okres podstawowy to $m = 1$. Rozszerzone równanie stanu (III.71) jest w takim przypadku stacjonarne

$$\bar{x}[k+1] = \bar{\Phi}(3)\bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(3)v[k], \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.79})$$

Zgodnie z twierdzeniem III.1, przy braku zakłóceń v , warunek jego asymptotycznej stabilności jest następujący

$$\lambda(\bar{\Phi}(3)) \subset \mathbb{C}^\circ$$

Macierz $\bar{\Phi}(3)$ (III.77c) ma postać blokowo-diagonalną. Stąd wynika, że zbiór jej wartości własnych jest sumą mnogościową widm poszczególnych bloków. Wartości własne bloku zerowego są wszystkie równe zeru i spełniają tym samym warunek należenia do \mathbb{C}° . Wobec tego warunkiem koniecznym i dostatecznym asymptotycznej stabilności układu jest inkluzja

$$\lambda(\bar{\Phi} - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\circ$$

Wynik nie jest zaskakujący – przy próbkowaniu jednoczesnym estymacja stanu praktycznie nie jest prowadzona, a steruje się w oparciu o pełny pomiar stanu obiektu.

Wskaźnik jakości

Dla harmonogramu jednoczesnego równanie (III.79), zapisane w rozwiniętej formie, przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ \tilde{x}[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k] \\ \tilde{x}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} v[k]$$

z której wynikają następujące dwie formuły

$$\begin{aligned} x[k+1] &= (\Phi - \Gamma K) x[k] + v[k] \\ \tilde{x}[k+1] &= -v[k] \end{aligned} \quad (\text{III.80a})$$

Obłóżmy pierwsze z powyższych równań operatorem wartości oczekiwanej $E\{\cdot\}$. Korzystając z własności liniowości tej operacji otrzymamy

$$E\{x[k+1]\} = (\Phi - \Gamma K) E\{x[k]\} + E\{v[k]\}$$

Powyższy wzór, wobec założonej zerowej wartości oczekiwanej zakłóceń $v[k]$ (porównaj (III.61a)), przyjmuje postać

$$E\{x[k+1]\} = (\Phi - \Gamma K) E\{x[k]\}$$

Z powyższego wynika, że jeśli układ regulacji jest asymptotycznie stabilny (macierz $\Phi - \Gamma K$ jest macierzą Schurowską), to wartość oczekiwana stanu zmierza z czasem do zera

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{x[k]\} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n$$

Z kolei równania (III.80a) oraz (III.61a) implikują zerowanie się wartości oczekiwanej $\tilde{x}[k]$ dla $k > 1$

$$E\{\tilde{x}[k]\} = E\{-v[k-1]\} = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad k > 1$$

zaś na podstawie (III.80a) oraz (III.61b) łatwo wyznaczyć macierz kowariancji odchyłki $\tilde{x}[k]$

$$E\{\tilde{x}[k] \tilde{x}[k]^T\} = E\{v[k-1] v[k-1]^T\} = V \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Obecnie przejdziemy do wyznaczenia wartości wskaźnika jakości J , który dla $m = 1$ wyraża się wzorem (porównaj (III.63))

$$J(\cdot) = p_1 \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_1(k)^2\} + p_2 \lim_{k \rightarrow \infty} E\{x_2(k)^2\}$$

Korzystając z macierzy kowariancji $E\{x[k] x[k]^T\}$ wektora $x[k]$, wzór ten można zapisać następująco

$$J(\cdot) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} E \left\{ \begin{bmatrix} x_1(k)^2 & \bullet \\ \bullet & x_2(k)^2 \end{bmatrix} \right\} \right) \quad (\text{III.81})$$

lub w skrócie

$$J(\cdot) = \text{tr} \left(P \lim_{k \rightarrow \infty} E \{x[k] x[k]^T\} \right) \quad (\text{III.82})$$

gdzie tr oznacza operację obliczania śladu macierzy, zaś P to macierz diagonalna z wagami p_i na przekątnej głównej

$$P = \text{diag}(p_1, p_2) \quad (\text{III.83})$$

Znak \bullet we wzorze (III.81) umieszczono w miejscu elementów macierzy, których wartość nie jest istotna dla dalszych obliczeń. Wyznamy macierz kowariancji $E\{x[k+1] x[k+1]^T\}$, korzystając z równania stanu (III.60a)

$$E\{x[k+1] x[k+1]^T\} = E\{[(\Phi - \Gamma K) x[k] + v[k]] [(\Phi - \Gamma K) x[k] + v[k]]^T\}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} E\{x[k+1] x[k+1]^T\} &= (\Phi - \Gamma K) E\{x[k] x[k]^T\} (\Phi - \Gamma K)^T + E\{v[k] v[k]^T\} + \\ &\quad - (\Phi - \Gamma K) E\{x[k] v[k]^T\} - E\{v[k] x[k]^T\} (\Phi - \Gamma K)^T \end{aligned} \quad (\text{III.84})$$

Dwa spośród składników są zerowe

$$E \{x[k] v[k]^T\} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad E \{v[k] x[k]^T\} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bowiem $x[k]$ i $v[k]$ są losowo niezależne, a stąd wynika ich nieskorelowanie (zerowanie się ich kowariancji). Wprowadzając dodatkowo oznaczenie

$$X(k) = E \{x[k] x[k]^T\}, \quad X(k) = X(k)^T \quad (\text{III.85})$$

i wykorzystując równość (III.61b), równanie (III.84) można zapisać jako

$$X(k+1) = (\Phi - \Gamma K) X(k) (\Phi - \Gamma K)^T + V$$

Stosując przejście graniczne $k \rightarrow \infty$ oraz wykorzystując notację

$$X(\infty) = X_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} X(k) \quad (\text{III.86})$$

otrzymuje się (zamieniając dodatkowo kolejność elementów) równanie

$$(\Phi - \Gamma K) X(\infty) (\Phi - \Gamma K)^T - X(\infty) = -V$$

Ma ono postać równania Lapunowa (w wersji dla systemów z czasem dyskretnym). Jego rozwiązanie $X(\infty)$ pozwala wyznaczyć wartość wskaźnika jakości regulacji, który zgodnie z (III.82) i (III.86) wyraża się wzorem

$$J(\cdot) = \text{tr} \left(P \lim_{k \rightarrow \infty} X(k) \right) = \text{tr} (P X(\infty)) \quad (\text{III.87})$$

i który jest funkcją nastaw regulatora K

$$J(\cdot) = J(K) = J(k_1, k_2)$$

Minimum wskaźnika jakości można poszukiwać, przyrównując do zera jego gradient względem K . W ten sposób otrzymuje się układ dwóch równań

$$\frac{\partial J(k_1, k_2)}{\partial k_1} = 0, \quad \frac{\partial J(k_1, k_2)}{\partial k_2} = 0$$

Dodatkowo sprawdzić należy dodatnią określoność hesjanu

$$\left[\frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_i \partial k_j} \right]_{2 \times 2} > \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Według kryterium Sylwestera [9, 66, 67], warunkiem koniecznym i dostatecznym dla niej jest spełnienie układu nierówności

$$\frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_1^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_1^2} \cdot \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_2^2} - \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} \cdot \frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_2 \partial k_1} > 0$$

Harmonogram wyłączny – próbkowanie wyłącznie r -tej zmiennej stanu

Stabilność układu regulacji

Załóżmy, że w układzie regulacji próbkowana jest wyłącznie jedna, r -ta zmienna stanu ($r = 1$ albo $r = 2$). Wówczas

$$s(k) = r = \text{const}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.89})$$

a równanie (III.71) staje się stacjonarne. Warunkiem asymptotycznej stabilności układu z rozważanym harmonogramem, przy braku zakłóceń v , jest zawieranie się widma macierzy $\bar{\Phi}(r)$ ((III.77a) dla $r = 1$ lub (III.77b) dla $r = 2$) w zbiorze \mathbb{C}° . Ponieważ ma ona strukturę bokowo-trójkątną, warunek ten jest równoważny koniunkcji dwóch inkluzji

$$\lambda(\Phi - \Gamma K) \subset \mathbb{C}^\circ \quad \wedge \quad \lambda(\Phi(I - S_r)) \subset \mathbb{C}^\circ$$

Wskaźnik jakości

Wyznamy wartość macierzy kowariancji $\mathbb{E}\{\bar{x}[k+1]\bar{x}[k+1]^T\}$ rozszerzonego wektora stanu $\bar{x}[k+1]$, wykorzystując równanie stanu (III.71) z macierzami $\bar{\Phi}(r)$ ((III.77a) albo (III.77b)) oraz $\bar{\Gamma}(r)$ (III.78) i uwzględniając (III.89)

$$\mathbb{E}\{\bar{x}[k+1]\bar{x}[k+1]^T\} = \mathbb{E}\left\{\left[\bar{\Phi}(r)\bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(r)v[k]\right]\left[\bar{\Phi}(r)\bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(r)v[k]\right]^T\right\}$$

Na mocy liniowości operacji $\mathbb{E}\{\cdot\}$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\bar{x}[k+1]\bar{x}[k+1]^T\} &= \bar{\Phi}(r)\mathbb{E}\{\bar{x}[k]\bar{x}[k]^T\}\bar{\Phi}(r)^T + \bar{\Gamma}(r)\mathbb{E}\{v[k]\bar{x}[k]^T\}\bar{\Phi}(r)^T + \\ &+ \bar{\Phi}(r)\mathbb{E}\{\bar{x}[k]v[k]^T\}\bar{\Gamma}(r)^T + \bar{\Gamma}(r)\mathbb{E}\{v[k]v[k]^T\}\bar{\Gamma}(r)^T \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

Wiedząc że

$$\mathbb{E}\{v[k]\bar{x}[k]^T\} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbb{E}\{\bar{x}[k]v[k]^T\} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathbb{E}\{v[k]v[k]^T\} = V$$

z równania (III.90) otrzymujemy

$$\mathbb{E}\{\bar{x}[k+1]\bar{x}[k+1]^T\} = \bar{\Phi}(r)\mathbb{E}\{\bar{x}[k]\bar{x}[k]^T\}\bar{\Phi}(r)^T + \bar{\Gamma}(r)\mathbb{E}\{v[k]v[k]^T\}\bar{\Gamma}(r)^T$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{X}(k) = \mathbb{E}\{\bar{x}[k]\bar{x}[k]^T\} \quad (\text{III.91})$$

powyższe można zapisać jako

$$\bar{\Phi}(r)\bar{X}(k)\bar{\Phi}(r)^T - \bar{X}(k+1) = -\bar{\Gamma}(r)V\bar{\Gamma}(r)^T$$

Po przejściu z k w granicy do nieskończoności otrzymuje się równanie Lapunowa

$$\bar{\Phi}(r)\bar{X}(\infty)\bar{\Phi}(r)^T - \bar{X}(\infty) = -\bar{\Gamma}(r)V\bar{\Gamma}(r)^T \quad (\text{III.92})$$

gdzie $\bar{X}(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{X}(k)$. Z definicji $\bar{X}(k)$ oraz z (III.72) wynika równość

$$\begin{aligned} \bar{X}(k) &= \mathbb{E} \{ \bar{x}[k] \bar{x}[k]^T \} = \mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} x[k] \\ \tilde{x}[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[k]^T & \tilde{x}[k]^T \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{E} \{ x[k] x[k]^T \} & \mathbb{E} \{ x[k] \tilde{x}[k]^T \} \\ \mathbb{E} \{ \tilde{x}[k] x[k]^T \} & \mathbb{E} \{ \tilde{x}[k] \tilde{x}[k]^T \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(k) & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gdzie symbol \bullet oznacza bloki macierzowe o wartościach nieistotnych dla obecnych rozważań. Skonstruujemy macierz \bar{P} w następujący sposób (macierz wag P określona jest wzorem (III.83))

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zachodzi równość

$$\bar{P} \bar{X}(\infty) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(\infty) & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P X(\infty) & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z której wynika

$$\text{tr}(\bar{P} \bar{X}) = \text{tr}(P X) + \text{tr}(0_{2 \times 2}) = \text{tr}(P X)$$

gdzie $0_{2 \times 2}$ oznacza macierz zerową o rozmiarze 2 na 2. Stąd wskaźnik jakości (III.63) dla $m = 1$ można wyrazić jako (porównaj (III.87))

$$J(\cdot) = \text{tr}(P X(\infty)) = \text{tr}(\bar{P} \bar{X}(\infty)) \quad (\text{III.93})$$

gdzie $\bar{X}(\infty)$ jest rozwiązaniem równania (III.92). Jak poprzednio, minimum wskaźnika szuka się przyrównując do zera jego gradient oraz sprawdzając określoność hesjanu. Warunki te zapisuje się następująco

$$\begin{aligned} \nabla_K J(K) &= \text{grad}_K J(K) = \frac{\partial J(K)}{\partial K} = \left[\frac{\partial J(k_1, k_2)}{\partial k_j} \right]_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \\ \nabla_K^2 J(K) &= \text{H}_K J(K) = \left[\frac{\partial^2 J(k_1, k_2)}{\partial k_i \partial k_j} \right]_{2 \times 2} > \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

Harmonogram naprzemienny

Stabilność układu regulacji

Rozpatrzmy harmonogram naprzemienny o okresie $m = 2$, w którym ciąg $s(\cdot)$ określony jest następująco

$$s(k) = \begin{cases} 1, & \text{dla } k \text{ parzystych} \\ 2, & \text{dla } k \text{ nieparzystych} \end{cases}, \quad \{s(k)\}_{k=0}^{\infty} = (\underline{1}, \underline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \underline{1}, \underline{2}, \dots) \quad (\text{III.95})$$

Dla takiego harmonogramu system (III.71) jest niestacjonarny, ale ma okresową macierz stanu $\bar{\Phi}(s(k))$. Zgodnie z twierdzeniem III.2, przy braku zakłóceń v , warunek asymptotycznej stabilności systemu (III.71) jest następujący

$$\lambda(\bar{\Phi}(2) \bar{\Phi}(1)) \subset \mathbb{C}^\circ$$

Wskaźnik jakości

Dla rozważanych wyżej harmonogramów (jednoczesnego i wyłącznego) o okresie $m = 1$ istniały granice przy $k \rightarrow \infty$ ciągu $X(k)$ macierzy kowariancji wektora $x[k]$ (wielkość $X(k)$ zdefiniowano wzorem (III.85) na stronie 140). W przypadku rozpatrywanego obecnie harmonogramu o okresie $m = 2$ granica taka istnieć nie musi. Można natomiast wykazać, że dla asymptotycznie stabilnego układu regulacji istnieją granice podciągów wziętych odpowiednio dla parzystych i nieparzystych argumentów k . Wprowadźmy wobec tego następujące dwa oznaczenia

$$J_0(\cdot) = \text{tr} \left(P \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} \text{E} \{x[k] x[k]^T\} \right] \right) = \text{tr} \left(P \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} X(k) \right] \right) = \\ = \text{tr} \left(\bar{P} \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} \bar{X}(k) \right] \right) \quad (\text{III.96a})$$

$$J_1(\cdot) = \text{tr} \left(P \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=1}} \text{E} \{x[k] x[k]^T\} \right] \right) = \text{tr} \left(P \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} X(k+1) \right] \right) = \\ = \text{tr} \left(\bar{P} \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} \bar{X}(k+1) \right] \right) \quad (\text{III.96b})$$

wzorowane na formule (III.93). Zgodnie ze wzorem (III.63), wskaźnik jakości jest średnią arytmetyczną $J_0(\cdot)$ i $J_1(\cdot)$

$$J(\cdot) = \frac{1}{2} (J_0(\cdot) + J_1(\cdot)) \quad (\text{III.97})$$

Użyty we wzorach (III.96a) i (III.96b) zapis $k \bmod m$ oznacza (dla liczb naturalnych k i m) resztę z dzielenia k przez m . By obliczyć wartość wskaźnika jakości, należy poznać wartości dwóch granic $\lim_{k \rightarrow \infty} X(k)$, odpowiednio dla k parzystych oraz nieparzystych. W praktyce wystarczy wyznaczyć jedną z tych granic (na przykład dla parzystych k), bowiem druga (dla k nieparzystych) związana jest z nią prostym wzorem. Poniżej wyprowadzimy kolejno zależność między granicami dla k parzystych i nieparzystych oraz pokażemy, jak wyznaczyć jedną z nich (dla parzystych k).

Dalsze obliczenia przeprowadzimy przy założeniu, że zmienna k przyjmuje wyłącznie wartości parzyste ($k \bmod 2 = 0$). Wstawiając do równania (III.91) prawą stronę wzoru (III.71), otrzymuje się

$$\bar{X}(k) = \text{E} \left\{ [\bar{\Phi}(1) \bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(1) v[k]] [\bar{\Phi}(1) \bar{x}[k] + \bar{\Gamma}(1) v[k]]^T \right\}, \quad k|2 \quad (\text{III.98})$$

gdzie zapis $k|2$ oznacza cechę podzielności k przez 2. Argument funkcji $\bar{\Phi}(\cdot)$ i $\bar{\Gamma}(\cdot)$ wynosi jeden, co wynika z (III.95) oraz założenia o parzystości k . Na mocy liniowości operacji $\text{E}\{\cdot\}$, z (III.98) otrzymujemy równanie

$$\bar{X}(k+1) = \text{E} \{ \bar{\Phi}(1) \bar{x}[k] \bar{x}[k]^T \bar{\Phi}(1)^T + \bar{\Phi}(1) \bar{x}[k] v[k]^T \bar{\Gamma}(1)^T + \\ + \bar{\Gamma}(1) v[k] \bar{x}[k]^T \bar{\Phi}(1)^T + \bar{\Gamma}(1) v[k] v[k]^T \bar{\Gamma}(1)^T \}$$

które wobec zależności

$$\text{E} \{ \bar{x}[k] v[k]^T \} = 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \text{E} \{ v[k] \bar{x}[k]^T \} = 0, \quad \text{E} \{ v[k] v[k]^T \} = V$$

upraszcza się do postaci

$$\bar{X}(k+1) = \bar{\Phi}(1) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(1)^T + \bar{\Gamma}(1) V \bar{\Gamma}(1)^T, \quad k|2 \quad (\text{III.99})$$

Po przejściu z k w granicy do ∞ dla $k|2$ otrzymuje się

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} \bar{X}(k+1) = \bar{\Phi}(1) \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2=0}} \bar{X}(k) \right] \bar{\Phi}(1)^T + \bar{\Gamma}(1) V \bar{\Gamma}(1)^T \quad (\text{III.100})$$

Powyższy wzór pozwala wyznaczyć granicę $\bar{X}(k)$ przy $k \rightarrow \infty$ dla nieparzystych k , gdy znana jest wartość granicy dla k parzystych. Dalej pokażemy, jak znaleźć tę ostatnią. Jak poprzednio zakładając będziemy, że k jest podzielne przez $m = 2$. Wyznamy zależność pomiędzy rozszerzonym wektorem stanu $\bar{x}[\cdot]$ w dwóch kolejnych parzystych chwilach czasu: k oraz $k+2$. Stosując dwukrotnie równanie stanu (III.71) dla dwóch sąsiednich chwil czasu k i $k+1$, uwzględniając (III.95), dostajemy

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \bar{\Phi}(1) x[k] + \bar{\Gamma}(1) v[k], & k|2 \\ x[k+2] &= \bar{\Phi}(2) x[k+1] + \bar{\Gamma}(2) v[k+1], & k|2 \end{aligned}$$

Z powyższych formuł wynika wzór

$$\bar{x}[k+2] = \bar{\Phi}(2) \bar{\Phi}(1) \bar{x}[k] + \bar{\Phi}(2) \bar{\Gamma}(1) v[k] + \bar{\Gamma}(2) v[k+1], \quad k|2 \quad (\text{III.102})$$

w którym występują macierze $\bar{\Phi}(\cdot)$ i $\bar{\Gamma}(\cdot)$ z argumentem zarówno 1 jak i 2. Zapiszmy go w postaci

$$\bar{x}(k+2) = \bar{\bar{\Phi}}(1,2) \bar{x}[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_1(1,2) v[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_2(1,2) v[k+1], \quad k|2 \quad (\text{III.103})$$

gdzie

$$\bar{\bar{\Phi}}(1,2) = \bar{\Phi}(2) \bar{\Phi}(1), \quad \bar{\bar{\Gamma}}_1(1,2) = \bar{\Phi}(2) \bar{\Gamma}(1), \quad \bar{\bar{\Gamma}}_2(1,2) = \bar{\Gamma}(2)$$

Na podstawie powyższego oraz (III.77a), (III.77b) i (III.78) mamy

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Phi}}(1,2) &= \bar{\Phi}(2) \bar{\Phi}(1) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_2 - I) \\ \hline 0 & \Phi (I - S_2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_1 - I) \\ \hline 0 & \Phi (I - S_1) \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (\Phi - \Gamma K)^2 & (\Phi - \Gamma K) \Gamma K (S_1 - I) + \Gamma K (S_2 - I) \Phi (I - S_1) \\ \hline 0 & \Phi (I - S_2) \Phi (I - S_1) \end{array} \right] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Gamma}}_1(1,2) &= \bar{\Phi}(2) \bar{\Gamma}(1) = \left[\begin{array}{c|c} \Phi - \Gamma K & \Gamma K (S_2 - I) \\ \hline 0 & \Phi (I - S_2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I \\ -I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \Phi - \Gamma K S_2 & \\ \hline \Phi (S_2 - I) & \end{array} \right] \\ \bar{\bar{\Gamma}}_2(1,2) &= \bar{\Gamma}(2) = \left[\begin{array}{c} I \\ -I \end{array} \right] \end{aligned}$$

Korzystając z definicji (III.91) oraz równania (III.103), wyznaczymy wartość $\bar{X}(k+2)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ \bar{x}(k+2) \bar{x}(k+2)^T \} &= \mathbb{E} \left\{ \left[\bar{\bar{\Phi}}(1,2) \bar{x}[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_1(1,2) v[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_2(1,2) v[k+1] \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\bar{\bar{\Phi}}(1,2) \bar{x}[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_1(1,2) v[k] + \bar{\bar{\Gamma}}_2(1,2) v[k+1] \right]^T \right\}, \quad k|2 \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\bar{X}(k+2) = & \bar{\Phi}(1,2) \mathbb{E} \{ \bar{x}[k] \bar{x}[k]^T \} \bar{\Phi}(1,2)^T + \bar{\Phi}(1,2) \mathbb{E} \{ \bar{x}[k] v[k]^T \} \bar{\Gamma}_1(1,2)^T + \\
& + \bar{\Phi}(1,2) \mathbb{E} \{ \bar{x}[k] v[k+1]^T \} \bar{\Gamma}_2(1,2)^T + \bar{\Gamma}_1(1,2) \mathbb{E} \{ v[k] \bar{x}[k]^T \} \bar{\Phi}(1,2)^T + \\
& + \bar{\Gamma}_1(1,2) \mathbb{E} \{ v[k] v[k]^T \} \bar{\Gamma}_1(1,2)^T + \bar{\Gamma}_1(1,2) \mathbb{E} \{ v[k] v[k+1]^T \} \bar{\Gamma}_2(1,2)^T + \\
& + \bar{\Gamma}_2(1,2) \mathbb{E} \{ v[k+1] \bar{x}[k]^T \} \bar{\Phi}(1,2)^T + \bar{\Gamma}_2(1,2) \mathbb{E} \{ v[k+1] v[k]^T \} \bar{\Gamma}_1(1,2)^T + \\
& + \bar{\Gamma}_2(1,2) \mathbb{E} \{ v[k+1] v[k+1]^T \} \bar{\Gamma}_2(1,2)^T, \quad k|2
\end{aligned} \tag{III.105}$$

Z losowej niezależności zakłóceń $v[k]$ w kolejnych chwilach czasu oraz z założenia (III.61b) na stronie 133 wynikają równości

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \{ \bar{x}[k] v[k]^T \} &= 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} & \mathbb{E} \{ v[k] v[k+1]^T \} &= 0 \\
\mathbb{E} \{ \bar{x}[k] v[k+1]^T \} &= 0 & \mathbb{E} \{ v[k+1] \bar{x}[k]^T \} &= 0 \\
\mathbb{E} \{ v[k] \bar{x}[k]^T \} &= 0 & \mathbb{E} \{ v[k+1] v[k]^T \} &= 0 \\
\mathbb{E} \{ v[k] v[k]^T \} &= V & \mathbb{E} \{ v[k+1] v[k+1]^T \} &= V
\end{aligned}$$

Po ich uwzględnieniu oraz zastosowaniu definicji (III.91), równanie (III.105) upraszcza się do postaci

$$\bar{X}(k+2) = \bar{\Phi}(1,2) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(1,2)^T + \bar{\Gamma}_1(1,2) V \bar{\Gamma}_1(1,2)^T + \bar{\Gamma}_2(1,2) V \bar{\Gamma}_2(1,2)^T, \quad k|2 \tag{III.106}$$

Wprowadźmy następujący symbol

$$\bar{X}(\infty) = \bar{X}_\infty = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod 2 = 0}} \bar{X}(k)$$

na oznaczenie granicy podciągu $\bar{X}(k)$ dla parzystych k . Stosując tę notację oraz przechodząc w równaniu (III.106) z k w granicy do ∞ , otrzymujemy formułę

$$\bar{\Phi}(1,2) \bar{X}(\infty) \bar{\Phi}(1,2)^T - \bar{X}(\infty) = - \left(\bar{\Gamma}_1(1,2) V \bar{\Gamma}_1(1,2)^T + \bar{\Gamma}_2(1,2) V \bar{\Gamma}_2(1,2)^T \right)$$

mającą postać równania Lapunowa. W wyniku rozwiązania tego równania otrzymuje się granicę $\bar{X}(\infty)$ podciągu $\bar{X}(k)$ dla k parzystych. Wstawiając uzyskany wynik do wzoru (III.100), dostajemy granicę dla k nieparzystych. Znajomość obu tych granic pozwala wyznaczyć wartość wskaźnika jakości $J(\cdot)$, na podstawie podanych niżej, nieco przekształconych wzorów (III.96a), (III.96b) i (III.97)

$$J_0(\cdot) = \text{tr} \left(\bar{P} \bar{X}(\infty) \right) \tag{III.107a}$$

$$J_1(\cdot) = \text{tr} \left(\bar{P} \left(\bar{\Phi}(1) \bar{X}(\infty) \bar{\Phi}(1)^T + \bar{\Gamma}(1) V \bar{\Gamma}(1)^T \right) \right) \tag{III.107b}$$

$$J(\cdot) = \frac{1}{2} (J_0(\cdot) + J_1(\cdot)) \tag{III.107c}$$

Harmonogram nietrywialny

Opisany wyżej przypadek harmonogramu naprzemiennego można uogólnić na dowolny harmonogram okresowy o okresie podstawowym $m \geq 2$. Nieskończony ciąg $(s(k))|_{k=0}^\infty$ (określający numery wyjść obiektu próbkowanych w kolejnych chwilach czasu k) jest okresowy, więc może być w jednoznaczny sposób scharakteryzowany przez skończony ciąg $(\sigma(k))|_{k=1}^m$, składający się z m jego początkowych elementów

$$\sigma: \{1, 2, 3, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \tag{III.108}$$

$$s(k) = \sigma(1 + (k \bmod m)) = \sigma(1 + (k \text{ rem } m)) \tag{III.109}$$

Tutaj operatory mod bądź rem oznaczają (dla liczb naturalnych k i m) resztę z dzielenia k przez m . Aby w pojedynczym, pełnym okresie harmonogramu każde z dwóch wyjść obiektu próbkowane było przynajmniej jeden raz, musi zachodzić warunek

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \exists j \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \quad : \quad \sigma(j) = i$$

lub równoważnie

$$\sigma(\{1, 2, 3, \dots, m\}) = \{1, 2\}$$

Może on być spełniony tylko wówczas, gdy $m \geq 2$.

Stabilność układu regulacji

W przypadku zastosowania harmonogramu okresowego, okresowo zmieniać się będzie macierz stanu w równaniu (III.71). Warunek asymptotycznej stabilności opisanego nim systemu, przy założeniu braku zakłóceń v , wynika z twierdzenia III.2 i jest następujący

$$\lambda(\bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \cdots \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Phi}(\sigma(1))) \subset \mathbb{C}^{\odot}$$

Wskaźnik jakości

Podobnie jak dla harmonogramu naprzemiennego, także i tu wartość wskaźnika jakości może być wyznaczona w ramach kilkietapowej procedury. Najpierw należy znaleźć zależność między macierzą $\bar{X}(k+m)$ a macierzą $\bar{X}(k)$ kowariancji wektora $\bar{x}[k]$ dla k podzielnych przez m . Przechodząc w tej zależności z k w granicy do nieskończoności, otrzymuje się równanie Lapunowa. Jego rozwiązanie jest równe granicy przy $k \rightarrow \infty$ podciągu macierzy kowariancji $\bar{X}(k)$ dla $k \bmod m = 0$. Dysponując tym wynikiem oraz stosując odpowiednie pomocnicze wzory, wyznacza się wartości granic podciągów macierzy $\bar{X}(k)$ przy $k \rightarrow \infty$, kolejno dla $k \bmod m = d$, gdzie d przyjmuje wartości ze zbioru $\{1, 2, \dots, (m-1)\}$. Znając te granice, na podstawie wzorów analogicznych do (III.107a), (III.107b) i (III.107c), oblicza się wartość wskaźnika jakości $J(\cdot)$.

Przez analogię do równania (III.102), wyznaczmy zależność między $x[k+m]$ a $x[k]$ dla k podzielnych bez reszty przez m ($k|m$). Stosując rekurencyjnie, m -krotnie równanie stanu (III.71), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+m] = & \bar{\Phi}(\sigma(m)) \{ \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) [\cdots \langle \bar{\Phi}(\sigma(2)) (\bar{\Phi}(\sigma(1)) \bar{x}[k] + \\ & + \bar{\Gamma}(\sigma(1)) v[k]) + \bar{\Gamma}(\sigma(2)) v[k+1] \rangle \cdots] + \bar{\Gamma}(\sigma(m-1)) v(k+m-2) \} + \\ & + \bar{\Gamma}(\sigma(m)) v(k+m-1), \quad k|m \end{aligned}$$

a następnie

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+m] = & \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \cdots \bar{\Phi}(\sigma(1)) \bar{x}[k]} + \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \cdots \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Gamma}(\sigma(1)) v[k]} + \\ & + \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \cdots \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Gamma}(\sigma(2)) v[k+1]} + \\ & + \cdots + \\ & + \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \cdots \bar{\Phi}(\sigma(m-2)) \bar{\Gamma}(\sigma(m-3)) v(k+m-4)} + \\ & + \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \bar{\Gamma}(\sigma(m-2)) v(k+m-3)} + \\ & + \underline{\bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Gamma}(\sigma(m-1)) v(k+m-2)} + \underline{\bar{\Gamma}(\sigma(m)) v(k+m-1)} \end{aligned}$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \bar{x}[k+m] = & \bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) \bar{x}[k] + \bar{\Gamma}_1(\sigma(\cdot)) v[k] + \bar{\Gamma}_2(\sigma(\cdot)) v[k+1] + \dots \\ & \dots + \bar{\Gamma}_{m-1}(\sigma(\cdot)) v[k+m-2] + \bar{\Gamma}_m(\sigma(\cdot)) v[k+m-1] \end{aligned} \quad (\text{III.110})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \dots \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Phi}(\sigma(1)) \\ \bar{\Gamma}_1(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \dots \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Gamma}(\sigma(1)) \\ \bar{\Gamma}_2(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \dots \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Gamma}(\sigma(2)) \\ &\dots \\ \bar{\Gamma}_{m-2}(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Phi}(\sigma(m-1)) \bar{\Gamma}(\sigma(m-2)) \\ \bar{\Gamma}_{m-1}(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Phi}(\sigma(m)) \bar{\Gamma}(\sigma(m-1)) \\ \bar{\Gamma}_m(\sigma(\cdot)) &= \bar{\Gamma}(\sigma(m)) \end{aligned}$$

Znajdźmy $\bar{X}(k+m) = E \{ \bar{x}[k+m] \bar{x}[k+m]^T \}$ dla $k \bmod m = 0$, korzystając z równania stanu (III.110). Po pogrupowaniu składników otrzymujemy

$$\begin{aligned} E \{ \bar{x}[k+m] \bar{x}[k+m]^T \} = & E \left\{ \bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) \bar{x}[k] \bar{x}[k]^T \bar{\Phi}(\sigma(\cdot))^T + \right. \\ & + \sum_{i=1}^m \bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) \bar{x}[k] v[k+i-1]^T \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot))^T + \\ & + \sum_{j=1}^m \bar{\Gamma}_j(\sigma(\cdot)) v[k+j-1] \bar{x}[k]^T \bar{\Phi}(\sigma(\cdot))^T + \\ & \left. + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot)) v[k+i-1] v[k+j-1]^T \bar{\Gamma}_j(\sigma(\cdot))^T \right\} \end{aligned}$$

Po pominięciu składników, których wartość oczekiwana zeruje się (ze względu na własność losowej niezależności zakłóceń v w kolejnych chwilach czasu) oraz uwzględnieniu równości $E \{ v[k] v[k]^T \} = V$, otrzymujemy

$$\bar{X}(k+m) = \bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(\sigma(\cdot))^T + \sum_{i=d}^m \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot)) V \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot))^T \quad (\text{III.112})$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\bar{X}(\infty) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod m = 0}} \bar{X}(k) \quad (\text{III.113})$$

i stosując w równaniu (III.112) przejście graniczne $k \rightarrow \infty$ dla $k \bmod m$, dostajemy równanie Lapunowa

$$\bar{\Phi}(\sigma(\cdot)) \bar{X}(\infty) \bar{\Phi}(\sigma(\cdot))^T - \bar{X}(\infty) = - \sum_{i=1}^m \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot)) V \bar{\Gamma}_i(\sigma(\cdot))^T \quad (\text{III.114})$$

Wartości granic podobnych do (III.113), odpowiadających sytuacji, gdy $k \bmod m = d$ dla $d \in \{1, 2, \dots, (m-1)\}$ można wyznaczyć ze wzorów analogicznych do równania (III.100), uzyskanego z (III.99). Stosowne obliczenia można przeprowadzać rekurencyjnie. Dla $d = 1$ mamy

$$\bar{X}(k+1) = \bar{\Phi}(\sigma(1)) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(\sigma(1))^T + \bar{\Gamma}(\sigma(1)) V \bar{\Gamma}(\sigma(1))^T \quad (\text{III.115})$$

Dla $d = 2$ otrzymujemy

$$\bar{X}(k+2) = \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{X}(k+1) \bar{\Phi}(\sigma(2))^T + \bar{\Gamma}(\sigma(2)) V \bar{\Gamma}(\sigma(2))^T$$

a stąd i z (III.115) dostajemy

$$\begin{aligned} \bar{X}(k+2) = & \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Phi}(\sigma(1)) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(\sigma(1))^T \bar{\Phi}(\sigma(2))^T + \\ & + \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Gamma}(\sigma(1)) V \bar{\Gamma}(\sigma(1))^T \bar{\Phi}(\sigma(2))^T + \bar{\Gamma}(\sigma(2)) V \bar{\Gamma}(\sigma(2))^T \end{aligned} \quad (\text{III.116})$$

Dla $d = 3$ dostajemy

$$\bar{X}(k+3) = \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{X}(k+2) \bar{\Phi}(\sigma(3))^T + \bar{\Gamma}(\sigma(3)) V \bar{\Gamma}(\sigma(3))^T$$

i dalej, wykorzystując (III.116)

$$\begin{aligned} \bar{X}(k+3) = & \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Phi}(\sigma(1)) \bar{X}(k) \bar{\Phi}(\sigma(1))^T \bar{\Phi}(\sigma(2))^T \bar{\Phi}(\sigma(3))^T + \\ & + \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Phi}(\sigma(2)) \bar{\Gamma}(\sigma(1)) V \bar{\Gamma}(\sigma(1))^T \bar{\Phi}(\sigma(2))^T \bar{\Phi}(\sigma(3))^T + \\ & + \bar{\Phi}(\sigma(3)) \bar{\Gamma}(\sigma(2)) V \bar{\Gamma}(\sigma(2))^T \bar{\Phi}(\sigma(3))^T + \bar{\Gamma}(\sigma(3)) V \bar{\Gamma}(\sigma(3))^T \end{aligned}$$

Podobne obliczenia można prowadzić dla pozostałych wartości $1 \leq d \leq (m-1)$. Znalazłszy granicę otrzymanych wyrażeń, łatwo wyznaczyć wielkości J_d (wzorowane na (III.96a), (III.96b)) dla $d \in \{0, 1, 2, \dots, (m-1)\}$

$$J_d(\cdot) = \text{tr} \left(\bar{P} \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod m = 0}} \bar{X}(k+d) \right] \right) = \text{tr} \left(\bar{P} \left[\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \bmod m = d}} \bar{X}(k) \right] \right) \quad (\text{III.117})$$

analogiczne do (III.107a) i (III.107b). Wskaźnik jakości wyraża się formułą

$$J(\cdot) = \frac{1}{m} \sum_{d=0}^{m-1} J_d(\cdot) \quad (\text{III.118})$$

podobną do (III.107c) i zgodną ze wzorem (III.63).

III.2.2.7 Przykład doboru harmonogramu suboptymalnego

Powyżej opisano, jak znajdować wartość wskaźnika jakości $J(\cdot)$ dla poszczególnych harmonogramów próbkowania oraz pokazano, jak dobierać suboptymalny regulator K dla każdego z nich. Nadrzędne zadanie, postawione we wstępie, polega na znalezieniu suboptymalnego harmonogramu okresowego o okresie podstawowym nie przekraczającym zadanej wartości. Można je rozwiązać, porównując suboptymalne wartości wskaźników jakości dla poszczególnych harmonogramów. Obecnie zastosujemy tę procedurę do przykładowego układu regulacji, w którym obiekt opisany jest równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (\text{III.119})$$

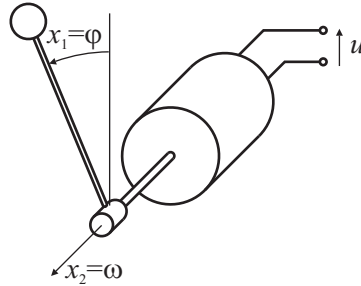
z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{III.120})$$

zaś macierz wagowa (III.83) we wskaźniku jakości ma wartość

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podane równanie stanu może stanowić (po dokonaniu kilku uproszczeń) zlinearyzowany model matematyczny sterowanego napięciowo silnika komutatorowego prądu stałego z magnesami trwałymi, na którego osi umocowano wahadło, wprowadzające niewyważenie statyczne. Budowę obiektu przedstawiono na rysunku III.68. Dyskretyzując liniowy model obiektu z czasem ciągłym metodą ZOH,



Rys. III.68: Obiekt regulacji.

dla okresu próbkowania $T = 0.25$, otrzymuje się dyskretne równanie stanu (III.60a), w którym uwzględniono dodatkowo zakłócenia $v[k]$, niezależne losowo dla różnych chwil czasu, scharakteryzowane macierzą kowariancji

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (\text{III.121})$$

Macierze Φ i Γ , wyznaczone według wzorów (III.3), mają wartości

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.0538 & 0.2008 \\ 0.4017 & 0.6521 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.1345 \\ 1.0042 \end{bmatrix}$$

Proporcje wartości elementów macierzy V , określonej równością (III.121), są praktycznie uzasadnione. Rozpiszmy macierzowo-wektorowe równanie różniczkowe (III.119) z macierzami (III.120) na układ dwóch równań skalarnych

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) - 2x_2(t) + 5u(t) \end{aligned}$$

Pierwsze równanie to znana z fizyki zależność: prędkość jest pochodną położenia. Trudno oczekiwać w niej wystąpienia jakichkolwiek zakłóceń (poza szumem pomiarowym), dlatego element (1,1) macierzy V ma wartość wielokrotnie mniejszą niż element (2,2). Wystąpienie istotnych zakłóceń w drugim równaniu jest o wiele bardziej prawdopodobne – ich źródłem może być choćby zmienne w czasie tarcie, zmienna rezystancja przejścia szczotki-komutator, niedokładności modelu matematycznego obiektu, a wreszcie – podobnie jak w przypadku x_1 – błędy pomiaru. Elementy poza przekątną główną w V są zerowe – dla uproszczenia założono losową niezależność zakłóceń oddziałujących na położenie i prędkość.

Elementy na przekątnej głównej w macierzy wag P mają porównywalne wartości, co oznacza że wariancje obu zmiennych stanu x_1 i x_2 w zbliżonym stopniu wpłyną na wartość wskaźnika jakości $J(\cdot)$. W ramach badań wyznaczono wartości wskaźników jakości regulacji dla układu z opisanym wyżej obiektem, wykorzystującego różne okresowe harmonogramy próbkowania, o okresie nie przekraczającym 4. Wcześniej dla każdego z harmonogramów obliczono suboptymalny regulator K , zapewniający osiągnięcie najlepszej wartości wskaźnika J . Wyniki (K oraz J) zebrano w tabeli III.7. Brak danych dla harmonogramu wyłącznego (wiersz 2) wynika z niemożności zapewnienia dla niego stabilności układu regulacji. Optymalnych regulatorów K poszukiwano numerycznie, wykorzystując program

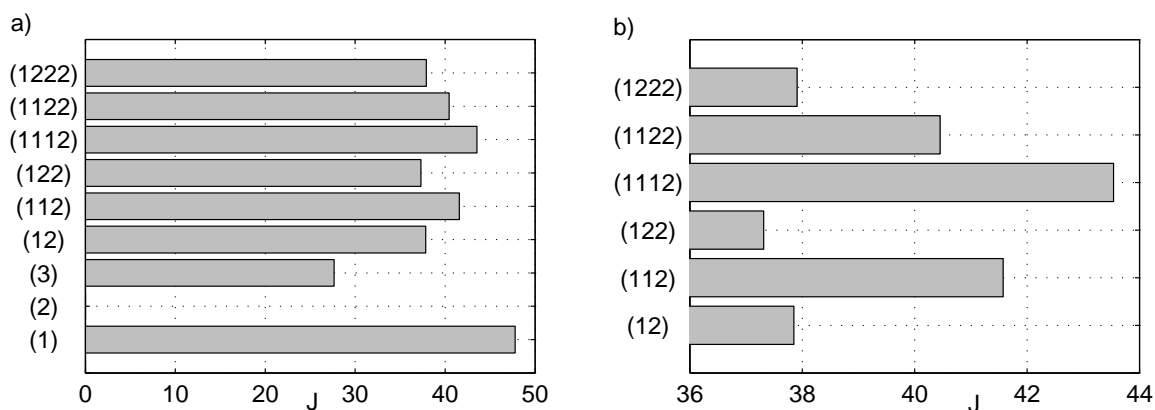
Tab. III.7: Zestawienie parametrów regulatorów i wartości wskaźnika jakości regulacji dla różnych harmonogramów próbkowania.

Numer	Harmonogram			Macierz regulatora K		Wskaźnik jakości J
	Nazwa	Ciąg σ	Okres m			
1	wyłączne	(1)	2	$K =$	2.7128 0.9841	47.7774
2		(2)		—		—
3	jednoczesny	(3)		$K =$	1.4591 0.7696	27.6474
4	naprzemienny	(1,2)	3	$K =$	1.6740 0.8960	37.8539
5	nietrywialne	(1,1,2)	3	$K =$	1.9259 0.9459	41.5732
6		(1,2,2)		$K =$	1.7020 0.8530	37.3159
7		(1,1,1,2)	4	$K =$	2.1236 0.9675	43.5392
8		(1,1,2,2)		$K =$	1.9031 0.8750	40.4548
9		(1,2,2,2)		$K =$	1.7394 0.8495	37.9093

MATLAB i napisane w tym celu M-pliki skryptowe i funkcyjne. Minimum wskaźnika jakości wyznaczano z pomocą funkcji `fminsearch`, wykorzystującej algorytm Neldera–Meada. Wartość wskaźnika jakości obliczana była w M-plikach funkcyjnych według formuł wzorowanych na (III.117) i (III.118), po wcześniejszym numerycznym rozwiązaniu równania Lapunowa o postaci (III.114), przy pomocy dostępnej w MATLAB-ie funkcji `dlyap`. Badano tylko te harmonogramy, dla których możliwe było zapewnienie asymptotycznej stabilności całego układu regulacji, opisanego rozszerzonym równaniem stanu (III.110).

Każdy z harmonogramów można jednoznacznie opisać, podając odpowiadający mu ciąg $\sigma(\cdot)$ (porównaj wzory (III.108) i (III.109)). Ciągi σ dla badanych harmonogramów umieszczono w trzeciej kolumnie tabeli. Na podstawie zawartych w niej danych sporządzono wykres słupkowy przedstawiony na rysunku III.69a oraz – po powiększeniu fragmentu – na rysunku III.69b. Wykresy wskazują na nieznaczną przewagę harmonogramu (1, 2, 2) nad pozostałymi. Harmonogram (3) ma wyłącznie charakter porównawczy (reprezentuje poziom odniesienia), bowiem zakłada on pomiarową dostępność obu sygnałów wyjściowych obiektu w każdym kroku próbkowania. Nie jest on więc brany pod uwagę przy poszukiwaniu rozwiązania. Stwierdzone doświadczalnie relacje między wartościami wskaźników jakości dla poszczególnych harmonogramów są następujące

$$J(3) < J(122) < J(12) < J(1222) < J(1122) < J(112) < J(1112) < J(1)$$



Rys. III.69: Porównanie jakości regulacji dla różnych harmonogramów próbkowania: cały wykres słupkowy (a) oraz zbliżenie jego fragmentu (b).

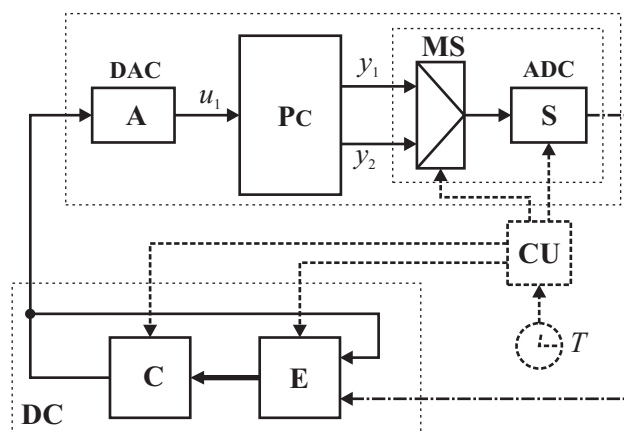
Dane uzyskane w opisany wyżej sposób mogą służyć pomocą przy doborze sposobu próbkowania w rozproszonym układzie regulacji. Stosując tę metodę w praktyce należy jednak wziąć pod uwagę następujące kwestie:

1. Podane wyżej dane liczbowe uzyskano na drodze obliczeń numerycznych, więc mogą być obciążone pewnymi błędami. Co więcej, użyta procedura numerycznej minimalizacji nie gwarantuje uzyskania minimum globalnego. Dlatego uzyskane wyniki bezpieczniej nazywać suboptymalnymi zamiast optymalnymi.
2. Powyżej rozważano wyłącznie klasę harmonogramów okresowych, w dodatku o ograniczonym okresie. Być może lepsze wyniki uzyskano by dla harmonogramu nieokresowego, ale wówczas istotnej komplikacji ulega zagadnienie stabilności układu sterowania.
3. Widoczna na rysunku III.69 przewaga harmonogramu (1, 2, 2) nad (1, 2) jest nieznaczna (około 1.4%) i być może wynika z błędów obliczeń numerycznych. Jednak jeśli nawet różnica ta występuje rzeczywiście, jej niewielka wartość nie stanowi uzasadnienia dla zastąpienia prostszego harmonogramu (1, 2) bardziej złożonym (1, 2, 2).

III.2.2.8 Uwagi końcowe

Powyższe rozważania przeprowadzono dla układu realizującego zadanie stabilizacji stanu systemu w zerowym punkcie równowagi. Uzyskane rezultaty mogą być jednak wykorzystane także w przypadku innych zadań, na przykład dla regulacji programowej. Wówczas jednak konieczne jest odpowiednie zmodyfikowanie układu regulacji, na przykład przez dodanie elementu wyznaczającego wartość sterowania otwartego (*feedforward*) [120].

Opisane rozwiązanie może być stosowane nie tylko w systemach rozproszonych. Podobny problem niemożności zmierzenia wszystkich sygnałów wyjściowych w jednym okresie próbkowania może wystąpić w klasycznym mikroprocesorowym układzie sterowania, przedstawionym na rysunku III.70. Tutaj do pomiaru dwóch sygnałów wyjściowych obiektu użyto multipleksowanego przetwornika analogowo-cyfrowego. Jeśli czas pojedynczego przetwarzania przetwornika jest większy niż połowa okresu próbkowania, konieczne jest zastosowanie niejednoczesnego próbkowania wyjść. Stwarza to możliwość użycia opisanej wyżej metody doboru suboptymalnego harmonogramu próbkowania.



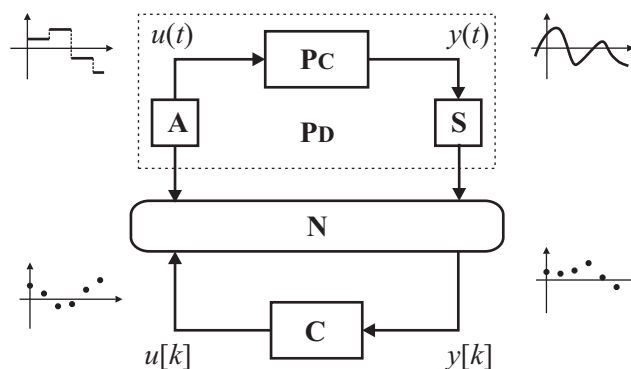
Rys. III.70: Układ regulacji z multipleksowanym przetwornikiem analogowo-cyfrowym (**ADC** – przetwornik analogowo-cyfrowy, **DAC** – przetwornik cyfrowo-analogowy, **MS** – przełącznik wieloportowy (tu: multiplexer analogowy), **CU** – jednostka sterująca).

III.2.3 Ulepszony ekstrapolator pierwszego rzędu

Dla zapewnienia pożądanej jakości regulacji w dyskretno-ciągłym układzie sterowania konieczne jest dobranie odpowiednio wysokiej częstotliwości próbkowania f (lub równoważnie – odpowiednio krótkiego okresu $T = 1/f$). Jednakże w rozproszony systemie regulacji częstotliwość ta jest zwykle ograniczona przez możliwości użytej sieci telekomunikacyjnej. Ograniczenia te mogą wynikać bądź wprost z maksymalnej dopuszczalnej częstotliwości przesyłu danych przez sieć, bądź też – pośrednio – z przepustowości sieci. W pewnych sytuacjach mają one płynny charakter – sieć dopuszcza zwiększenie częstotliwości przesyłań, ale wiąże się to ze zwiększoną stopą nieudanych transmisji (zagubionych pakietów), zwiększonymi, losowymi opóźnieniami bądź na przykład z przyspieszonym wyczerpaniem akumulatora zasilającego zdalny, bezprzewodowy węzeł pomiarowy, wykonawczy lub sterujący. W takich przypadkach uzasadnione jest zmodyfikowanie sposobu sterowania obiektem w taki sposób, by zachować nie pogorszoną jakość regulacji, mimo obniżonej częstotliwości próbkowania. W dalszej części pracy przedstawiono, jak osiągnąć ten cel, stosując ulepszony ekstrapolator pierwszego rzędu. Realizuje on parametryzację sterowania wielomianem pierwszego stopnia, jednocześnie zwiększając dwukrotnie (w sztuczny sposób) liczbę wejść obiektu. Pozwala to polepszyć jakości regulacji przy niezmienionej częstotliwości próbkowania lub też obniżyć częstotliwość, zachowując niezmienioną jakość.

III.2.3.1 Dyskretno-ciągły układ regulacji

Na rysunku III.71 przedstawiony jest klasyczny, jedнопętłowy układ regulacji, w skład którego wchodzi: obiekt regulacji **PC** z czasem ciągłym oraz kompensator dynamiczny (regulator) **C** z czasem dyskretnym. Taka struktura systemu sterowania jest obecnie często spotykana w praktyce. By dwa człony (**PC** i **C**) o odmiennym charakterze czasu mogły ze sobą współpracować, konieczne jest odpowiednie przetwarzanie przesyłanych między nimi sygnałów. Realizują je urządzenia **A** i **S**, przedstawione na rysunku III.71. Pierwsze z nich dyskretyzuje w czasie ciągły sygnał wyjściowy $y(t)$ obiektu ($t \in [0, \infty)$), produkując sygnał dyskretny $y[k]$ ($k \in \mathbb{N}$), a drugi uciąga (odtwarza) w czasie dyskretny sygnał wyjściowy $u[k]$ kompensatora, dając przebieg $u(t)$ z czasem ciągłym.



Rys. III.71: Dyskretno-ciągły układ regulacji automatycznej (**PC** – obiekt z czasem ciągłym, **PD** – obiekt z czasem dyskretnym, **A** – urządzenie uciągłające (a zarazem akuator), **S** – urządzenie dyskretyzujące (a zarazem czujnik), **C** – regulator (kompensator dynamiczny) z czasem dyskretnym, **N** – sieć telekomunikacyjna).

Symbol t oznacza tu czas ciągły, a $k \in \mathbb{N}$ to numer kolejnej chwili czasu $t_k = kT$, w której równocześnie (synchronicznie) zachodzą konwersje: dyskretno-ciągła i ciągło-dyskretna. Wielkość $T > 0$ to stały okres próbkowania. O sieci **N** zakładamy, że nie wnosi ona opóźnień i dostarcza dane niezawodnie. W roli elementu dyskretyzującego **S** wykorzystywane jest najczęściej urządzenie próbkujące, realizujące wobec sygnału $y(t)$ operację opisaną wzorem analogicznym do (III.4) lub lepiej formułą

$$y[k] = \lim_{\substack{t \rightarrow kT \\ t < kT}} y(t) = \lim_{t \rightarrow kT^-} y(t) = y(kT^-), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.123})$$

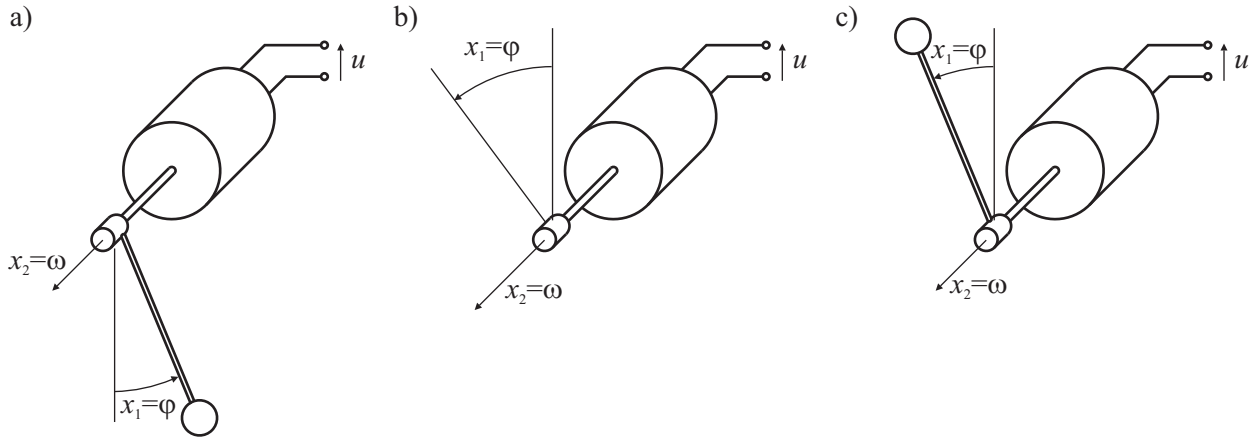
która może być stosowana także w przypadku sygnału $y(t)$ opisanego funkcją nieciągłą. Z kolei zadanie urządzenia uciągłającego **A** spełnia zazwyczaj ekstrapolator zerowego rzędu (**ZOH** – *Zero Order Hold*). Znane są również, choć rzadko stosowane, ekstrapolatory wyższych rzędów, w tym między innymi ekstrapolator rzędu pierwszego (**FOH** – *First Order Hold*) [112]. Ich mała popularność wynika z trudności implementacji układowej i z przekonania, że podnoszenie rzędu ekstrapolatora nie przynosi znaczącej poprawy jakości regulacji ani polepszenia innych własności układu sterowania.

W dalszej części podrozdziału porównano działanie trzech układów sterowania, różniących się rodzajem użytych ekstrapolatorów. Dwa z nich to odpowiednio **ZOH** oraz **FOH**, trzeci zaś, oznaczany dalej symbolem **IFOH** (*Improved First Order Hold*), może być traktowany jako modyfikacja elementu **FOH**. Został on zaproponowany jako środek polepszający (w porównaniu do dwóch pierwszych rozwiązań) własności układu regulacji przy nie zmienionym okresie próbkowania lub pozwalający wydłużyć ten okres, przy nie pogorszonej jakości regulacji.

Dla prostoty, dalej zbadano wyłącznie przypadek sterowania obiektów o jednym wejściu (**SI** – *Single Input*), wnioski można jednak uogólnić na przypadek obiektu o wielu wejściach (**MI** – *Multiple Inputs*). Porównano jakości regulacji w układach z ekstrapolatorami **ZOH**, **FOH** i **IFOH**, dla trzech różnych obiektów: asymptotycznie stabilnego (**AS** – *Asymptotically Stable*), stabilnego nieasymptotycznie (**NAS** – *Non-Asymptotically Stable*) oraz niestabilnego (**NS** – *Non-Stable, Unstable*).

W roli przykładowego obiektu stabilnego nieasymptotycznie użyto silnik prądu stałego z magnesami trwałymi (rysunek III.72b), sterowany napięciowo. W modelu matematycznym pominięto wpływ

indukcyjności obwodu twornika i nieliniowości wnoszone między innymi przez komutator, obwody magnetyczne i zjawisko tarcia mechanicznego. Modele: asymptotycznie stabilny i niestabilny można uzyskać w wyniku linearyzacji równań stanu opisujących wspomniany silnik, na którego osi (położonej poziomo) umocowane jest dodatkowo wahadło, wprowadzające niewyważenie statyczne (rysunki III.72a i c). Dla górnego położenia wahadła, odpowiadającego równowadze nietrwałej, otrzymuje się model niestabilny, dla dolnego, odpowiadającego równowadze trwałej – model asymptotycznie stabilny.



Rys. III.72: Trzy różne obiekty regulacji: a) z asymptotycznie stabilnym zerowym punktem równowagi (AS), b) stabilny nieasymptotycznie (NAS), (S\AS), c) z niestabilnym zerowym punktem równowagi (NS).

Organizacja dalszej części tego podrozdziału jest następująca. W następnym punkcie scharakteryzowano wymienione metody uciążlania sygnału dyskretnego oraz przedstawiono przykładowe realizacje teoretyczne (modele matematyczne) i praktyczne (konstrukcje sprzętowe) ekstrapolatorów. Kolejny punkt, podzielony na trzy podpunkty, prezentuje modele matematyczne układów regulacji z poszczególnymi rodzajami ekstrapolatorów. Tu również wyprowadzone są formuły matematyczne pozwalające wyznaczyć wartości kwadratowych, całkowych (sumacyjnych) wskaźników jakości regulacji dla wszystkich trzech układów. Dalej, w oparciu o uzyskane wskaźniki jakości, zaprojektowano regulatory liniowo-kwadratowe dla trzech przedstawionych wcześniej wersji systemów. Ostatni punkt prezentuje wyniki porównania jakości regulacji w układach z trzema rozpatrywanymi typami ekstrapolatorów oraz płynące stąd wnioski końcowe.

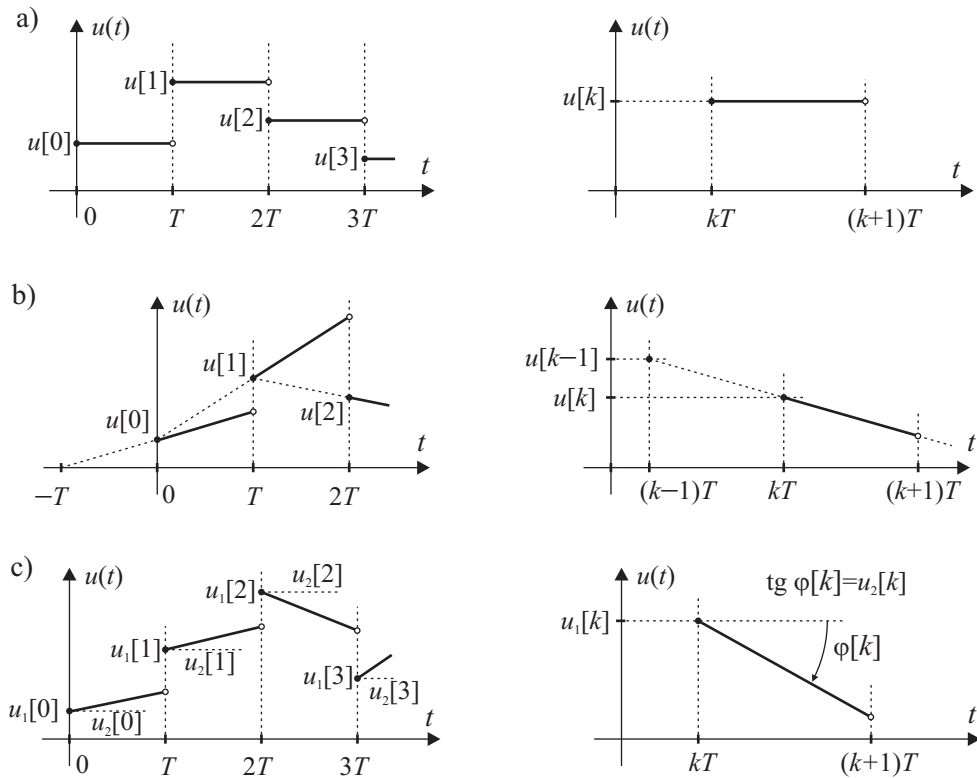
III.2.3.2 Sposoby przetwarzania dyskretno-ciągłego

Sposoby działania trzech typów ekstrapolatorów, wymienionych w poprzednim podrozdziale, przedstawione są w postaci przebiegów czasowych na rysunku III.73 i scharakteryzowane dokładnie w dalszej części tego punktu. Zadanie realizowane przez ekstrapolator zerowego rzędu, polegające na podtrzymaniu wartości sterowania w przedziale próbkowania, można zapisać w postaci wzoru

$$u^{\text{ZOH}}(t) = u[k], \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{N}$$

natomiast funkcję ekstrapolatora pierwszego rzędu opisuje zależność

$$u^{\text{FOH}}(t) = u[k] + \frac{u[k] - u[k-1]}{T} (t - kT), \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.124})$$



Rys. III.73: Sposób odtwarzania sygnału przez: a) ekstrapolator zerowego rzędu (ZOH), b) ekstrapolator pierwszego rzędu (FOH), c) ulepszony ekstrapolator pierwszego rzędu (IFOH).

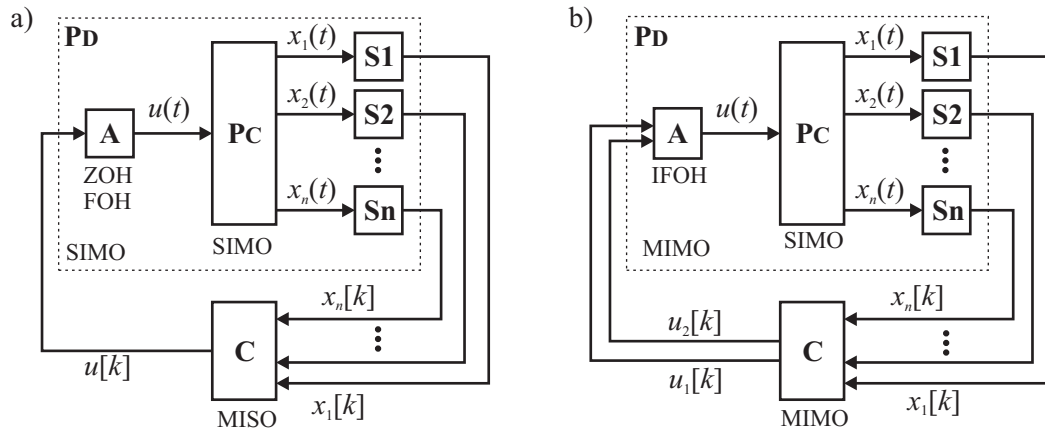
Przebieg sygnału $u(t)$ produkowanego przez element FOH na przedziale czasu $[kT, (k+1)T)$ zależy od wartości dwóch kolejnych próbek sygnału: $u[k-1]$ i $u[k]$, docierających do ekstrapolatora z kompensatora dynamicznego. Wartości tych próbek decydują o położeniu i nachyleniu prostej będącej wykresem $u(t)$ na wspomnianym przedziale czasu. Zaproponowana modyfikacja algorytmu ekstrapolatora pozwala na niezależny dobór parametrów tej prostej w każdym kroku próbkowania. Konieczne jest do tego przesyłanie w każdym kroku do urządzenia uciągającego dwóch wartości, które oznaczymy przez $u_1[k]$ oraz $u_2[k]$. Jedna z nich może być traktowana jako „lokalny” współczynnik przesunięcia prostej, a druga – jako współczynnik kierunkowy. Wzór opisujący działanie otrzymanego w ten sposób ekstrapolatora IFOH jest następujący.

$$u^{\text{IFOH}}(t) = u_1[k] + (t - kT) u_2[k], \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{III.125})$$

Wielkość $u_1[k]$ nazwano „lokalnym” współczynnikiem przesunięcia, ponieważ we wzorze (III.125) wartość $u_2[k]$ mnożona jest nie przez czas t , ale przez jego różnicę (przyrost) względem $t_k = kT$.

Konieczność wysłania do elementu IFOH dwóch wartości (zamiast jednej, jak w przypadku ZOH czy FOH) w każdym kroku próbkowania oznacza w praktyce, że układ IFOH posiada dwa wejścia, zamiast jednego (rysunek III.74). Obiekt typu SIMO, uzupełniony na wejściu o element IFOH, staje się więc systemem MIMO. Zmiana ta sugeruje zwiększone możliwości wpływania na pracę układu i wynikającą stąd sposobność polepszenia jego własności dynamicznych i jakości regulacji. Przypuszczenie to będzie zweryfikowane w dalszej części opracowania.

Zastąpienie w rozproszonym układzie regulacji ekstrapolatora ZOH lub FOH elementem IFOH wiąże się ze zwiększeniem ilości danych przesyłanych w pojedynczym pakiecie sieciowym, a to może



Rys. III.74: Układy regulacji z obiektem SIMO i różnymi typami ekstrapolatorów: a) ZOH lub FOH, b) IFOH.

prowadzić do zwiększonego obciążenia sieci telekomunikacyjnej \mathbf{N} . Istnieją jednak sieci (na przykład Ethernet), w których rozmiar pakietu jest stały, niezależny od ilości danych, jeśli tylko nie przekracza ona pewnej granicznej wartości (rysunek III.63). Ponieważ zaś w układach sterowania przesyłane są zazwyczaj stosunkowo małe porcje danych, problem zwiększonego rozmiaru pakietu i powiększonego obciążenia sieci najczęściej nie występuje.

Warto zauważyć, że ekstrapolator IFOH można być sprowadzony do elementu FOH, jeśli tylko zapewni się spełnienie warunku

$$u_2[k] = \frac{u_1[k] - u_1[k-1]}{T}, \quad \forall k \in \mathbf{N}$$

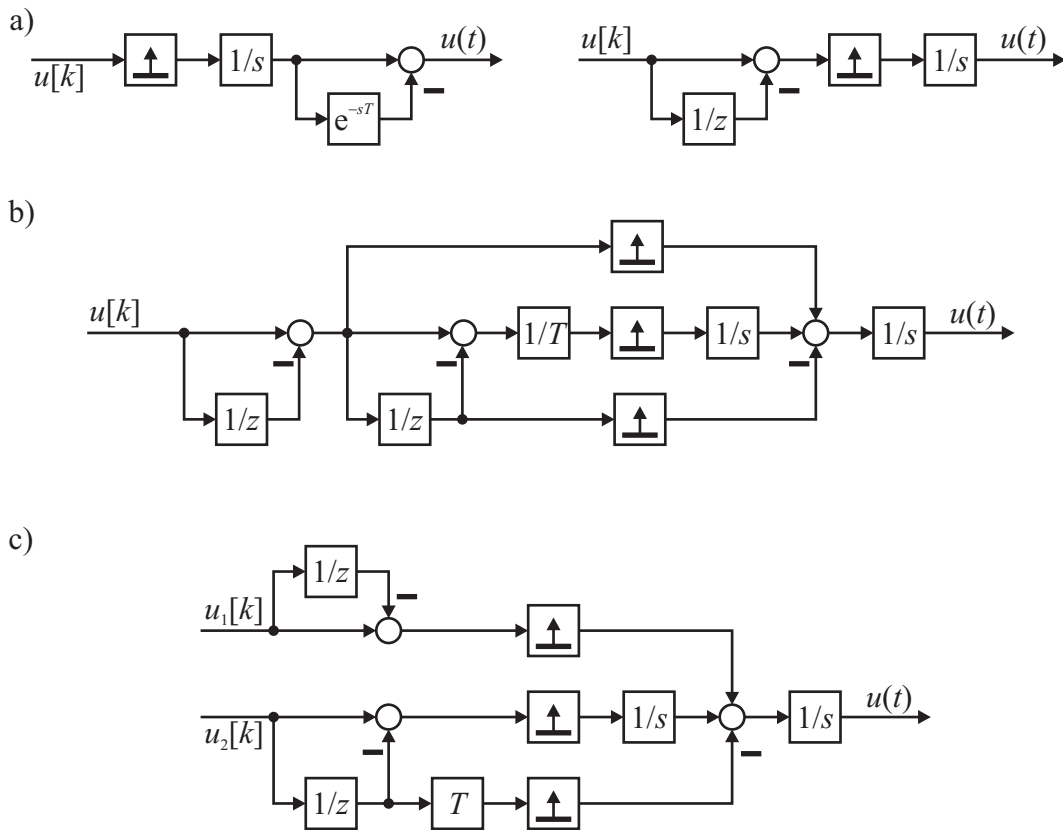
Podobnie, jeśli spełniony jest warunek $u_2[k] \equiv 0$ to element IFOH zachowuje się jak ekstrapolator ZOH (z sygnałem wejściowym $u[k]$).

Na rysunku III.75 przedstawiono schematy blokowe odpowiadające przykładowym teoretycznym realizacjom ekstrapolatorów ZOH, FOH i IFOH, wykorzystującym impulsator idealny (oznaczony symbolem graficznym \square). Rycina III.76 prezentuje natomiast schematy, które mogą być wykorzystane w praktyce, przy budowie sprzętowych (elektronicznych) wersji ekstrapolatorów. Blok na rysunku oznaczony literą \mathbf{H} to przetwornik cyfrowo-analogowy i zarazem analogowy element podtrzymujący wartość sygnału, taktowany zegarem o okresie T . Blok \mathbf{RI} to resetowany integrator, którego stan zerowany jest cyklicznie sygnałem zegarowym z okresem T , zaś element oznaczony symbolem \mathbf{RG} to rejestr opóźniający sygnał dyskretny o jeden okres próbkowania T . Ze względu na trudność błyskawicznego wyzerowania stanu integratora analogowego \mathbf{RI} , w praktyce należałoby zastosować raczej układ dwóch przełączanych integratorów [143].

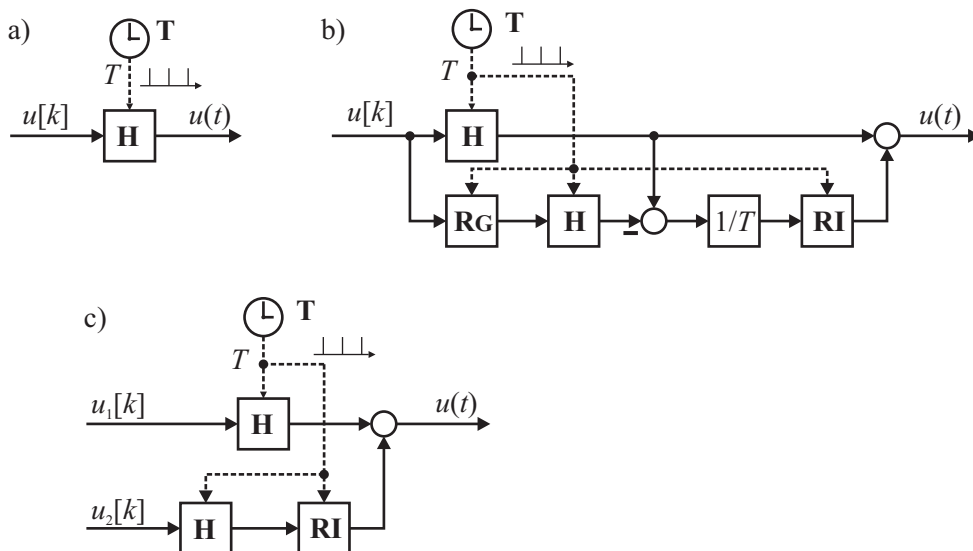
III.2.3.3 Modele układów regulacji z ekstrapolatorami

Rozpatrujemy liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy obiekt rzędu n o jednym wejściu i wielu wyjściach, niosących wprost pełną informację o stanie, z czasem ciągłym, opisany równaniami stanu (III.59a) i (III.59b), przy czym tutaj

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad C = I \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad x(t), y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad (\text{III.126})$$



Rys. III.75: Przykładowe teoretyczne realizacje ekstrapolatorów: a) ZOH, b) FOH, c) IFOH ($1/s$ – integrator ciągły (analogowy), $1/z$ – opóźnienie dyskretne o jeden krok, $1/T$ oraz T – mnożenie sygnału przez stałe).



Rys. III.76: Przykłady praktycznych (sprzętowych) realizacji ekstrapolatorów: a) ZOH, b) FOH, c) IFOH (**H** – zatrząsk analogowy (przetwornik cyfrowo-analogowy), **RI** – kasowalny integrator (wzmacniacz całkujący z zerowaniem), **RG** – rejestr opóźniający sygnał o jeden dyskretne krok czasu, **T** – zegar taktujący pozostałe elementy z okresem T , $1/T$ – wzmacniacz sygnału).

Do oceny jakości regulacji wykorzystany zostanie całkowity, kwadratowy wskaźnik jakości od stanu $x(t)$ i wejścia $u(t)$ z nieskończonym horyzontem czasowym

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (\text{III.127})$$

gdzie macierze R i Q spełniają następujące warunki

$$R \in \mathbb{R}, \quad R > 0, \quad Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q \geq 0$$

Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że macierz R (która tu jest skalarem) ma wartość 1. Natomiast w roli macierzy Q najczęściej stosuje się macierz diagonalną

$$R = 1, \quad Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad q_i \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Uzupełniając obiekt \mathbf{PC} , opisany równaniami stanu z czasem ciągłym (III.59a), (III.59b), o urządzenie uciągające \mathbf{A} i dyskretyzujące \mathbf{S} , otrzymuje się układ, który można traktować jako system z czasem dyskretnym \mathbf{PD} . Poniżej podane zostaną równania stanu otrzymanego w ten sposób systemu dyskretnego oraz formuła określająca wartość wskaźnika jakości (D.20), dla przypadku użycia w roli elementu \mathbf{A} ekstrapolatora typu ZOH. W kolejnych podrozdziałach zamieścimy analogiczne wzory, odpowiadające ekstrapolatorom FOH i IFOH. Razem posłużą one kolejno do obliczenia optymalnych regulatorów liniowo-kwadratowych, a następnie do porównania jakości regulacji oraz płynącej stąd możliwości obniżenia częstotliwości próbkowania w układach z różnymi typami ekstrapolatorów.

Ekstrapolator ZOH

Równania stanu

W wyniku dyskretyzacji typu ZOH obiektu \mathbf{PC} , opisanego równaniami (III.59a), (III.59b) i (III.126), otrzymuje się obiekt \mathbf{PD} o równaniach stanu

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi^{\text{ZOH}} x[k] + \Gamma^{\text{ZOH}} u[k] \\ y[k] &= C^{\text{ZOH}} x[k] \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi^{\text{ZOH}} = e^{TA}, \quad \Gamma^{\text{ZOH}} = \int_0^T e^{tA} B dt, \quad C^{\text{ZOH}} = I \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Formuły, którymi wyrażają się Φ^{ZOH} oraz Γ^{ZOH} są analogiczne z wzorami (III.3). Powtórzono je tu jednak, by wprowadzić oznaczenia zgodne z jednolitą konwencją przyjętą w dalszej części podrozdziału.

Wskaźnik jakości

W podrozdziale III.2.3.3 zaproponowano, by do oceny jakości regulacji w układzie z obiektem \mathbf{PC} wykorzystać wskaźnik jakości o postaci (III.127). Do wyznaczenia jego wartości konieczna jest znajomość przebiegów sygnałów z czasem ciągłym $x(t)$ oraz $u(t)$. Ponieważ jednak optymalny regulator \mathbf{C}

projektowany będzie w oparciu o zdyskretyzowany model obiektu $\mathbf{P_F}$, dogodnie byłoby dysponować podaną niżej postacią wskaźnika jakości, operującą wyłącznie na sygnałach dyskretnych

$$J^{\text{ZOH}} = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q^{\text{ZOH}} x[k] + 2x[k]^T S^{\text{ZOH}} u[k] + R^{\text{ZOH}} u[k]^2) \quad (\text{III.129})$$

W dodatku D.4 wyprowadzono zależności, jakie muszą zachodzić między macierzami Q i R oraz Q^{ZOH} , R^{ZOH} i S^{ZOH} , aby wartości wskaźników jakości (III.127) i (III.129) były sobie równe. Związki te są następujące

$$\begin{aligned} Q^{\text{ZOH}} &= \int_0^T F^{\text{ZOH}}(\tau)^T Q F^{\text{ZOH}}(\tau) d\tau, & S^{\text{ZOH}} &= \int_0^T F^{\text{ZOH}}(\tau)^T Q G^{\text{ZOH}}(\tau) d\tau, \\ R^{\text{ZOH}} &= \int_0^T (G^{\text{ZOH}}(\tau)^T Q G^{\text{ZOH}}(\tau) + R) d\tau \end{aligned} \quad (\text{III.130})$$

przy czym

$$F^{\text{ZOH}}(\tau) = e^{\tau A}, \quad G^{\text{ZOH}}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\sigma A} B d\sigma$$

W dalszej części podrozdziału podane są wzory analogiczne do (III.129), odpowiadające dwóm pozostałym typom ekstrapolatorów, FOH oraz IFOH. Fakt, iż wszystkie one są równoważne formule (III.127), pozwala porównywać przy ich pomocy jakość regulacji w układach z poszczególnymi typami ekstrapolatorów.

Ekstrapolator FOH

Równania stanu

By uzyskać model matematyczny układu regulacji z ekstrapolatorem FOH, konieczne jest skorzystanie z metody rozszerzonej przestrzeni stanów [39, 46]. Stosowne wyprowadzenia zamieszczone są w dodatku D.5, a ich wynikiem są następujące równania stanu

$$\begin{aligned} z[k+1] &= \Phi^{\text{FOH}} z[k] + \Gamma^{\text{FOH}} u[k] \\ y[k] &= C^{\text{FOH}} z[k] \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} \Phi^{\text{foh}} & \Gamma_1^{\text{foh}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{\text{foh}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\Phi^{\text{foh}} = e^{TA}, \quad \Gamma_0^{\text{foh}} = \int_0^T e^{\xi A} B \left(2 - \frac{\xi}{T}\right) d\xi, \quad \Gamma_1^{\text{foh}} = \int_0^T e^{\xi A} B \left(\frac{\xi}{T} - 1\right) d\xi$$

a symbol $z[k]$ oznacza rozszerzony wektor stanu

$$z[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k-1] \end{bmatrix}$$

Wskaźnik jakości

Podobnie jak dla ekstrapolatora ZOH, także tutaj wyznaczono wskaźnik jakości bazujący na dyskretnych sygnałach $z[k]$ oraz $u[k]$. Wartość tego wskaźnika odpowiada wskaźnikowi z czasem ciągłym (III.127). Wyprowadzenia wzorów zamieszczone są w dodatku D.6, a ich wynik jest następujący

$$J^{\text{FOH}} = \sum_{k=0}^{\infty} (z[k]^T Q^{\text{FOH}} z[k] + 2 z[k]^T S^{\text{FOH}} u[k] + R^{\text{FOH}} u[k]^2) \quad (\text{III.132})$$

gdzie

$$Q^{\text{FOH}} = \int_0^T \left[\begin{array}{c|c} F^{\text{FOH}}(\tau)^T Q F^{\text{FOH}}(\tau) & F^{\text{FOH}}(\tau)^T Q H^{\text{FOH}}(\tau) \\ \hline H^{\text{FOH}}(\tau)^T Q F^{\text{FOH}}(\tau) & H^{\text{FOH}}(\tau)^T Q H^{\text{FOH}}(\tau) + R \frac{\tau^2}{T^2} \end{array} \right] d\tau, \quad (\text{III.133a})$$

$$S^{\text{FOH}} = \int_0^T \left[\begin{array}{c} F^{\text{FOH}}(\tau)^T Q G^{\text{FOH}}(\tau) \\ \hline G^{\text{FOH}}(\tau)^T Q H^{\text{FOH}}(\tau) - R \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\tau^2}{T^2} \right) \end{array} \right] d\tau, \quad (\text{III.133b})$$

$$R^{\text{FOH}} = \int_0^T \left(G^{\text{FOH}}(\tau)^T Q G^{\text{FOH}}(\tau) + R \left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 \right) d\tau \quad (\text{III.133c})$$

oraz

$$F^{\text{FOH}}(\tau) = e^{\tau A}, \quad G^{\text{FOH}}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\sigma A} B \left(1 + \frac{\tau - \sigma}{\tau} \right) d\sigma$$

$$H^{\text{FOH}}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\sigma A} B \frac{\sigma - \tau}{T} d\sigma$$

Ekstrapolator IFOH

Równania stanu

Równania stanu opisujące obiekt z ekstrapolatorem IFOH można uzyskać podobnie, jak dla dwóch przypadków rozpatrzonych powyżej. Stosowne wyprowadzenia umieszczono w dodatku D.7, a ich wynik jest następujący

$$x[k+1] = \Phi^{\text{IFOH}} x[k] + \Gamma^{\text{IFOH}} u[k]$$

$$y[k] = C^{\text{IFOH}} x[k]$$

gdzie

$$\Phi^{\text{IFOH}} = \Phi^{\text{ifoh}}, \quad \Gamma^{\text{IFOH}} = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_1^{\text{ifoh}} & \Gamma_2^{\text{ifoh}} \end{array} \right], \quad C^{\text{IFOH}} = C = I$$

oraz

$$\Phi^{\text{ifoh}} = e^{T A}, \quad \Gamma_1^{\text{ifoh}} = \int_0^T e^{\xi A} B d\xi, \quad \Gamma_2^{\text{ifoh}} = \int_0^T e^{\xi A} B (T - \xi) d\xi$$

W tym przypadku $u[k]$ jest wektorem dwuelementowym

$$u[k] = \left[\begin{array}{c} u_1[k] \\ u_2[k] \end{array} \right]$$

Wskaźnik jakości

Wskaźnik jakości dla układu z ekstrapolatorem IFOH wyznacza się według podobnego schematu, jak w dwóch poprzednich przypadkach (ZOH i FOH). Poniżej podane są wyniki uzyskane na drodze obliczeń zamieszczonych w dodatku D.8.

$$J^{\text{IFOH}} = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q^{\text{ZOH}} x[k] + 2x[k]^T S^{\text{ZOH}} u[k] + u[k]^T R^{\text{ZOH}} u[k]) \quad (\text{III.135})$$

gdzie

$$Q^{\text{IFOH}} = \int_0^T F^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q F^{\text{IFOH}}(\tau) d\tau \quad (\text{III.136a})$$

$$S^{\text{IFOH}} = \int_0^T \left[F^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q G^{\text{IFOH}}(\tau) \quad F^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q H^{\text{IFOH}}(\tau) \right] d\tau \quad (\text{III.136b})$$

$$R^{\text{IFOH}} = \int_0^T \left[\begin{array}{c} (G^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q G^{\text{IFOH}}(\tau) + R) \quad (G^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q H^{\text{IFOH}}(\tau) + R\tau) \\ (H^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q G^{\text{IFOH}}(\tau) + R\tau) \quad (H^{\text{IFOH}}(\tau)^T Q H^{\text{IFOH}}(\tau) + R\tau^2) \end{array} \right] d\tau \quad (\text{III.136c})$$

oraz

$$F^{\text{IFOH}}(\tau) = e^{\tau A}, \quad G^{\text{IFOH}}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\xi A} B d\xi, \quad H^{\text{IFOH}}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\xi A} B (\tau - \xi) d\xi$$

III.2.3.4 Regulator liniowo-kwadratowy

Obecnie wyznaczymy regulatory liniowo-kwadratowe dla wszystkich trzech rozpatrzonych wyżej przypadków (układy regulacji z ekstrapolatorami ZOH, FOH i IFOH). Dla porównania obliczony zostanie również regulator dla układu z czasem ciągłym (bez ekstrapolatorów i bez sieci telekomunikacyjnej). Należy oczekiwać, że jakość regulacji w tym ostatnim przypadku będzie najwyższa (wartość wskaźnika jakości najmniejsza) i może ona posłużyć jako poziom odniesienia. Regulatory dla trzech przypadków z czasem dyskretnym obliczane są w oparciu o wskaźniki jakości odpowiednio J^{ZOH} (III.129), J^{FOH} (III.132) i J^{IFOH} (III.135), zaś regulator z czasem ciągłym – na podstawie J (III.127). Celem dalszych rozważań będzie porównanie jakości regulacji w układach z różnymi wariantami ekstrapolatorów. By rezultaty porównania były miarodajne, wskaźniki jakości dla rozpatrywanych przypadków muszą sobie odpowiadać. Warunek ten jest spełniony, jeśli między wartościami macierzy wagowych we wskaźnikach zachodzą relacje wyrażone wyprowadzonymi wcześniej wzorami (III.130), (III.133a)–(III.133c) i (III.136a)–(III.136c).

Regulator liniowo-kwadratowy jest proporcjonalnym, macierzowym regulatorem od stanu. Sterowanie wyznaczone przy jego pomocy wyraża się dla przypadku ciągłego w czasie wzorem

$$u(t) = -K x(t) \quad (\text{III.137})$$

zaś w układach z czasem dyskretnym i różnymi rodzajami ekstrapolatorów – formułami

$$u[k] = -K^{\text{ZOH}} x[k], \quad u[k] = -K^{\text{FOH}} z[k], \quad u[k] = -K^{\text{IFOH}} x[k] \quad (\text{III.138})$$

W ostatnim przypadku $u[k]$ jest wektorem dwuelementowym, w poprzednich – skalarem (podobnie jak $u(t)$). Równania stanu zamkniętych układów regulacji z regulatorami (III.137) i (III.138) są następujące

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \underbrace{(A - BK)}_P x(t) = P x(t) \\ x[k+1] &= \underbrace{(\Phi^{\text{ZOH}} - \Gamma^{\text{ZOH}} K^{\text{ZOH}})}_{\Psi^{\text{ZOH}}} x[k] = \Psi^{\text{ZOH}} x[k] \\ z[k+1] &= \underbrace{(\Phi^{\text{FOH}} - \Gamma^{\text{FOH}} K^{\text{FOH}})}_{\Psi^{\text{FOH}}} z[k] = \Psi^{\text{FOH}} z[k] \\ x[k+1] &= \underbrace{(\Phi^{\text{IFOH}} - \Gamma^{\text{IFOH}} K^{\text{IFOH}})}_{\Psi^{\text{IFOH}}} x[k] = \Psi^{\text{IFOH}} x[k]\end{aligned}$$

Macierze K oraz K^{ZOH} , K^{FOH} i K^{IFOH} wyznacza się stosując algorytmy wynikające z teorii regulacji liniowo-kwadratowej [86,88], odpowiednio w wersji z czasem ciągłym i dyskretnym. Operacje obliczania wymienionych macierzy sprzężeń zwrotnych można symbolicznie zapisać jak niżej

$$\begin{aligned}K &= \text{LQR}(A, B, Q, R, S) \\ K^{\text{ZOH}} &= \text{DLQR}(\Phi^{\text{ZOH}}, \Gamma^{\text{ZOH}}, Q^{\text{ZOH}}, R^{\text{ZOH}}, S^{\text{ZOH}}) \\ K^{\text{FOH}} &= \text{DLQR}(\Phi^{\text{FOH}}, \Gamma^{\text{FOH}}, Q^{\text{FOH}}, R^{\text{FOH}}, S^{\text{FOH}}) \\ K^{\text{IFOH}} &= \text{DLQR}(\Phi^{\text{IFOH}}, \Gamma^{\text{IFOH}}, Q^{\text{IFOH}}, R^{\text{IFOH}}, S^{\text{IFOH}})\end{aligned}$$

Każdorazowo konieczne jest rozwiązanie algebraicznego równania Riccatiego – odpowiednio w wersji ciągłej

$$A^T X + X A - X B R^{-1} B^T X + Q = 0$$

lub dyskretniej (III.10), przy czym poszukiwane są jedyne, symetryczne, półdefinitnie określone rozwiązania (odpowiednio X w wersji ciągłej oraz X^\square w dyskretniej), które istnieją, jeśli spełnione są założenia stosownych twierdzeń [86]. Symbolu \square użyto tutaj (będzie on stosowany również w dalszych opisach) w zastępstwie indeksów ZOH, FOH i IFOH. Znając rozwiązania równań Riccatiego, macierze wzmocnień oblicza się według wzorów

$$\begin{aligned}K &= R^{-1} B^T X \\ K^\square &= \left(\Gamma^{\square T} X \Gamma^\square + R^\square \right)^{-1} \left(\Gamma^{\square T} X \Phi^\square + S^T \right)\end{aligned}$$

odpowiednio dla wersji z czasem ciągłym i dyskretnym. Znajomość rozwiązań X lub X^\square równań Riccatiego umożliwia również obliczenie wartości wskaźnika jakości w zamkniętym układzie regulacji, jeśli znany jest warunek początkowy $x(0)$ lub $x[0]$

$$\begin{aligned}J(\cdot) &= x(0)^T X x(0) \\ J^\square(\cdot) &= x[0]^T X^\square x[0]\end{aligned}$$

III.2.3.5 Kryteria porównania jakości regulacji

Użycie wprost wskaźników J oraz J^\square dla porównania jakości regulacji w rozważanych układach nie jest dogodnym rozwiązaniem, ponieważ wynik porównania zależy od warunku początkowego $x(0) = x[0]$. Dlatego zamiast wartości danego wskaźnika dla konkretnego warunku początkowego, wyznaczmy kres górny wartości wskaźnika dla $x(0)$ o normie równej jedności ($x(0)$ ze sfery jednostkowej w przestrzeni \mathbb{R}^n z normą euklidesową). Otrzymaną w ten sposób wielkość oznaczmy odpowiednio symbolem f_2 lub f_2^\square i będzie ona stanowiła jeden z trzech rodzajów wskaźników, które posłużą do porównania układów z różnymi typami ekstrapolatorów

$$f_2 = \sup_{\|x(0)\|=1} J(x(0))$$

$$f_2^\square = \sup_{\|x[0]\|=1} J^\square(x[0])$$

Maksymalna wartość wskaźnika J (lub J^\square) dla $\|x(0)\| = 1$ (albo $\|x[0]\| = 1$) wyznaczona jest przez największą wartość własną symetrycznej macierzy X (bądź X^\square), a stąd

$$f_2 = \max \lambda(X)$$

$$f_2^\square = \max \lambda(X^\square) \quad (\text{III.144a})$$

Symbol $\lambda(X)$ oznacza zbiór wartości własnych macierzy X .

Innym sposobem oceny jakości w układzie regulacji jest wyznaczenie modułu dominującego bieguna zamkniętego układu regulacji (dla systemu z czasem dyskretnym: największego modułu wartości własnych macierzy stanu systemu zamkniętego)

$$f_1^\square = \max \left| \lambda \left(\Phi^\square - \Gamma^\square K^\square \right) \right| = \max \left| \lambda \left(\Psi^\square \right) \right| \quad (\text{III.145})$$

Tutaj zapis $|\lambda(\Psi^\square)|$ oznacza zbiór modułów elementów zbioru $\lambda(\Psi^\square)$. Im moduł dominującego bieguna bliższy wartości 1, tym mniejszy „zapas stabilności” w układzie. Analogiczny wskaźnik jakości dla układu z czasem ciągłym powinien być równy części rzeczywistej bieguna dominującego (dla układu ciągłego: największej części rzeczywistej wartości własnych macierzy stanu systemu zamkniętego)

$$f_1 = \max \operatorname{Re} \lambda(A - BK) = \max \operatorname{Re} \lambda(P)$$

Zapis $\operatorname{Re} \lambda(P)$ oznacza zbiór części rzeczywistych elementów zbioru $\lambda(P)$. Zapas stabilności jest tym mniejszy, im część rzeczywista dominującego bieguna bliższa jest zeru.

Trzecim kryterium oceny jakości regulacji, które będzie użyte do porównania układów z różnymi typami ekstrapolatorów, jest współczynnik uwarunkowania macierzy sterowalności Q_c (lub Q_c^\square). Macierze te dla obiektu regulacji drugiego rzędu wyrażają się odpowiednio wzorami

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}$$

$$Q_c^\square = \begin{bmatrix} \Gamma^\square & \Phi^\square \Gamma^\square & \Phi^{\square 2} \Gamma^\square & \dots & \Phi^{\square(n-1)} \Gamma^\square \end{bmatrix}$$

a ich współczynniki uwarunkowania (ze względu na odwrotność macierzy) dane są formułami

$$\begin{aligned} f_3 &= \text{cond } Q_c = \frac{\bar{\sigma}(Q_c)}{\underline{\sigma}(Q_c)} \\ f_3^\square &= \text{cond } Q_c^\square = \frac{\bar{\sigma}(Q_c^\square)}{\underline{\sigma}(Q_c^\square)} \end{aligned} \quad (\text{III.147a})$$

gdzie zapisy $\bar{\sigma}(\cdot)$ i $\underline{\sigma}(\cdot)$ oznaczają odpowiednio największą i najmniejszą wartość singularną macierzy. Duża wartość współczynnika uwarunkowania zapowiada problemy przy odwracaniu macierzy, a to jednocześnie oznacza niepewność ustalenia rzędu macierzy. Ten ostatni (w przypadku macierzy sterowalności) decyduje o sterowalności układu, która jest wysoce pożądaną cechą obiektu sterowania.

III.2.3.6 Porównanie działania ekstrapolatorów ZOH, FOH i IFOH w przykładowym układzie regulacji

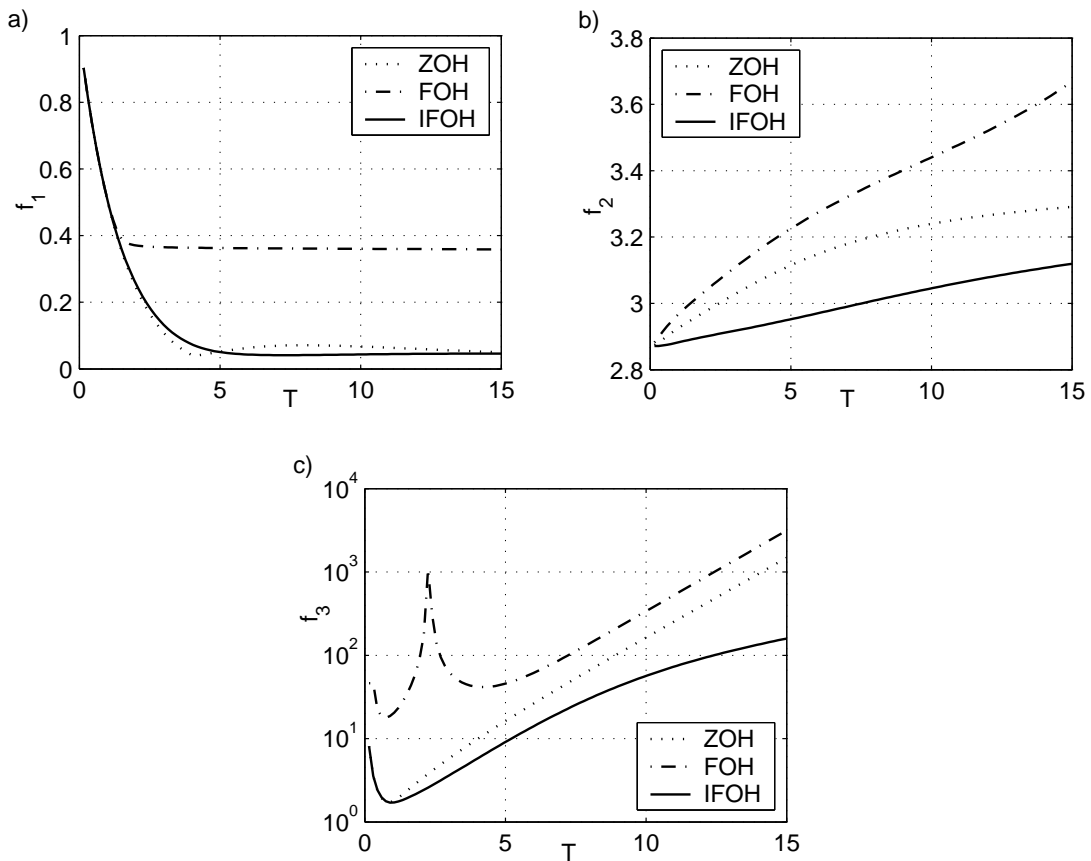
Celem rozważań jest wykazanie, że zastąpienie ekstrapolatorów ZOH lub FOH urządzeniem IFOH pozwala zachować nie pogorszoną jakość regulacji przy wydłużonym okresie próbkowania T , a to w rozproszonym układzie sterowania umożliwia zmniejszenie obciążenia sieci transmitującej dane. Do porównania jakości regulacji w układach z trzema wymienionymi typami ekstrapolatorów użyto trzech zdefiniowanych wyżej wskaźników jakości f_1^\square (III.145), f_2^\square (III.144a) i f_3^\square (III.147a). Badania przeprowadzono trzykrotnie, dla różnych obiektów regulacji drugiego rzędu: asymptotycznie stabilnego (AS), stabilnego nieasymptotycznie (NAS) oraz niestabilnego (NS), przedstawionych w podrozdziale III.2.3.1. Każdy z obiektów opisany jest równaniami stanu (III.59a), (III.59b), z macierzą stanu A równą odpowiednio

$$A^{\text{AS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad A^{\text{NAS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad A^{\text{NS}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Macierz wejścia B jest w każdym przypadku taka sama: $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}^T$. We wskaźniku jakości (III.127) przyjęto następujące wartości macierzy Q i R

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

Na rysunkach III.77, III.78 oraz III.79 zamieszczono szereg wykresów przedstawiających zależność zdefiniowanych wyżej kryteriów f_1^\square , f_2^\square i f_3^\square od okresu T . Kolejne rysunki odpowiadają trzem różnym obiektom regulacji: (AS), (NAS) oraz (NS). Wartości kryteriów f_i^\square dla $i \in \{1, 2, 3\}$, dla ekstrapolatorów ZOH, FOH i IFOH, dla systemów (AS), (NAS) i (NS), wyznaczono w programie MATLAB, po części korzystając z przybornika obliczeń symbolicznych (*Symbolic Toolbox*), a po części wykonując obliczenia numeryczne. Symbolicznie wyprowadzono macierze Φ^\square i Γ^\square oraz Q^\square , R^\square i S^\square , zaś numerycznie obliczano K^\square , X^\square , Q_c^\square , Ψ^\square oraz wartości f_1^\square , f_2^\square i f_3^\square . Dane, które posłużyły do stworzenia wykresów na rysunkach III.77, III.78 i III.79, powstały przez wielokrotne powtarzanie obliczeń dla stu wartości okresu T , wziętych równomiernie z przedziału $(0.15, 15]$. Dla zwiększenia czytelności wykresów III.77c oraz III.79c, zastosowano na nich podziałkę logarytmiczną dla osi rzędnych. We wszystkich przypadkach na wykresach pominięto wartości wskaźników jakości



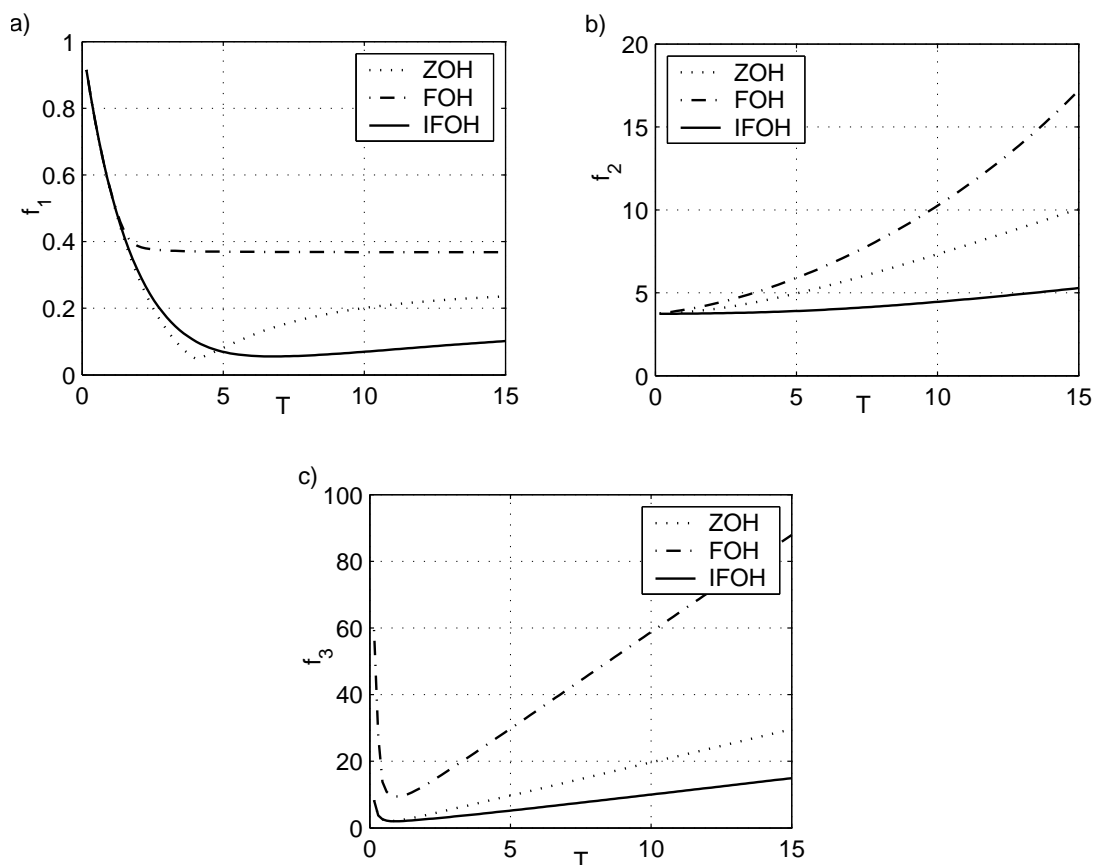
Rys. III.77: Porównanie kryteriów jakości regulacji w układzie z obiektem asymptotycznie stabilnym (AS): a) moduł dominującego bieguna zamkniętego układu regulacji z macierzą Ψ^\square , b) największa wartość własna formy kwadratowej $x[0] X^\square x[0]$, c) współczynnik uwarunkowania macierzy sterowalności Q_c^\square .

Tab. III.8: Wartości wskaźników f_1 , f_2 i f_3 dla układów (AS), (NAS) i (NS) z czasem ciągłym.

Kryterium jakości	Typ obiektu		
	(AS)	(NAS)	(NS)
f_1	-0.6803	-0.5903	-0.6290
f_2	2.8712	3.7311	5.4337
f_3	26.9629		

w układzie sterowania z czasem ciągłym (zamiast tego zebrano je w tabeli III.8). Odpowiadałyby im poziome linie proste (ze względu na brak zależności od T).

Otrzymane wykresy potwierdzają przypuszczenie podane we wstępie. Zastąpienie ekstrapolatora ZOH lub FOH elementem IFOH pozwala znacznie wydłużyć okres próbkowania T w układzie (z T_1 do T_2 , gdzie $T_2 > T_1$), przy zachowaniu nie pogorszonej jakości regulacji. Dotyczy to zwłaszcza kryteriów f_2 i f_3 . W systemie rozproszonym oznacza to możliwość obniżenia częstotliwości przesłań w sieci. Jeśli sieć jest zdolna do pracy z obiema częstotliwościami $1/T_1$ i $1/T_2$, oznacza to jedynie obniżenie jej obciążenia. Pozwala to wykorzystać ją do przenoszenia dodatkowego ruchu, często generowanego przez inne układy regulacji. Jeśli natomiast sieć nie jest zdolna pracować z czę-



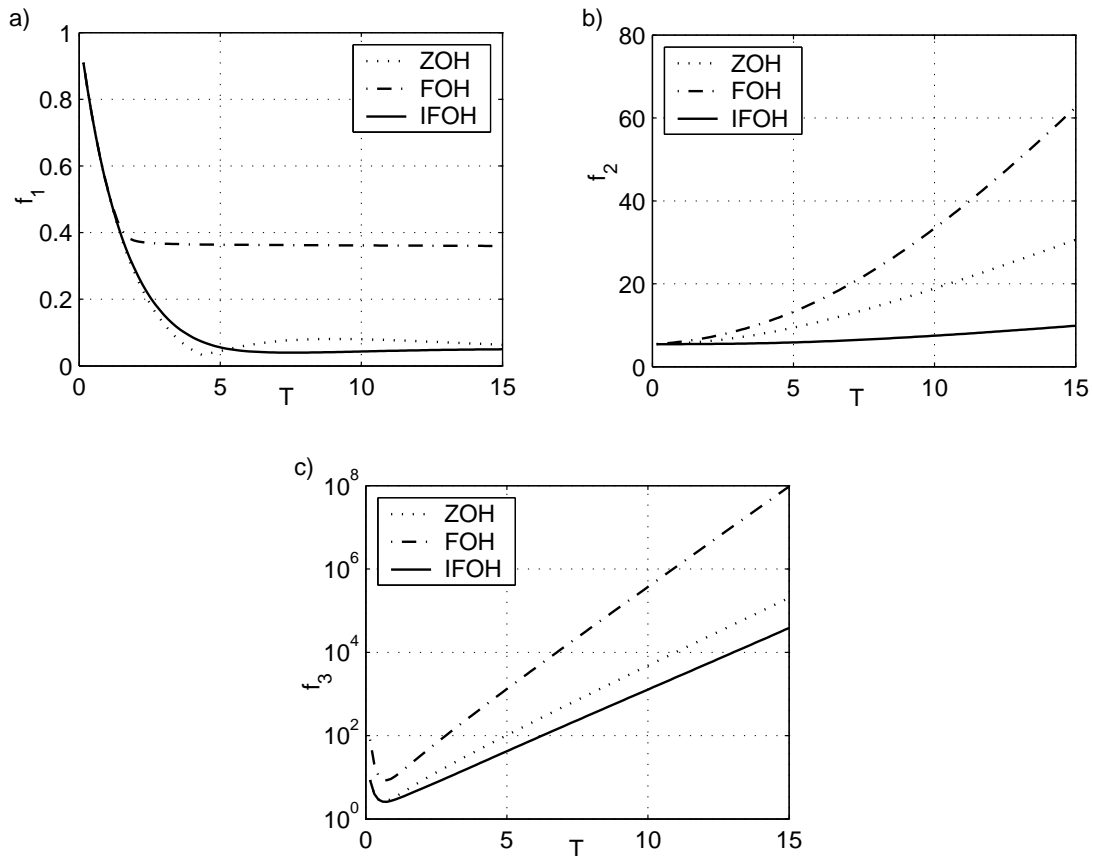
Rys. III.78: Porównanie kryteriów jakości regulacji w układzie z obiektem stabilnym nieasymptotycznie (NAS): a) moduł dominującego bieguna zamkniętego układu regulacji z macierzą Ψ^{\square} , b) największa wartość własna formy kwadratowej, c) współczynnik uwarunkowania macierzy sterowalności.

stotliwością $1/T_1$ (może natomiast przesyłać dane z okresem T_2), zmiana ekstrapolatora na IFOH pozwala uniknąć konieczności wymiany sieci na szybszą. W większości przypadków rozwiązanie to będzie ekonomicznie uzasadnione. Wreszcie w układach, w których sieć wprowadza opóźnienia komunikacyjne τ , wydłużenie okresu próbkowania T zmniejsza stosunek τ/T , a przez to redukuje wpływ opóźnień na pracę układu.

Co ciekawe, w analizowanych przypadkach ekstrapolator FOH, mimo większej złożoności realizowanego przezeń algorytmu, okazał się mniej skuteczny od elementu ZOH (w świetle oceny przy pomocy wskaźników f_1^{\square} , f_2^{\square} i f_3^{\square}). Wynik ten wyjaśnia, dlaczego ekstrapolator ten w zasadzie nie jest stosowany w praktycznych układach regulacji.

III.3 Uodparnianie rozproszonego układu regulacji na utratę pakietów w sieci telekomunikacyjnej

W typowym rozproszonym układzie regulacji pętla sprzężenia zwrotnego zamknięta jest przez sieć telekomunikacyjną. Niektóre typy sieci i protokołów sieciowych nie zapewniają niezawodnego dostarczania wysłanych danych – część spośród transmitowanych w nich pakietów może zostać odrzucona, a to oznacza naruszenie kompletności informacji i zaburzenie harmonogramu sterowania. Powoduje to zwykle pogorszenie jakości regulacji, a w niektórych przypadkach może doprowadzić do utraty



Rys. III.79: Porównanie kryteriów jakości regulacji w układzie z obiektem niestabilnym (NS): a) moduł dominującego bieguna zamkniętego układu regulacji, b) największa wartość własna formy kwadratowej, c) współczynnik uwarunkowania macierzy sterowalności.

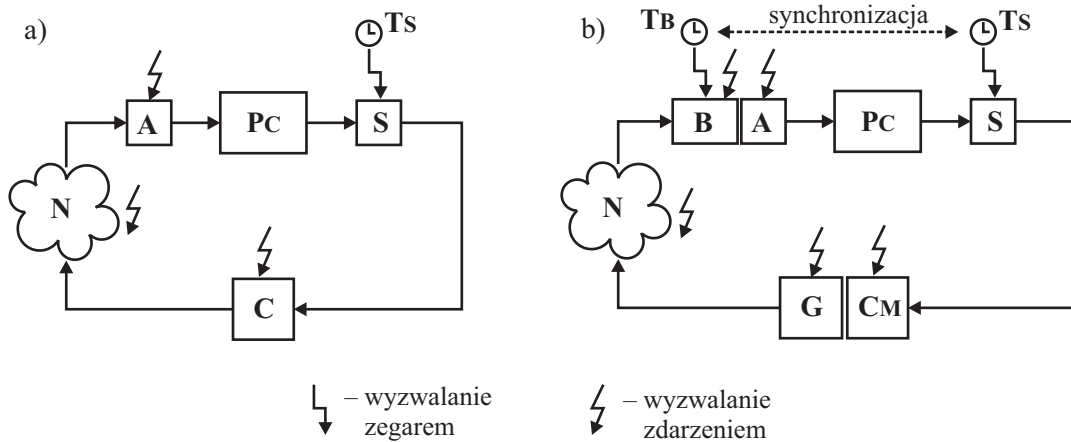
stabilności systemu. Możliwości uodparniania układu na gubienie pakietów zależą od umiejscowienia sieci telekomunikacyjnej. Jeśli jest ona umieszczona między regulatorem (kompensatorem dynamicznym) a urządzeniem wykonawczym, jeden z dostępnych sposobów zaradzenia problemowi utraty informacji polega na uzupełnianiu każdego pakietu przesyłającego wartość sterowania o prognozy przyszłych sterowań na kilka kroków naprzód [93, 102]. Estymaty wyznaczone są w oparciu o znany model obiektu. Wówczas, w razie nieotrzymania aktualnego pakietu, zamiast brakującej wartości sterowania aktuator może wykorzystywać jego estymatę z jednego z poprzednich pakietów. Jeśli sieć obecna jest na drodze sygnału pomiarowego z czujnika do regulatora (kompensatora), problemowi gubienia pakietów można po części zaradzić stosując w kompensatorze technikę predykcji stanu obiektu. W pewnych sytuacjach wymienione rozwiązania pozwalają zapewnić satysfakcjonującą jakość regulacji oraz zachować stabilność układu, mimo występowania zjawiska gubienia pakietów. W dalszej części podrozdziału opisano dokładniej oba przypadki (sieć na drodze regulator–aktuator albo czujnik–regulator), podając szczegóły działania algorytmów, uzupełnione wskazówkami implementacyjnymi. Dla pierwszego wariantu zaprezentowano wyniki symulacji komputerowych i eksperymentów po części praktycznych, potwierdzających skuteczność jego działania. Odniesiono się również do zagadnienia stabilności rozważanych układów regulacji.

Podobna technika wykorzystania modelu obiektu do estymacji stanu lub sterowania stosowana została w rozwiązaniach opisanych w podrozdziałach III.1.1 i następnych. Tam przyczyną utraty

danych były zmienne w czasie opóźnienia w przesyłaniu danych, tutaj natomiast – gubienie pakietów sieciowych. Wówczas o opóźnieniach zakładano, że są mniejsze od okresu próbkowania, obecnie zaś dopuszczamy występowanie wielu nieudanych transmisji pod rząd (choć również założymy ograniczenie długość takiego ciągu). Ze względu na odmienny charakter niekorzystnych zjawisk rozważanych w niniejszym podrozdziale, odmienny jest też sposób ograniczania ich wpływu na układ regulacji.

III.3.1 Sieć telekomunikacyjna umieszczona na drodze sygnału sterującego

Na rysunku III.80a przedstawiono schemat blokowy typowego rozproszonego układu regulacji [141]. W jego skład wchodzi: obiekt regulacji **PC** z czasem ciągłym, współpracujący z czujnikiem (sensorem) **S** i akuatorem (urządzeniem wykonawczym) **A**, kompensator dynamiczny lub regulator **C** oraz sieć telekomunikacyjna **N**. Ta ostatnia pośredniczy w przesyłaniu pakietów zawierających



Rys. III.80: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji: a) wersja podstawowa, b) wersja zmodyfikowana: **PC** – obiekt regulacji z czasem ciągłym, **S** – czujnik (sensor), **A** – urządzenie wykonawcze (akuator), **C**, **CM** – kompensatory dynamiczne (regulatory), **G** – bramka, **B** – bufor, **Ts**, **TB** – zsynchronizowane zegary.

próbki sygnału sterującego z kompensatora **C** do akuatora **A**, realizującego algorytm ZOH. Sygnał wyjściowy obiektu **PC** jest w dyskretnych chwilach czasu mierzony przez czujnik **S**, a uzyskane próbki wędrują bezpośrednio do kompensatora **C**. Czujnik **S** taktowany jest z okresem T przez zegar **Ts**, natomiast akcje dyskretnego kompensatora **C** oraz urządzenia wykonawczego **A** wyzwalane są zdarzeniami polegającymi na otrzymaniu oczekiwanej próbki sygnału. Zdarzeniem inicjowany jest również przesył pakietu danych przez sieć **N**.

W dalszych rozważaniach zakładając będziemy dla uproszczenia, że akcje czujnika, akuatora oraz kompensatora wykonywane są natychmiastowo po ich wyzwoleniu (odpowiednio zegarem lub zdarzeniami), a czas trwania pojedynczej akcji jest równy zero (nie występują opóźnienia obliczeń, pomiarów ani aktuacji). Założymy również, że sieć telekomunikacyjna nie wprowadza istotnych opóźnień w przesyłaniu danych, a przesył rozpoczyna się natychmiast po otrzymaniu nowego pakietu. Dopuścimy jednak możliwość zagubienia pakietu w sieci, skutkującą niedostarczeniem go do odbiorcy. Przez zgubienie pakietu rozumieć tu można nie tylko przypadek, w którym został on odrzucony przez sieć (nie dotarł do węzła odbiorczego, mimo umieszczenia go w interfejsie sieciowym węzła nadawczego), ale również sytuację, gdy dotarł do odbiorcy z opóźnieniem większym od

dopuszczalnego.

Cykl pracy układu regulacji, w którym nie wystąpiło odrzucenie pakietu, przebiega następująco: Czujnik **S**, pobudzony impulsem z zegara **T_S**, próbkuje sygnał wyjściowy obiektu **P_C** i przesyła wynik pomiaru do kompensatora **C**. Kompensator oblicza wartość sterowania i przesyła ją przez sieć **N** do aktuatora **A**, który podaje ją na wejście obiektu **P_C**. Wobec przyjętych założeń, czas trwania wszystkich obliczeń jest zerowy. Jeśli jednak w sieci zdarzy się zgubienie pakietu, wówczas aktuator, nie otrzymawszy wartości sterowania przewidzianej dla danej chwili czasu, podaje na obiekt w zastępstwie wartość otrzymaną poprzednio. Oznacza to chwilowe sterowanie z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego i nieadekwatną wartością sygnału sterującego. Może się to przyczynić do pogorszenia jakości sterowania lub doprowadzić do utraty stabilności układu regulacji.

Dalej zaproponowano pewien środek zaradczy przeciwko skutkom gubienia pakietów. Kompensator powinien wyznaczać w każdym kroku obliczeń nie tylko aktualna wartości sterowania, ale też prognozy (estymaty) próbek sterowań dla kilku następnych kroków, obliczone na podstawie prognoz stanu obiektu. Pojedynczy pakiet, wysyłany przez kompensator z okresem T , zawiera w takim przypadku nie jedną, lecz kilka wartości sygnału sterującego: aktualną próbkę wraz z kilkoma prognozami na przyszłość. Jeśli pakiet taki przedostanie się przez sieć bez przeszkód, aktuator wykorzysta zawartą w nim aktualną wartość sterowania, a towarzyszące jej prognozy zapamiętane zostaną w podręcznej pamięci (buforze). Jeśli natomiast w pewnym kroku próbkowania nowy pakiet zostanie w sieci zagubiony, urządzenie wykonawcze może wykorzystać prognozę sterowania przeznaczoną dla tego kroku, wziętą z jednego z wcześniej otrzymanych pakietów, zapamiętanych w pamięci podręcznej. Dzięki temu zmniejsza się prawdopodobieństwo sytuacji, gdy aktuator, pozbawiony oczekiwanego pakietu, zmuszony jest stosować poprzednią, przeterminowaną i nieadekwatną wartość sterowania. Schemat układu regulacji, który realizuje opisany algorytm, przedstawiony jest na rysunku III.80b. Na schemacie tym aktuator poprzedzony jest buforem **B**, przechowującym odebrane przez sieć dane i zarządzającym nimi. Drugim dodatkowym elementem, który nie występował na schemacie z rysunku III.80a, jest bramka **G**, składająca w paczki (pakiety) wartość sterowania i jego prognoz, obliczone przez odpowiednio zmodyfikowaną wersję kompensatora **C_M**. Bufor **B** w tym układzie wyzwalany jest zegarem **T_B**, zsynchronizowanym z **T_S** (jednakowy okres T i zerowe przesunięcie fazowe). Obecność dodatkowego zegara jest niezbędna, by bufor mógł wykryć fakt zagubienia pakietu i zamiast brakującej wartości sterowania, przesłać do aktuatora jego estymatę wziętą z pakietu wcześniejszego.

Przedstawione tu skrótowo mechanizmy działania kompensatora **C_M** z bramką **G** i aktuatora **A** z buforem **B** objaśnione zostaną dokładniej w następnym podrozdziale. Dwa kolejne podrozdziały prezentują wyniki symulacyjnego i eksperymentalnego badania przykładowego układu regulacji, wykorzystującego zaproponowane algorytmy. Następna sekcja porusza kwestię stabilności opisywanego układu regulacji. Ostatnia, podsumowująca sekcja, zawiera uwagi końcowe.

III.3.1.1 Algorytmy kompensatora i aktuatora

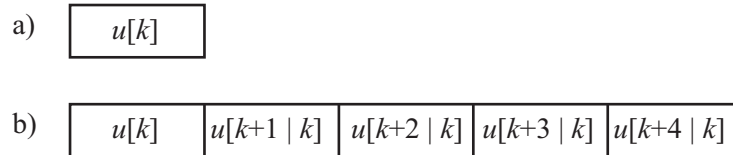
Niech obiekt **PD** z czasem dyskretnym, uzyskany przez dyskretyzację obiektu **PC** z czasem ciągłym, opisany będzie równaniem stanu, niekoniecznie liniowym

$$x[k+1] = f(x[k], u[k]), \quad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x[0] \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}$$

W podstawowym układzie regulacji, przedstawionym na rysunku III.80a, kompensator **C** otrzymuje w chwili czasu o indeksie k (dla uproszczenia zwanej dalej *chwilą czasu* k) z czujnika **S** pełną informację o stanie $x[k] \in \mathbb{R}^n$ obiektu **PD**, by na jej podstawie wyznaczyć aktualną wartość sterowania

$$u[k] = h(x[k]), \quad u[k] \in \mathbb{R}^p, \quad h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Wartość ta jest bezzwłocznie wysyłana do aktuatora **A**. Przenoszący ją pakiet sieciowy zawiera wyłącznie próbkę $u[k]$ (rysunek III.81a). W zmodyfikowanym układzie z rysunku III.80b, wykorzy-



Rys. III.81: Zawartość sieciowego pakietu danych: a) dla wersji podstawowej układu regulacji, b) dla wersji zmodyfikowanej z predykcją sterowań i grupowaniem próbek z horyzontem predykcji $M=4$.

stującym algorytm opisany w poprzednim podrozdziale, pakiet sieciowy uzupełniany jest o prognozowane wartości sterowań M kroków naprzód. Za M rozsądnie jest wziąć największą spodziewaną liczbę następujących bezpośrednio po sobie nieudanych transmisji. Tak utworzony pojedynczy pakiet zawiera następujące dane: $(u[k], u[k+1 | k], \dots, u[k+M | k])$ (rysunek III.81b). Prognozy sterowania należy wyznaczać równoległe z prognozami stanu obiektu według równań

$$x[k+1 | k] = f(x[k], u[k]) \tag{III.148a}$$

$$u[k+1 | k] = h(x[k+1 | k]) \tag{III.148b}$$

$$x[k+2 | k] = f(x[k+1 | k], u[k+1 | k]) \tag{III.148c}$$

$$u[k+2 | k] = h(x[k+2 | k]) \tag{III.148d}$$

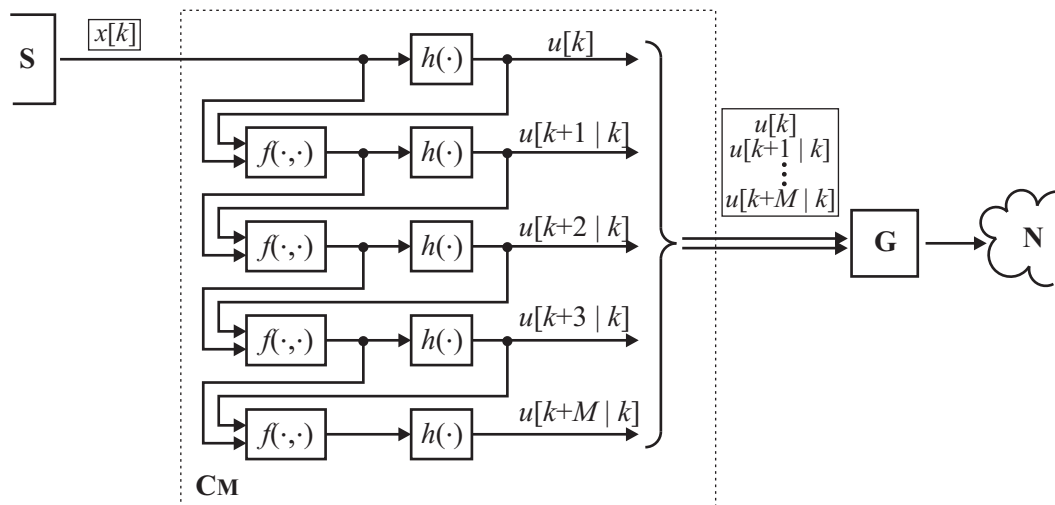
...

$$x[k+M | k] = f(x[k+M-1 | k], u[k+M-1 | k]) \tag{III.148e}$$

$$u[k+M | k] = h(x[k+M | k]) \tag{III.148f}$$

Zapis $u[k+q | k]$ oznacza prognozę sterowania na q kroków naprzód, dla chwili czasu $k+q$, wyznaczoną w chwili k , na podstawie zmierzonej wartości stanu $x[k]$. Ze wzorów (III.148a)–(III.148f) wynika, że dla prognozowania sterowania jest konieczne równoczesne prognozowanie stanu, które z kolei jest możliwe tylko wówczas, gdy znany jest model matematyczny obiektu. W kolejnej, $(k+1)$ -szej chwili czasu, kompensator **CM** powtarza całą opisaną wyżej procedurę. Nie jest przy tym wskazane korzystanie z obliczonych w poprzednim kroku wartości $u[k+1 | k], \dots, u[k+M | k], x[k+1 | k], \dots, x[k+M | k]$. Estymaty sterowań i stanów powinny być w każdym kroku wyznaczone od nowa, ponieważ w każdym kroku kompensator otrzymuje świeższy, aktualniejszy pomiar stanu obiektu.

Algorytm działania kompensatora przedstawiono w postaci schematu blokowego na rysunku III.82.



Rys. III.82: Schemat blokowy algorytmu kompensatora **CM** dla horyzontu predykcji $M = 4$.

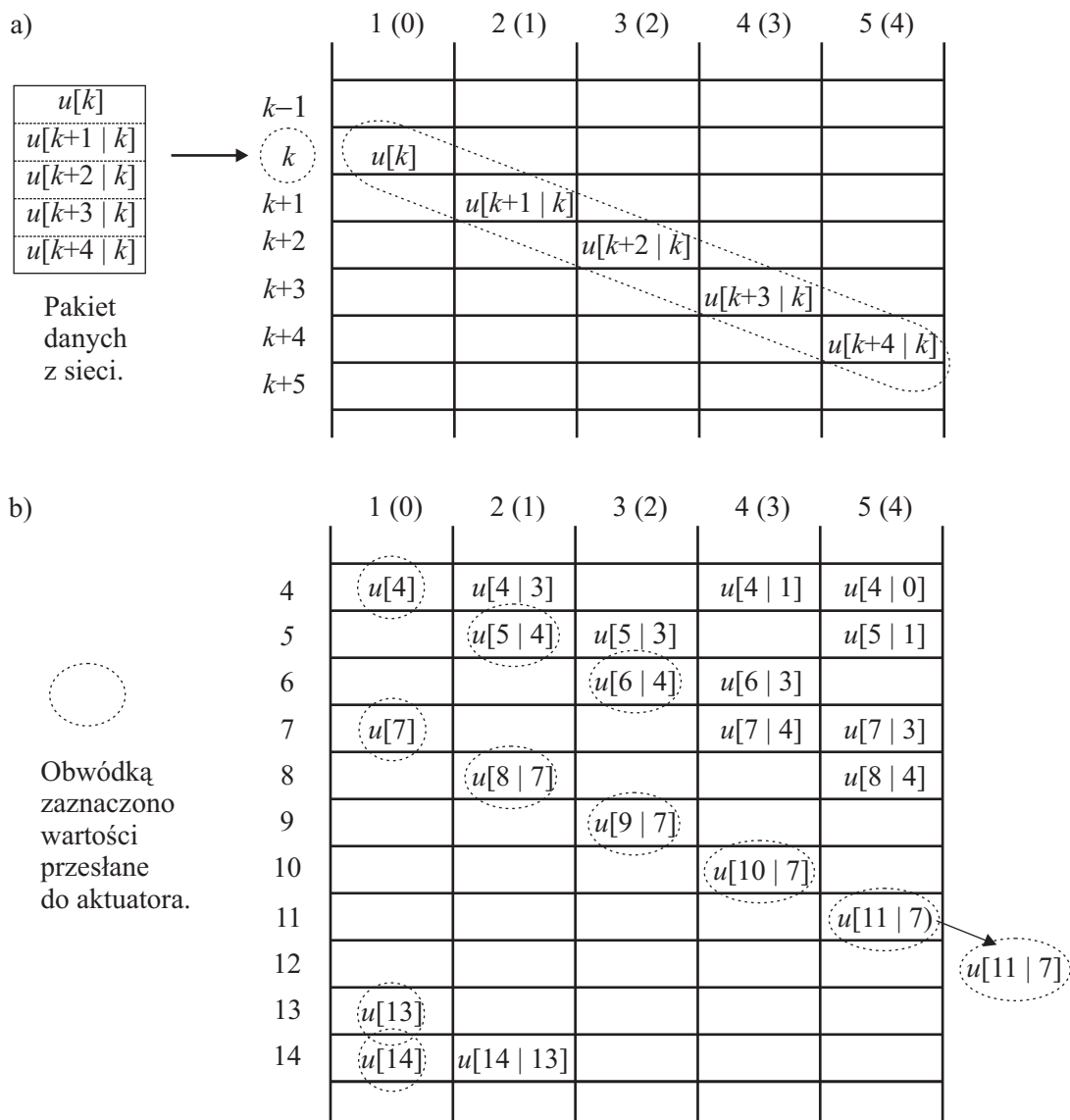
Bufor **B**, po otrzymaniu nowego pakietu z „paczką” sterowań, umieszcza zawarte w nim wartości w pomocniczej pamięci, która może być zorganizowana w formie tablicy (macierzy), przedstawionej na rysunku III.83. Numer wiersza w tablicy odpowiada numerowi chwili czasu, w której ma być

	1 (0)	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)
4	$u[4]$	$u[4 3]$	$u[4 2]$	$u[4 1]$	$u[4 0]$
5	$u[5]$	$u[5 4]$	$u[5 3]$	$u[5 2]$	$u[5 1]$
6	$u[6]$	$u[6 5]$	$u[6 4]$	$u[6 3]$	$u[6 2]$
7	$u[7]$	$u[7 6]$	$u[7 5]$	$u[7 4]$	$u[7 3]$
8	$u[8]$	$u[8 7]$	$u[8 6]$	$u[8 5]$	$u[8 4]$
9	$u[9]$	$u[9 8]$	$u[9 7]$	$u[9 6]$	$u[9 5]$

Rys. III.83: Pamięć podręczna na otrzymane dane w buforze **B** dla horyzontu predykcji $M = 4$.

zastosowana wartość sterowania z tego wiersza. Numer kolumny (pomniejszony o jeden) oznacza długość horyzontu predykcji (prognozowania), któremu odpowiada wartość umieszczona w tej kolumnie (prognoza na q kroków w przód wpisywana jest do $(q + 1)$ -szej kolumny). Rysunek III.84a przedstawia sposób wpisywania (na ukos) do tablicy danych z pakietu docierającego przez sieć, zaś na rysunku III.84b pokazano, w jaki sposób wybierane są (w poziomie) wartości sterowań przeznaczone do przekazania aktuatorowi. Oba rysunki odpowiadają przypadkowi, gdy $M = 4$.

Pierwsza wartość sterowania z pakietu opatrzonego znacznikiem czasowym k wpisywana jest w tablicy do komórki o indeksach $(k, 1)$. Oznacza to, że jest ona przeznaczona dla chwili czasu k i że wyznaczona była w oparciu o zmierzoną wartość stanu, a nie jego prognozę. Druga wartość sterowania z pakietu trafia do komórki $(k + 1, 2)$, co oznacza, że przeznaczona jest dla chwili czasu $k + 1$ i wyliczono ją w oparciu o jednokrokową prognozę stanu. Kolejne wartości sterowań z pakietu



Rys. III.84: Sposób zapisu (a) i odczytu (b) danych w pamięci podręcznej bufora **B** dla horyzontu predykcji $M = 4$.

umieszczane są w komórkach $(k + q, q + 1)$, przy czym $0 \leq q \leq M$.

W kolejnych chwilach czasu bufor odczytuje z tablicy wartości sterowań i przesyła je do aktuatora. W k -tej chwili czasu przeglądana jest zawartość k -tego wiersza w tablicy w poszukiwaniu wpisanych danych. Pobierana jest wartość z pierwszej niepustej (o jak najniższym numerze kolumny) komórki w danym wierszu (na rysunku III.84b – wartość z komórki otoczonej linią przerywaną). Pobranie wartości z pierwszej kolumny oznacza sterowanie w oparciu o aktualne, nieopóźnione dane. Pobranie wartości z dalszych kolumn to sterowanie w oparciu o dane prognozowane, pochodzące z pakietów otrzymanych w poprzednich krokach.

Opisany wyżej algorytm gwarantuje, iż w każdym kroku aktuator otrzyma aktualną wartość sterowania lub jego najświeższą prognozę, jaka dotarła do tego czasu do bufora (najświeższa prognoza oznacza wartość wyznaczoną z najkrótszym horyzontem czasowym). Dzięki temu, jeśli oczekiwany pakiet nie dotrze na czas, do obiektu doprowadzana jest prognozowana wartość sterowania, która jest bardziej uzasadniona, niż na przykład kopia wartości z poprzedniego kroku. Opisana „ciągłość”

sterowania jest jednak zachowana jedynie wtedy, jeśli przerwa w dostarczaniu pakietów nie przekroczy M kroków. Jeśli się to zdarzy, bufor powtarza ostatnią podaną na aktuator wartość sterowania (rysunek III.84b, wiersz 12) lub też wartość zero, jeśli od chwili uruchomienia układu regulacji nie napłynął jeszcze żaden pakiet z kompensatora.

W miarę upływu czasu, zorganizowana w formie macierzy pamięć podręczna bufora \mathbf{B} rozrasta się „w dół” (zwiększają się numery wierszy macierzy). Jednocześnie, dane zawarte we wcześniejszych, „górnym” fragmentach przestają być potrzebne. Dlatego w praktycznych realizacjach pamięć ta może być zorganizowana w formie bufora cyklicznego. Minimalna wymagana „długość” czy raczej „wysokość” (liczba wierszy) tego bufora to $M + 1$.

W następnym podrozdziale przedstawione będzie porównanie działania dwóch rozproszonych układów regulacji, dokonane w oparciu o wyniki symulacji komputerowych. Układy te różnią się użytymi algorytmami aktuatora i kompensatora. W pierwszym przypadku zastosowany jest opisany powyżej zmodyfikowany schemat sterowania, w którym pakiet przesyłany przez sieć zawiera aktualną wartość sterowania i M jego prognoz. W drugim, porównawczym przypadku, każdy pakiet z kompensatora zawiera tylko jedną (aktualną) wartość sterowania, a aktuator powtarza poprzednią wartość w przypadku nieotrzymania na czas świeżych danych („podstawowy” układ regulacji).

III.3.1.2 Wyniki badań symulacyjnych dla przykładowego obiektu regulacji

Do symulacji wykorzystano liniowy, stacjonarny, skończenie wymiarowy obiekt regulacji \mathbf{PD} , drugiego rzędu, o jednym wejściu, z czasem dyskretnym, opisany równaniem stanu

$$x[k + 1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (\text{III.149})$$

gdzie

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.1823 \\ 0 & 0.8281 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.07005 \\ 0.6792 \end{bmatrix} \quad (\text{III.150})$$

oraz

$$x[k] \in \mathbb{R}^n, \quad n = \dim x[k] = 2, \quad u[k] \in \mathbb{R}^p, \quad p = \dim u[k] = 1, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

Równanie różnicowe (III.149) wraz z macierzami (III.150) otrzymano przez dyskretyzację typu „ZOH”, z okresem próbkowania $T = 0.2$, równania stanu

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (\text{III.151})$$

z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.9434 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.726 \end{bmatrix} \quad (\text{III.152})$$

gdzie

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, \infty)$$

Okres próbkowania T to zarazem okres, z jakim zegary \mathbf{Ts} i \mathbf{TB} , pokazane na rysunku III.80b, taktują elementy \mathbf{S} i \mathbf{B} układów regulacji.

Równanie stanu (III.151) wraz z danymi (III.152) stanowi uproszczony model matematyczny serwomechanizmu prądu stałego, sterowanego napięciem przyłożonym do zacisków komutatora silnika ze wzbudzeniem od magnesów trwałych [103]. Podobny obiekt opisano wcześniej w podrozdziale III.2.3.1. Otrzymane równanie stanu (III.151) jest stabilne, ale nie asymptotycznie: jedna z wartości własnych macierzy A jest równa zeru, druga jest rzeczywistą liczbą ujemną. Taką samą własność stabilności posiada uzyskane przez dyskretyzację równanie (III.149). Tutaj jedna z dwóch rzeczywistych wartości własnych macierzy Φ jest równa jedności, a druga należy do przedziału $(0, 1)$.

Wartości liczbowe elementów macierzy A i B (wzory (III.152)) uzyskano w wyniku identyfikacji parametrów rzeczywistego, laboratoryjnego serwomechanizmu prądu stałego [120]. Układ ten wykorzystywano podczas eksperymentów, których wyniki przedstawione są w następnym podrozdziale.

Dyskretny w czasie system dynamiczny (III.149) jest sterowalny i może być ustabilizowany przy pomocy odpowiednio dobranego statycznego macierzowego (wielowymiarowego) regulatora proporcjonalnego od stanu x , opisanego formułą

$$u[k] = -K x[k], \quad K \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (\text{III.153})$$

Macierz wzmocnień K regulatora można wyznaczyć metodą lokowania biegunów (przesuwania wartości własnych), zadając wartości własne macierzy $\Phi - \Gamma K$ zamkniętego układu regulacji. Dla $\lambda(\Phi - \Gamma K) = \{0.8106, 0.8106\}$ (podwójny biegun rzeczywisty, asymptotycznie stabilny) uzyskuje się wynik $K = \begin{bmatrix} 0.2640 & 0.2773 \end{bmatrix}$. Wykorzystano go w badaniach symulacyjnych, przeprowadzonych przy pomocy pakietu obliczeń numerycznych MATLAB/*Simulink*. Analizowano dwie różne wersje układu: z predykcją sterowań (zmodyfikowaną) i bez niej (podstawową). Symulacje w układzie z grupowaniem przeprowadzono dla horyzontu predykcji $M = 12$. Przed symulacjami, w obu systemach przedstawionych na rysunkach III.80a i III.80b wprowadzono pewne modyfikacje, używając układy pokazane na schematach III.85a i III.85b. Pierwsza zmiana polega na wprowadzeniu losowo niezależnych zakłóceń stochastycznych $z[k]$, które dodają się do sygnału wyjściowego obiektu. Druga różnica wiąże się z wprowadzeniem zadajników \mathbf{R} i \mathbf{RM} , generujących prostokątny przebieg wartości zadanej $r_1[k]$ o okresie $T_r = N_r T = 60 \cdot T$ i amplitudzie $A_r = 1.5$. Wartość zadana $r_1[k]$ odpowiada pierwszej składowej wektora stanu $x_1[k]$. Druga składowa $r_2[k]$ wektora $r[k]$ jest równa zeru. Zegar \mathbf{TR} taktujący zadajnik pracuje synchronicznie z zegarem \mathbf{Ts} . Ze względu na obecność niezerowego sygnału wartości zadanej $r[k]$, wzór (III.153), który opisuje regulator, należy zastąpić formułą

$$u[k] = K (r[k] - x[k] - z[k])$$

w której uwzględniono również zakłócenia $z[k]$. Analogiczne zmiany trzeba wprowadzić w równa-

niach (III.148b)–(III.148f), wykorzystywanych przez kompensator **CM**

$$x[k+1|k] = \Phi(x[k] + z[k]) + \Gamma u[k] \quad (\text{III.154a})$$

$$u[k+1|k] = K(r[k+1] - x[k+1|k]) \quad (\text{III.154b})$$

$$x[k+2|k] = \Phi x[k+1|k] + \Gamma u[k+1|k] \quad (\text{III.154c})$$

$$u[k+2|k] = K(r[k+2] - x[k+2|k]) \quad (\text{III.154d})$$

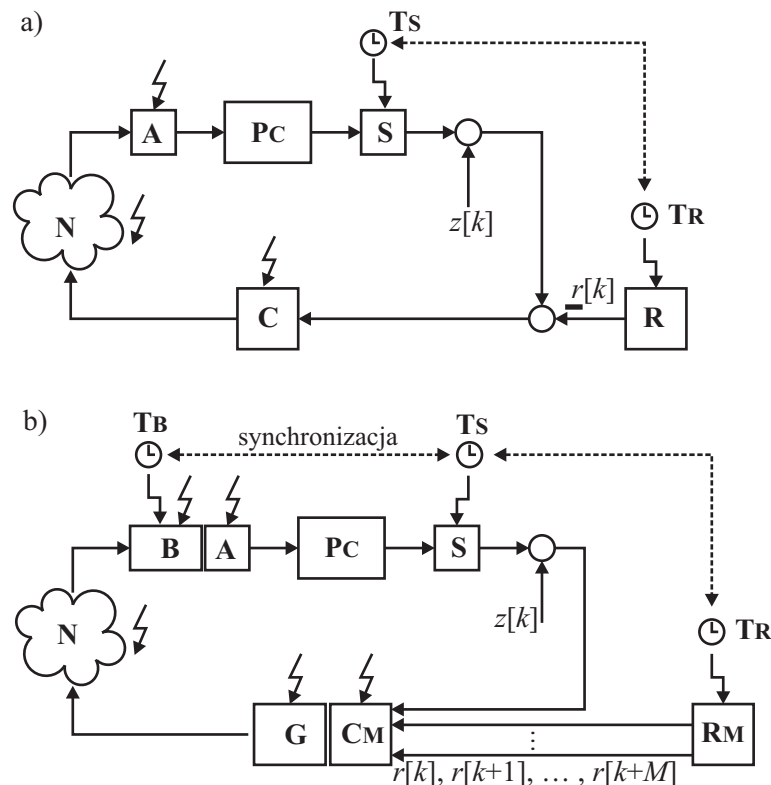
...

$$x[k+M|k] = \Phi x[k+M-1|k] + \Gamma u[k+M-1|k] \quad (\text{III.154e})$$

$$u[k+M|k] = K(r[k+M] - x[k+M|k]) \quad (\text{III.154f})$$

Na rysunku III.85a widać węzeł sumacyjny, wyliczający różnicę $x[k] + z[k] - r[k]$. Nie ma go natomiast na schemacie III.85b, na którym oba sygnały: $x[k] + z[k]$ oraz $r[k]$ wprowadzono niezależnie do bloku kompensatora **CM**. Widać tu również dodatkowe drogi przepływu sygnałów między zadajnikiem **RM** a kompensatorem **CM**, za pośrednictwem których w chwili czasu k zadajnik przekazuje kompensatorowi także przyszłe wartości zadane $r[k+1], \dots, r[k+M]$. Dzięki temu kompensator może wyznaczyć estymaty przyszłych stanów oraz sterowań $u[k+1|k], \dots, u[k+M|k]$ według wzorów (III.154a)–(III.154f).

W oparciu o schematy z rysunku III.85 przeprowadzono szereg badań symulacyjnych, przyjmując każdorazowo zerowe warunki początkowe dla obiektu **PD**. Horyzont czasowy, na którym prowadzono



Rys. III.85: Schematy blokowe układów regulacji wykorzystywanych podczas symulacji: a) wersja z przesyłaniem pojedynczej próbki, b) wersja z przesyłaniem pakietu próbek.

symulacje, wynosił $H = NT = 750 \cdot T$. Założono, że zegary **TS**, **TR** i **TB**, widoczne na schematach na rysunku III.85, pracują synchronicznie z jednakowym okresem T i zerowymi przesunięciami

fazowymi. Do oceny jakości regulacji służył sumacyjny, kwadratowy wskaźnik jakości ze skończonym horyzontem czasowym

$$J = \sum_{k=0}^N \|x[k] - \xi[k]\|^2$$

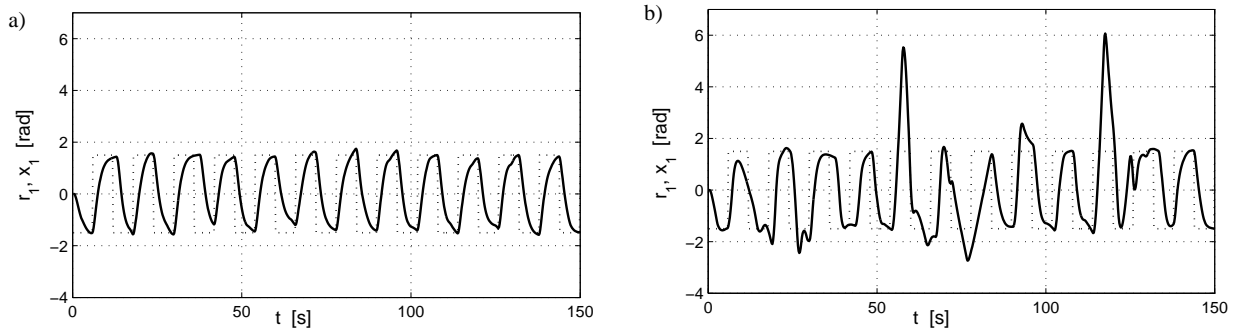
Występująca w nim porównawcza trajektoria stanu $\xi[k]$ odpowiada systemowi bez zakłóceń $z[k]$ i bez gubienia pakietów. Podczas symulacji pracy układów z rysunku III.85 założono, że pakiety danych w sieci dostarczane są z mniejszym od jedności prawdopodobieństwem $p = 0.2$. Zdarzenia polegające na zgubieniu pakietu w kolejnych okresach próbkowania są od siebie niezależne. Niezależne są również poszczególne składowe wektora zakłóceń $z_i[k]$ dla $i \in \{1, 2\}$ w kolejnych chwilach czasu $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Dla każdego k oraz i zmienna losowa $z_i[k]$ ma rozkład normalny o zerowej wartości średniej ($m = 0$) i wariancji $\sigma = 0.15$. Wyniki symulacji dla kilku różnych losowych ciągów zakłóceń i różnych sekwencji gubienia pakietów zamieszczone są w tabeli III.9. Użyty w nagłówku tabeli symbol J_0 oznacza wartość wskaźnika jakości w układzie bez kompensacji utraty danych („podstawowym”), zaś J_M – wartość wskaźnika dla przypadku przesyłania paczki składającej się ze sterowania i jego estymat. Parametr \varkappa to stosunek wskaźników jakości J_0 i J_M ($\varkappa = J_0/J_M$). Duża wartość wskaźnika \varkappa wskazuje na znaczną przewagę pod względem jakości regulacji układu z przesyłaniem paczki estymat sterowania w stosunku do systemu z przesyłaniem pojedynczej wartości. W ostatnim wierszu tabeli umieszczono wartości średnie, obliczone na podstawie danych z wierszy powyżej.

Tab. III.9: Porównanie jakości regulacji dla różnych wariantów układu sterowania (J_0 – wskaźnik jakości dla układu z przesyłaniem pojedynczej próbki, J_M – wskaźnik jakości w układzie z przesyłaniem grupy danych).

Nr	J_M	J_0	$\varkappa = J_0/J_M$
1	38.36	1431	37.30
2	30.12	2444	81.15
3	70.31	14485	206.0
4	350.5	2220	6.333
5	79.87	7607	95.25
6	22.09	1690	76.51
7	21.08	1833	86.95
8	77.73	2347	30.19
9	45.13	938.3	20.79
10	29.01	2936	101.2
Średnia	76.42	3.793	74.17

Dane z tabeli wskazują na wyraźną przewagę układu, w którym przesyłana jest „paczka” sterowań. Wyższa jakość regulacji w tym układzie może być jednak okupiona zwiększonym obciążeniem sieci komunikacyjnej \mathbf{N} (ze względu na większy rozmiar pakietu danych – patrz uwaga dotycząca protokołu Ethernet w rozdziale III.2.1.6) oraz większą złożonością obliczeń w kompensatorze (ze względu

na konieczność estymacji stanu i wyliczania nie jednej, lecz kilku wartości sterowania). Na rysunku III.86 przedstawiono przebiegi czasowe pierwszej zmiennej stanu x_1 , uzyskane w eksperymencie podobnym do tych, na podstawie których otrzymano dane zamieszczone w tabeli III.9.



Rys. III.86: Trajektorie stanu uzyskane w wyniku symulacji dla $M = 12$ i $p = 0.2$: a) układ z przesyłaniem paczki sterowań, b) układ z przesyłaniem pojedynczego sterowania (bez kompensacji gubienia pakietów) (x_1 – linia ciągła, r_1 – linia przerywana).

Uśredniona wartość stosunku wskaźników jakości $\varkappa = J_0/J_M$, umieszczona w ostatnim wierszu tabeli III.9, wynosi 74.17. Odpowiada on następującym parametrom symulacji: $p = 0.2$, $M = 12$. Zestawienie wartości współczynnika \varkappa , wyznaczonych w podobny sposób dla niezmiennego horyzontu predykcji $M = 12$ oraz różnych wartości prawdopodobieństwa p , zamieszczone jest w tabeli III.10. Uśrednianiu podlegało każdorazowo 100 wyników symulacji. Wyniki z tabeli (z wyjątkiem pierwszego wpisu) zaprezentowano również w postaci wykresu na rysunku III.87. Kształt krzywej

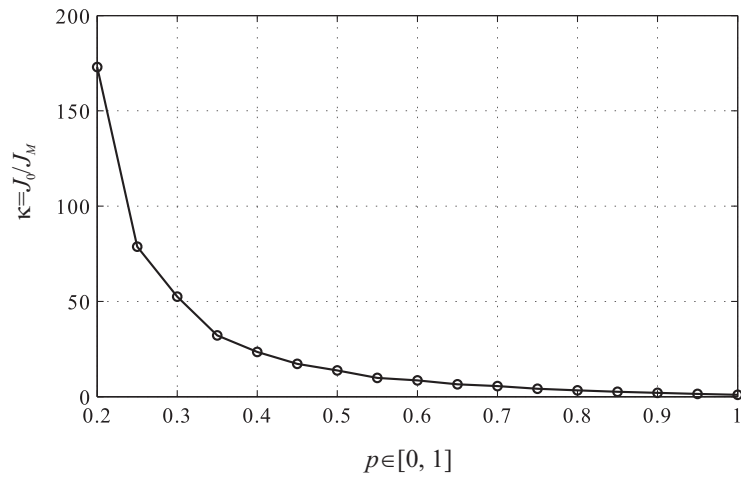
Tab. III.10: Zależność uśrednionego stosunku $\varkappa = J_0/J_M$ od prawdopodobieństwa p dla horyzontu predykcji $M = 12$.

p	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55
\varkappa	3071	173.0	78.7	52.5	32.2	23.5	17.2	13.7	9.84
p	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	1
\varkappa	8.56	6.51	5.57	4.13	3.27	2.54	2.00	1.47	1

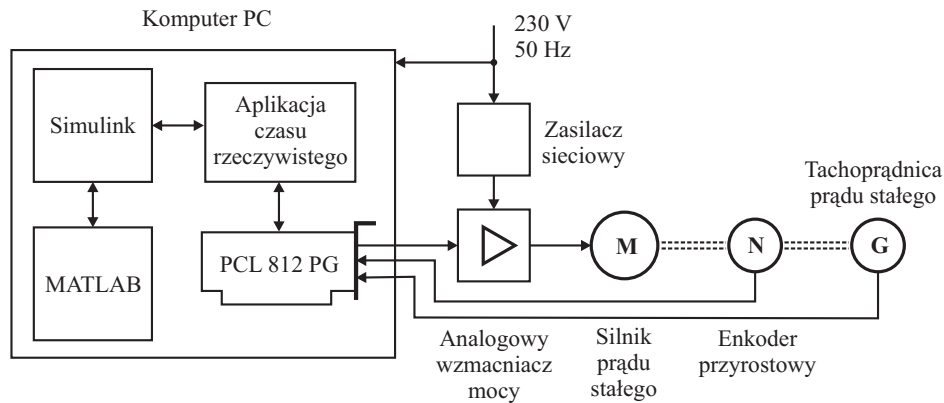
potwierdza łatwy do przewidzenia fakt: przewaga układu z grupowym przesyłaniem próbek jest tym większa, im większe prawdopodobieństwo zgubienia pakietu w sieci.

III.3.1.3 Wyniki eksperymentów

Opisany powyżej algorytm sterowania przetestowano praktycznie w układzie przedstawionym na rysunku III.88. W roli obiektu regulacji wykorzystano serwomechanizm prądu stałego o parametrach podanych w poprzednim podrozdziale (macierze (III.152) i (III.150)). Silnik serwomechanizmu zasilany był za pośrednictwem analogowego wzmacniacza mocy. Do pomiaru położenia kąтового wału silnika użyty został enkoder przyrostowy, zaś prędkość kątową mierzono przy pomocy tachoprądnicy prądu stałego. Algorytm sterowania zakodowano w postaci modelu graficznego utworzonego w Simulinku. Zastosowano horyzont predykcji $M = 12$. Uproszczona wersja modelu przedstawiona jest na rysunku III.89. Horyzont predykcji skrócono tu do $M = 4$, by zmniejszony dzięki temu



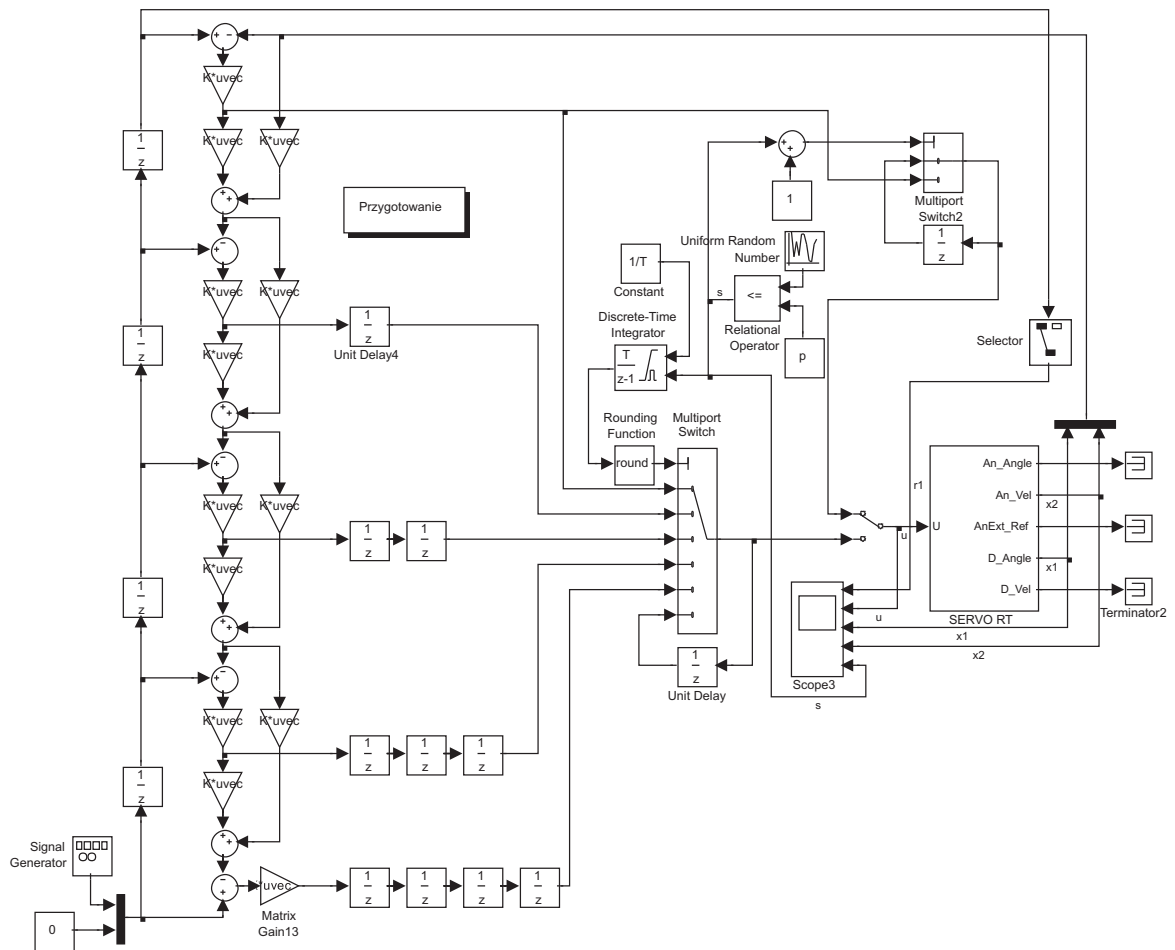
Rys. III.87: Zależność uśrednionego stosunku $\kappa = J_0/J_M$ od prawdopodobieństwa p dla horyzontu predykcji $M = 12$.



Rys. III.88: Schemat laboratoryjnego serwomechanizmu prądu stałego, użytego do eksperymentów.

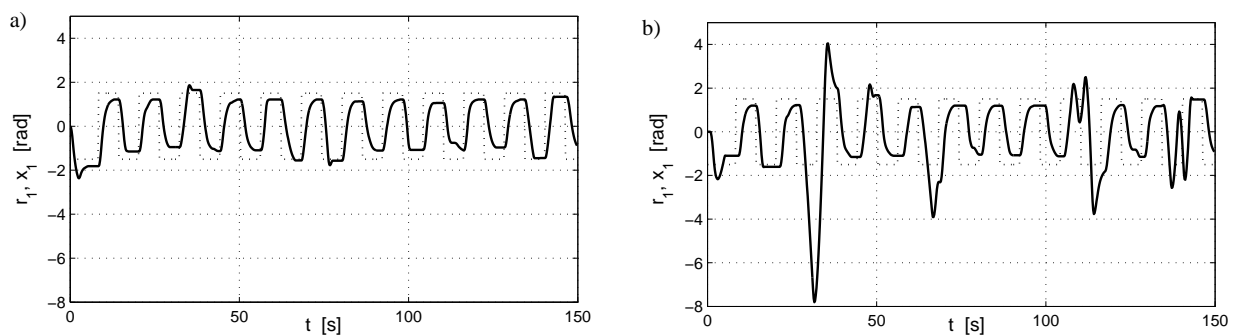
schemat zmieścił się na ilustracji. Na podstawie modelu, korzystając z przyborników *Real-Time Workshop* oraz *Real-Time Windows Target* (wchodzących w skład pakietu MATLAB) oraz kompilatora *Watcom C*, wygenerowano automatycznie aplikację sterującą czasu rzeczywistego. Aplikacja ta pracowała pod kontrolą systemu operacyjnego *Windows XP* i komunikowała się z obiektem regulacji za pośrednictwem uniwersalnej analogowo-cyfrowej karty wejścia-wyjścia PCL 812 PG. Karta współpracowała z magistralą ISA użytego komputera PC z procesorem *Intel Pentium III 700 MHz*. Podczas eksperymentów model utworzony wcześniej w Simulinku pełnił rolę interfejsu graficznego, umożliwiającego zarządzanie pracą aplikacji sterującej oraz rejestrowanie przebiegów czasowych sygnałów występujących w układzie regulacji. Jedyny element układu, który nie był w nim fizycznie obecny, to symulowana w aplikacji sterującej sieć komunikacyjna. Założono o niej, że nie wprowadza opóźnień transmisji, ale zdarza się w niej gubienie pakietów. Założono, że zjawisko to ma charakter probabilistyczny, odrzucenia w kolejnych chwilach czasu są losowo niezależne, a prawdopodobieństwo prawidłowej transmisji wynosi $p = 0.2$. Sieć modelowana jest między innymi przez następujące elementy, widoczne na schemacie na rysunku III.89: Uniform Random Number, Relational Operation, Discrete-Time Integrator, Multiport Switch, Unit Delay.

Wyniki doświadczeń zaprezentowane są na rysunku III.90 w formie trajektorii pierwszej współrzędnej wektora stanu obiektu regulacji. Zamieszczono tu dwa przebiegi, odpowiednio dla układu



Rys. III.89: Model aplikacji sterującej w Simulinku dla horyzontu predykcji skróconego do $M = 4$ (podczas symulacji i eksperymentów stosowano $M = 12$).

z grupowaniem wartości sterowań oraz z przesyłaniem pojedynczej próbki sterowania, uzyskane dla $p = 0.2$ i $M = 12$. Jakościowe porównanie zamieszczonych trajektorii potwierdza wnioski wycią-



Rys. III.90: Trajektorie stanu obiektu zarejestrowane podczas doświadczenia praktycznego: a) układ z grupowaniem próbek sterowania, b) układ z przesyłaniem pojedynczej próbki (x_1 – linia ciągła, r_1 – linia przerywana).

gnięte podczas symulacji. Jak wyraźnie widać, układ z grupowaniem próbek zapewnia lepszą jakość regulacji w stosunku do układu podstawowego.

III.3.1.4 Stabilność układu regulacji z prognozowaniem sterowań

Analizując stabilność opisanego układu sterowania (a także jakość regulacji oraz charakter występujących w nim przebiegów przejściowych) należy wziąć pod uwagę następujące czynniki [142]:

- niezgodność obiektu regulacji \mathbf{PD} z jego modelem matematycznym \mathbf{M} , użytym podczas projektowania kompensatora \mathbf{CM} ; niezgodność ta może dotyczyć zarówno struktury jak i parametrów,
- występowanie zakłóceń $z[k]$, które na schematach z rysunków III.85a i III.85b sprowadzono na wyjście obiektu \mathbf{PD} ,
- charakter zjawiska gubienia pakietów podczas transmisji sieciowych; szczególnie istotne jest, czy liczba kolejno następujących po sobie nieudanych transmisji jest ograniczona z góry (co jest w pewnym sensie równoważne istnieniu gwarantowanej, minimalnej częstotliwości udanych transferów).

Z punktu widzenia zapewnienia stabilności i wysokiej jakości regulacji, najkorzystniejszy jest „idealny” przypadek, w którym:

- model \mathbf{M} , użyty przy projektowaniu kompensatora \mathbf{CM} , zgadza się pod względem struktury i parametrów z obiektem \mathbf{PD} , opisanym równaniem stanu (III.149),
- w układzie nie występują zakłócenia $z[k]$,
- najdłuższa możliwa przerwa w transmisji sieciowej nie przekracza założonej długości horyzontu predykcji M .

Jeśli maksymalna długość przerw w transmisji nie przekracza horyzontu predykcji M , aktuator otrzymuje zawsze bądź aktualną wartość sterowania, bądź właściwą prognozę, przewidzianą na daną chwilę czasu. Nigdy nie występuje konieczność sterowania w oparciu o „przeterminowaną” estymatę, przeznaczoną dla któregoś z wcześniejszych okresów próbkowania. Założona pełna zgodność modelu z obiektem oraz brak zakłóceń gwarantują zgodność estymat stanu, wyznaczonych według wzorów (III.154a), (III.154c) i (III.154e), z faktycznym stanem obiektu \mathbf{PD} . Obie te okoliczności razem sprawiają, że w każdej dyskretniej chwili czasu aktuator otrzymuje taką samą wartość sterowania, jaką otrzymałby w układzie, w którym nie występuje gubienie pakietów. Warunkiem koniecznym i dostatecznym asymptotycznej stabilności takiego układu regulacji jest asymptotyczna stabilność (w sensie Schura) macierzy $\Phi - \Gamma K$. Spełnienie tego warunku w opisanych wyżej symulacjach i doświadczeniach było zapewnione dzięki odpowiedniemu doborowi macierzy regulatora proporcjonalnego K metodą lokowania biegunów (przesuwania wartości własnych) [86].

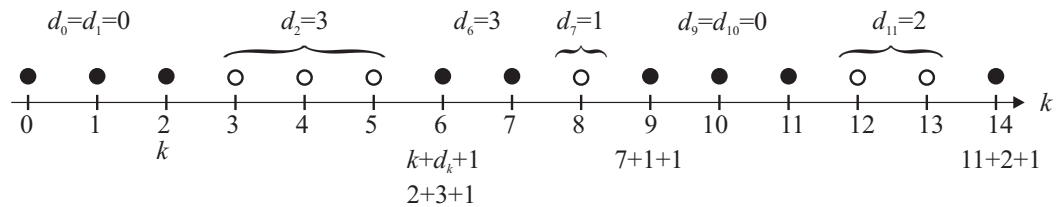
Bardziej zbliżony do rzeczywistego jest układ, który różni się od poprzednio rozpatrywanego występowaniem niezgodności parametrów modelu i obiektu. Jego własności są następujące:

- model \mathbf{M} , użyty przy projektowaniu kompensatora \mathbf{CM} , zgadza się pod względem struktury z obiektem \mathbf{PD} , jednak występują różnice w wartościach ich parametrów,
- w układzie nie występują zakłócenia $z[k]$,
- najdłuższa możliwa przerwa w transmisji sieciowej jest ograniczona z góry przez długość horyzontu predykcji M .

Oznaczmy przez $\hat{\Phi}$ oraz $\hat{\Gamma}$ estymaty macierzy Φ i Γ (stanu i wejścia) obiektu \mathbf{PD} , opisanego równaniem (III.149), uzyskane na przykład na drodze identyfikacji. Równanie modelu obiektu \mathbf{M} , wykorzystujące te estymaty, otrzymuje postać

$$x[k+1] = \hat{\Phi} x[k] + \hat{\Gamma} u[k] \quad (\text{III.155})$$

Niech $I \subset \mathbb{N}$ będzie zbiorem tych wszystkich chwil czasu $k \in \mathbb{N}$, w których przesłanie danych przez sieć zakończyło się sukcesem. Na rysunku III.91 zaznaczono je w postaci zaczernionych kółek. Chwile czasu, w których transmisje sieciowe nie powiodły się, tworzą zbiór $\mathbb{N} \setminus I$. Nieudane przesłania sieciowe można pogrupować w rozłączne, nieprzerwane, nie stykające się bezpośrednio ze sobą ciągi, zaznaczone na rysunku III.91 pustymi kółkami i objęte klamrami. Oznaczmy długość (liczbę chwil czasowych) każdego takiego ciągu przez $d_k = d[k]$, przy czym indeks (argument) $k \in I$ oznacza chwilę czasu, w której miała miejsce ostatnia udana transmisja sieciowa, bezpośrednio poprzedzająca dany ciąg nieudanych transmisji. Dla uogólnienia można przyjąć umowę, że również



Rys. III.91: Przykład diagramu czasowego przedstawiającego ciąg udanych (●) i nieudanych (○) transmisji w sieci.

każde dwie sąsiadujące ze sobą udane transmisje w chwilach czasu k oraz $k+1$, należących do zbioru I , rozdzielone są również ciągiem nieudanych przesłań, ale długość tego ciągu jest równa zero ($d_k = 0$). Wartości d_k dla $k \notin I$ nie są określone. Podsumowując, elementy k zbioru I są numerami wszystkich tych dyskretnych chwil czasu, w których miały miejsce udane transmisje sieciowe, zaś wielkości d_k (dla $k \in I$) określają długości (mogące przyjmować wartość zero) spójnych i maksymalnych ciągów nieudanych przesłań sieciowych, rozpoczynających się od chwil czasu $k+1$.

Znajdźmy zależność między stanem $x[\cdot]$ systemu w dwóch chwilach czasu: $k \in I$ oraz $k+d_k+1 \in I$. Pierwsza z nich odpowiada ostatniej udanej transmisji poprzedzającej d_k -krokową przerwę; druga chwila czasu odpowiada pierwszej udanej transmisji następującej bezpośrednio po tej przerwie. Będziemy rozpatrywać zadanie stabilizacji stanu $x[k]$ w zerowym punkcie równowagi. Wyciągnięte wnioski pozostaną prawdziwe także dla zadania regulacji programowej, które realizowane jest w układach pokazanych na rysunkach III.85a i III.85b. Ponieważ założono niezgodność modelu (III.155) z obiektem (III.149) oraz brak zakłóceń $z[k]$, równania (III.154a)–(III.154f), wykorzysty-

wane przez kompensator, przyjmują postać

$$\begin{aligned}
x[k+1|k] &= \hat{\Phi} x[k] + \hat{\Gamma} u[k] \\
u[k+1|k] &= -K x[k+1|k] \\
x[k+2|k] &= \hat{\Phi} x[k+1|k] + \hat{\Gamma} u[k+1|k] \\
u[k+2|k] &= -K x[k+2|k] \\
&\dots \\
x[k+M|k] &= \hat{\Phi} x[k+M-1|k] + \hat{\Gamma} u[k+M-1|k] \\
u[k+M|k] &= -K x[k+M|k]
\end{aligned}$$

Pominięto w nich wartość zadaną $r[\cdot]$, ponieważ w przyjętym zadaniu stabilizacji jest ona równa zeru. Ze względu na założony brak zakłóceń $z[k]$, wielkość $x[k] + z[k]$ zastąpiono przez $x[k]$. Przykładowo, na podstawie powyższych wzorów oraz równań (III.149) i (III.153), dla $d_k = 1$ otrzymuje się następującą zależność między stanem w chwilach czasu k oraz $k + d_k + 1$.

$$x[k + d_k + 1] = x[k + 2] = \Phi (\Phi x[k] - \Gamma K x[k]) - \Gamma K (\hat{\Phi} x[k] - \hat{\Gamma} K x[k]), \quad d_k = 1$$

Po przekształceniach dostajemy

$$x[k + 2] = (\Phi^2 - \Phi \Gamma K - \Gamma K \hat{\Phi} + \Gamma K \hat{\Gamma} K) x[k], \quad d_k = 1 \quad (\text{III.157})$$

Dla $d_k = 2$ obowiązuje równanie

$$\begin{aligned}
x[k + 3] &= (\Phi^3 - \Phi^2 \Gamma K - \Phi \Gamma K \hat{\Phi} + \Phi \Gamma K \hat{\Gamma} K + \\
&\quad - \Gamma K \hat{\Phi}^2 + \Gamma K \hat{\Phi} \hat{\Gamma} K + \Gamma K \hat{\Gamma} K \hat{\Phi} - \Gamma K \hat{\Gamma} K \hat{\Gamma} K) x[k], \quad d_k = 2
\end{aligned} \quad (\text{III.158})$$

Do powyższego zestawu równań (III.157), (III.158) dodamy jeszcze formułę opisującą zależność między stanami $x[k]$ oraz $x[k + 1]$ w przypadku, gdy w obu chwilach czasu k oraz $k + 1$ transmisje powiodły się ($k, k + 1 \in I, d_k = 0$)

$$x[k + 1] = (\Phi - \Gamma K) x[k], \quad d_k = 0 \quad (\text{III.159})$$

Jak wspomniano wcześniej, przypadek ten można traktować jak wystąpienie w transmisji przerwy o zerowej długości ($d_k = 0$). Podobne wzory można wyprowadzić dla pozostałych wartości, które może przyjmować d_k ($d_k \in D = \{0, 1, 2, \dots, M\}$). Formuły (III.157)–(III.159), stosowane w odpowiedniej kolejności, pozwalają wyznaczyć wartości stanu x w kolejnych chwilach czasu $k \in I$, w których następowały prawidłowe transmisje sieciowe. Przy założeniu, że transmisja w zerowej chwili czasu była udana, wymienione wyżej równania można zapisać zbiorczo jednym wzorem

$$x[k + d_k + 1] = \Theta(d_k) x[k] \quad (\text{III.160})$$

gdzie

$$k \in I, \quad 0 \in I, \quad x[0] \in \mathbb{R}^n, \quad d_k \in D = \{0, 1, \dots, M\}$$

Pod symbolem $\Theta(d)$ dla $d = 0, 1, 2, \dots, M$ kryją się macierze występujące w prawych stronach równań (III.157)–(III.159). Badanie stabilności rozważanego układu regulacji można zastąpić badaniem stabilności systemu dynamicznego opisanego równaniem (III.160). Jest on niestacjonarny

ze względu na zależność macierzy $\Theta(\cdot)$ od zmieniającego się w czasie parametru d_k . Wartość tego parametru dla kolejnych chwil czasu k ze zbioru I zmienia się w sposób przypadkowy. Wcześniej nie założono o charakterze zmienności d_k , poza warunkiem $0 \leq d_k \leq M, \forall k \in I$. Twierdzenia dotyczące stabilności niestacjonarnych systemów dynamicznych podano w podrozdziale III.1.1.2. Zgodnie z twierdzeniem III.6, warunkiem koniecznym asymptotycznej stabilności systemu (III.160) jest, by każda z macierzy $\Theta(d)$ dla każdego $d \in D = \{0, 1, \dots, M\}$ była asymptotycznie stabilna w sensie Schura

$$\lambda(\Theta(d)) \in \mathbb{C}^\circ, \quad d \in \{0, 1, \dots, M\}$$

Z kolei przykładowy warunek dostateczny podany jest w twierdzeniu III.5. By przy jego pomocy wykazać asymptotyczną stabilność systemu (III.160), należy znaleźć rzeczywistą, dodatnio określoną macierz V , która spełnia jednocześnie $M + 1$ nierówności macierzowych (LMI - *Linear Matrix Inequality*)

$$\Theta(d)^T V \Theta(d) - V < 0, \quad \forall d \in \{0, 1, \dots, M\} \quad (\text{III.161})$$

przy czym zapis $W < 0$ oznacza ujemną określoność macierzy W . Gdy znane są wartości macierzy $\Phi, \Gamma, \hat{\Phi}, \hat{\Gamma}$ oraz K , układ (III.161) może być rozwiązany za pomocą metod numerycznych, zaimplementowanych między innymi w programie MATLAB w ramach przybornika *Robust Control Toolbox*.

Podany wyżej warunek dostateczny stabilności może okazać się mocno zachowawczy, jeśli bliżej znany jest charakter ciągu $\{d_k\}_{k \in I}$ (poza warunkiem $0 \leq d_k \leq M, \forall k \in I$). Wówczas również zamieszczony wyżej warunek konieczny może przestać być słuszny. Jeśli na przykład specyfika zmian d_k opisana jest łańcuchem Markowa, stosować można twierdzenie podane w pracach [42, 134].

Przedstawione wyżej wnioski dotyczące stabilności pozostają słuszne również w sytuacji, gdy w układzie obecne są zakłócenia $z[k]$. Wówczas jednak nie można oczekiwać (nawet w przypadku zadania stabilizacji) zanikania przebiegów przejściowych uchybu regulacji do zera. Charakter tych przebiegów zależy mocno od charakteru zakłóceń. Należy spodziewać się istotnego pogorszenia jakości regulacji w układzie z gubieniem pakietów w stosunku do układu z bezbłędną transmisją, ponieważ estymaty stanu (obliczane w kompensatorze **CM**) obciążone są błędami kumulującymi się w trakcie stosowania wzorów (III.154a), (III.154c), (III.154e). W przypadku kilkukrokowego zaniku transmisji oznacza to sterowanie obiektem w kolejnych krokach w oparciu o kolejne estymaty obciążone narastającym błędem.

Najtrudniejszy do analizy stabilności jest przypadek, gdy maksymalna długość przerwy w transmisji sieciowej nie jest ograniczona z góry, lub gdy ograniczenie to przekracza długość horyzontu predykcji. W przypadku braku ograniczenia, konieczne jest w zastępstwie inne scharakteryzowanie zaników transmisji, na przykład przez podanie ich opisu probabilistycznego. Wówczas należy badać i dowodzić odmiennego rodzaju stabilności, zdefiniowanej na gruncie teorii prawdopodobieństwa. Przykłady różnych definicji stabilności dla takiego przypadku można znaleźć w pracy [92]. Zagadnienie to nie jest tu jednak rozważane.

III.3.1.5 Podsumowanie i uwagi końcowe

Wyżej przedstawiono porównanie dwóch różnych algorytmów sterowania dla rozproszonego układu regulacji, różniących się organizacją przesyłu danych sterujących przez sieć telekomunikacyjną, w której może występować zjawisko gubienia pakietów. W prostszym wariantcie, w każdej dyskretnej chwili czasu przesyłana jest pojedyncza próbka sygnału sterującego. W razie zagubienia pakietu, obiekt otrzymuje sterowanie z poprzedniego kroku. Drugi wariant polega zaś na wyznaczaniu i wysyłaniu pakietu zawierającego – oprócz aktualnego sterowania – także jego estymaty na kilka kroków w przód. W przypadku zagubienia takiego pakietu, na obiekt podawana jest estymata sterowania przeznaczona dla aktualnego kroku, pochodząca z jednej z wcześniej odebranych pakietów. Wyniki symulacji komputerowych oraz eksperymentów praktycznych pokazały istotną przewagę algorytmu wykorzystującego grupowanie próbek.

W powyższych rozważaniach założono, że całkowite opóźnienie τ w pętli sprzężenia zwrotnego jest równe zero. W praktycznych układach regulacji założenie to nie jest spełnione, dlatego przed implementacją przedstawiony algorytm wymaga pewnych modyfikacji. Jeśli całkowite opóźnienie τ , wnoszone przez pętlę sprzężenia zwrotnego, jest wielokrotnie mniejsze od okresu próbkowania T ($\tau \ll T$), można nie uwzględniać jego wpływu na pracę układu regulacji. W praktycznej realizacji systemu należy natomiast przesunąć fazy początkowe (chwile startu) zegarów w układzie z rysunku III.80b tak, by impuls zegara \mathbf{TB} opóźniał się w stosunku do \mathbf{TA} o wielkość nieznacznie większą od opóźnienia τ . Jeśli natomiast opóźnienie τ nie jest zaniedbywalne, ale nie przekracza okresu próbkowania T , należy tak zmodyfikować bufor \mathbf{B} , by sztucznie wydłużał opóźnienie każdego z pakietów do wartości równej T . Wydłużone w ten sposób i stałe opóźnienie T uwzględnić należy w modelu matematycznym obiektu, stosując metodę rozszerzonej przestrzeni stanu [46]. Przesunięcie faz zegarów \mathbf{TB} i \mathbf{Ts} nie jest wówczas potrzebne.

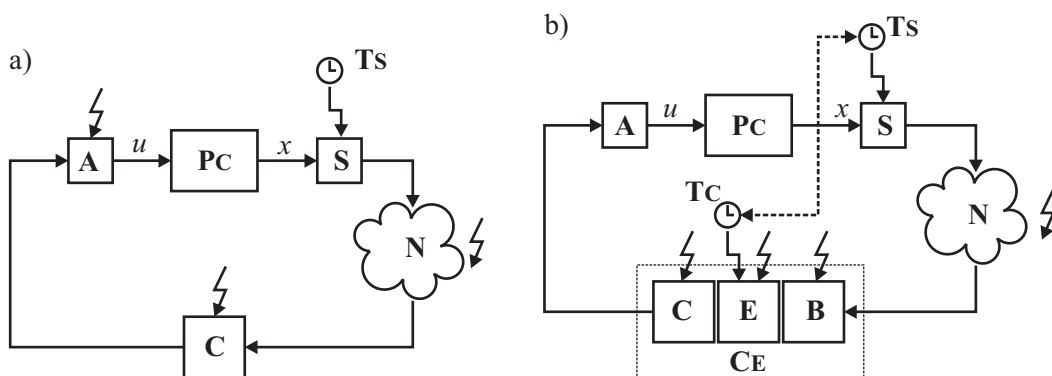
Pakiet danych zawierający – oprócz aktualnej wartości sterowania – również jego estymaty dla kilku kroków w przód, jest większy od pakietu pozbawionego tych estymat. Transmisja takiego powiększonego pakietu wiąże się zazwyczaj ze wzrostem obciążenia użytej sieci komunikacyjnej. Często jednak rozmiar pola danych w pakiecie jest niewielki w stosunku do rozmiaru pozostałych jego składników (preambuły, sumy kontrolne, pola sterujące, adresy: nadawcy i odbiorcy itp.). W takim przypadku wzrost obciążenia sieci jest niewspółmiernie mały w stosunku do zysku mierzonego poprawą jakości regulacji, jaką można osiągnąć stosując przedstawiony wyżej algorytm. Co więcej, w niektórych sieciach zdefiniowana jest minimalna dopuszczalna długość pakietu (przykładem jest Ethernet). W sieciach tych może się zdarzyć, że dodanie dodatkowych próbek do ramki nie zwiększy jej długości, ponieważ w przypadku ich braku i tak jest ona uzupełniana zerami w celu osiągnięcia wymaganej minimalnej długości (porównaj rysunek III.63 na stronie 129). Odrębnym zagadnieniem jest wzrost złożoności obliczeń (i co za tym idzie – wymaganego przez nie czasu) w kompensatorze. Jednak w wielu przypadkach sterowniki logiczne, komputery przemysłowe lub sterowniki mikroprocesorowe, na których realizowany jest algorytm kompensatora, dysponują znaczną rezerwą mocy. Wówczas zwiększenie czasochłonności obliczeń nie wiąże się z istotnym wzrostem kosztów czy koniecznością zmiany struktury układu regulacji. Obecność wspomnianej rezerwy wynika często z faktu istnienia skończonej rozdzielczości (ziarnistości) mocy obliczeniowej produktów oferowanych

w handlu.

Podobny algorytm przesyłu danych, wykorzystujący grupowanie próbek sygnału sterującego i jego estymat dla kilku kroków w przód, opisano już w podrozdziale III.2.1 oraz w pracy [50]. Idea przedstawionego tam rozwiązania jest jednak odmienna: uzyskane przez grupowanie pakiety wysyłane są z okresem M -krotnie dłuższym w stosunku do okresu próbkowania T czujnika i aktuatora. Celem tamtego rozwiązania było głównie zmniejszenie obciążenia sieci, o której założono, że nie gubi pakietów. Tutaj nie zmniejsza się częstotliwość przesłań pakietów przez sieć, ale uzyskuje się pewne uodpornienie układu regulacji na skutki ich gubienia.

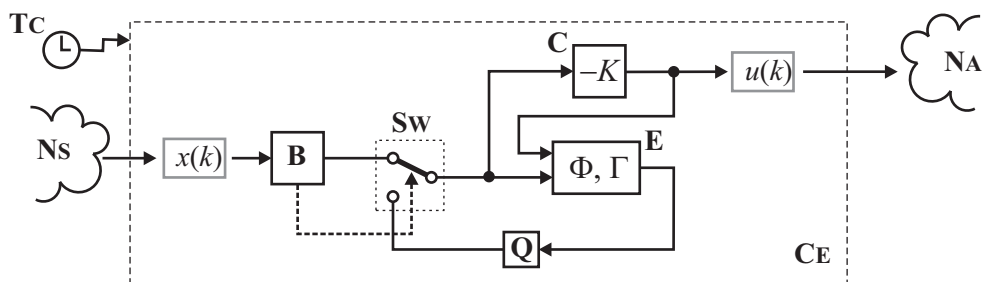
III.3.2 Sieć telekomunikacyjna włączona na drodze sygnału pomiarowego

W poprzednim podrozdziale omówiono szczegółowo przypadek rozproszonego układu regulacji, w którym gubiąca pakiety sieć telekomunikacyjna włączona jest pomiędzy kompensatorem dynamicznym a urządzeniem wykonawczym. Rysunek III.92a przedstawia z kolei układ, w którym sieć obecna jest między czujnikiem a kompensatorem. Podobnie jak poprzednio, problemowi gubienia



Rys. III.92: Schemat blokowy rozproszonego układu regulacji: a) wersja podstawowa, b) wersja zmodyfikowana (**PC** – obiekt regulacji z czasem ciągłym, **S** – czujnik (sensor), **A** – urządzenie wykonawcze (aktuator), **C** – regulator, **CE** – zmodyfikowany kompensator dynamiczny, **B** – bufor, **E** – estymator stanu, **N** – sieć telekomunikacyjna, **Ts**, **Tc** – zsynchronizowane zegary).

danych można zaradzić stosując technikę estymacji stanu. Stosowny układ regulacji przedstawiony jest na rysunku III.92b, zaś algorytm użytego w nim zmodyfikowanego kompensatora dynamicznego **CE** wyjaśnia schemat blokowy na rysunku III.93. W układzie zrezygnowano z wyzwalania



Rys. III.93: Schemat blokowy wyjaśniający działanie algorytmu zmodyfikowanego kompensatora dynamicznego **CE**.

kompensatora zdarzeniami na rzecz taktowania zegarem **Tc**, który musi być zsynchronizowany z

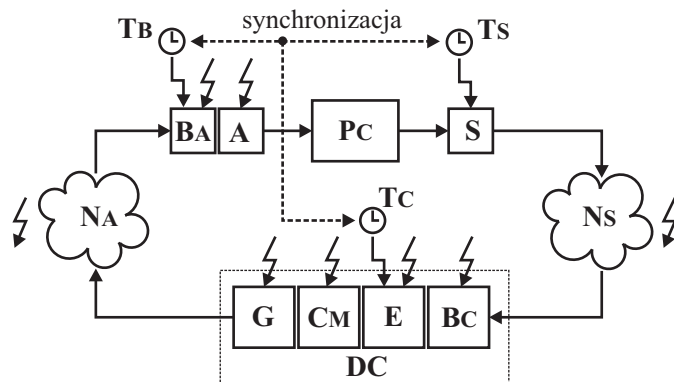
Ts. Wprowadzenie zegara może stanowić pewną komplikację układu regulacji, jednak jest niezbędne, by gubienie pakietów sieciowych nie powodowało pomijania taktów pracy kompensatora.

Zasada działania układu jest następująca. Bufor **B** przechwytytuje pakiety docierające z sieci **N**. Jeśli w chwili wyzwolenia akcji kompensatora **CE** przez zegar **TC** bufor jest pełen, przełącznik **SW** przestawiany jest w górne położenie i regulator **C** wyznacza sterowanie w oparciu o świeżo otrzymaną próbkę stanu obiektu, a bufor jest zerowany. Jeśli natomiast bufor jest pusty, przełącznik kieruje na wejście regulatora estymatę obecnego stanu, umieszczoną w poprzednim kroku obliczeń w kolejce **Q** przez blok **E**. W przypadku zgubienia kilku pakietów z rzędu, w każdym kroku estymator **E** wyznacza nową wartość estymaty, korzystając z poprzedniej, przechowanej w pomocniczej kolejce **Q**.

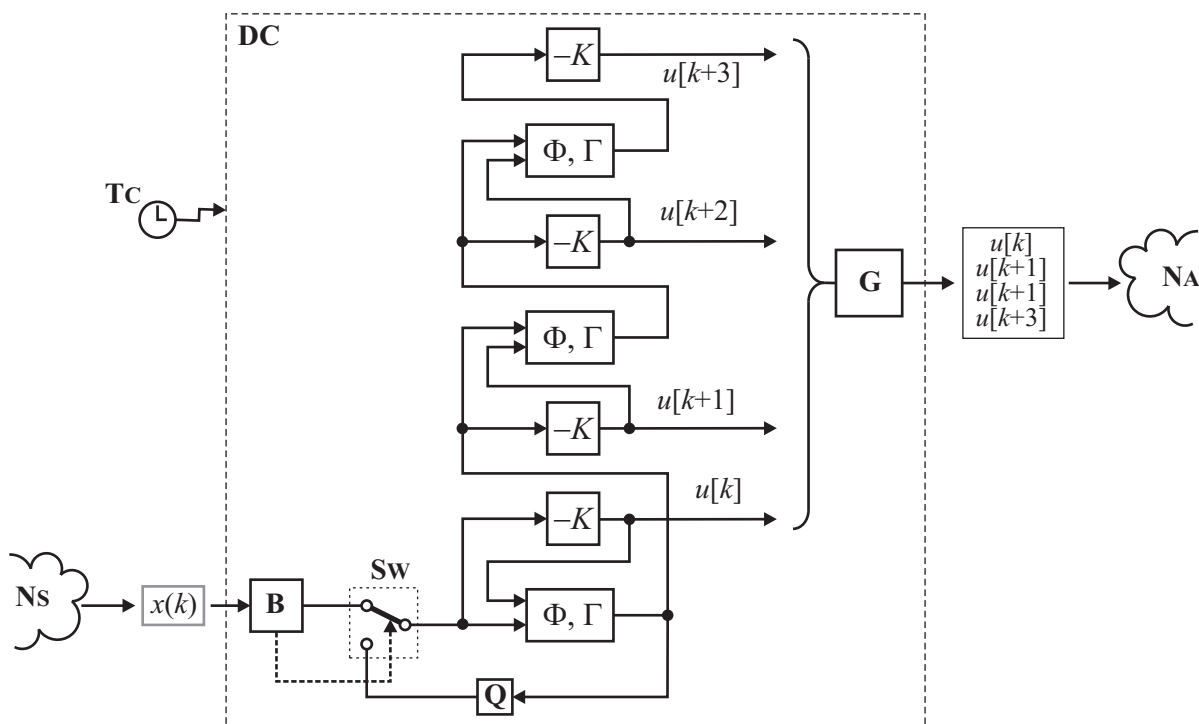
Choć sposób technicznej realizacji sterowania w układach z gubieniem próbek sterowań (rysunek III.80b) lub próbek stanu (rysunek III.92b) jest istotnie różny, od strony matematycznej układy te są do siebie podobne. W obu układach, w przypadku zgubienia pakietu, obiekt otrzymuje sterowanie wyznaczone w oparciu o model procesu i estymatę stanu. Jeśli zdarzy się zgubienie kilku pakietów pod rząd, kolejne estymaty stanu obliczane są na podstawie poprzednich. Jeśli dodatkowo założyć, że w poprzednio omawianym układzie długość żadnego ciągu następujących bezpośrednio po sobie nieudanych transmisji nie przekracza horyzontu predykcji M , zastępcze modele matematyczne obu układów są identyczne. Uwagi dotyczące jakości regulacji i stabilności poprzedniego układu mają więc zastosowanie w niezmienionej formie również tutaj. Różnica pojawia się w przypadku długotrwałego nieprzerwanego zaniku transmisji. W aktualnie rozpatrywanym systemie akcja predyktora może być bowiem powtarzana dowolnie długo, zaś w poprzednim – po przekroczeniu horyzontu predykcji M na obiekt podawane jest nieaktualne sterowanie. Od strony technicznej istotna jest również różnica w zapotrzebowaniu na moc obliczeniową kompensatorów **CM** (na rysunku III.80b) oraz **CE** (rysunek III.92). Ostatni musi obliczać estymatę stanu tylko wówczas, gdy nastąpi zgubienie pakietu i jest to estymata jednokrokowa. Poprzedni układ w każdym kroku musi wyznaczać komplet M estymat – nawet jeśli nie nastąpi odrzucenie pakietu sieciowego. Różna jest też ilość danych przesyłanych w pojedynczym pakiecie sieciowym. Poprzednio – $(M + 1)$ próbek sygnału sterującego, obecnie – pojedyncza próbka stanu.

III.3.3 Sieci telekomunikacyjne w torach pomiarowym i sterującym

Dwa omówione wyżej przypadki układów z siecią telekomunikacyjną gubiącą pakiety można połączyć w jeden (rysunek III.94). Tutaj dwie różne (lub jedna wspólna) sieci, w których zdarza się odrzucanie pakietów, pośredniczą w przesyłaniu zarówno próbek stanu, jak i sterowania. Schemat kompensatora dynamicznego **DC**, odpowiedniego dla tego przypadku, przedstawiony jest na rysunku III.95. Kompensator ten realizuje zarówno estymację brakujących danych pomiarowych, w przypadku zaniku połączenia z czujnikiem, jak i predykcję przyszłych sterowań, na wypadek przerwy w komunikacji z urządzeniem wykonawczym. Model matematyczny tego układu regulacji można uzyskać w sposób analogiczny jak dla układów poprzednio rozważanych. Podobne są też wnioski dotyczące stabilności i jakości regulacji.



Rys. III.94: Układ regulacji z dwiema sieciami gubiącymi pakiety.



Rys. III.95: Zasada działania kompensatora dynamicznego dla horyzontu predykcji $M = 3$.

Rozdział IV

Podsumowanie

Celem, jaki stawiał sobie Autor niniejszej rozprawy, było opracowanie algorytmów regulacji, które mogą być stosowane w rozproszonych systemach sterowania. Potrzeba stworzenia takich algorytmów wynika z dwóch przyczyn. Z jednej strony, popularność systemów rozproszonych w automatyce wciąż rośnie, z drugiej – klasyczne metody sterowania, użyte w niezmienionej postaci w takich systemach, nie zawsze mogą zapewnić stabilność układu oraz wymaganą jakość regulacji. Autor zaplanował stworzenie algorytmów częściowo uodpornionych na niekorzystne skutki włączenia sieci transmitującej dane w pętlę sprzężenia zwrotnego układu regulacji, takie jak występowanie opóźnień komunikacyjnych, gubienie pakietów danych czy ograniczenie częstotliwości przesłań. Z założenia, uodpornienie miało być osiągnięte wyłącznie przez zastosowanie odpowiednich metod sterowania, przy niezmiennych własnościach sieci telekomunikacyjnych.

Zdaniem Autora, postawiony cel został osiągnięty. W pracy zaproponowano kilka różnych metod sterowania, które pozwalają uodpornić rozproszony układ regulacji na efekty związane z obecnością sieci. Metody te zostały opracowane teoretycznie, a ich skuteczność sprawdzono na drodze symulacji komputerowych, a w wybranych przypadkach – także eksperymentów praktycznych przeprowadzonych w warunkach laboratoryjnych. Podrozdział III.1.1 poświęcono układom, w których zmienne opóźnienia komunikacyjne w sieci nie przekraczają przyjętego okresu próbkowania. Pokazano, jak eliminować ich niekorzystny wpływ, stosując metodę predykcji stanu w oparciu o model matematyczny obiektu regulacji. Uszczegółowiono tu także wybrane twierdzenia dotyczące stabilności, w szczególności twierdzenie III.8, którego postać umożliwiła bezpośrednie zastosowanie do rozważanych przypadków. Przedstawiono kilka wersji algorytmów sterowania oraz wskazano, które z nich mogą być stosowane dla różnych wariantów lokalizacji sieci w układzie. W podrozdziale III.1.2 opisano metodę użycia buforów ujednolicających zmienne w czasie opóźnienia komunikacyjne, przekraczające lub nie okres próbkowania. Scharakteryzowano pięć różnych odmian buforów oraz podano wskazówki, którymi należy się kierować przy ich doborze dla różnych typów sieci i różnych charakterów opóźnień w nich występujących. Kolejne trzy podrozdziały poświęcono problemowi ograniczania częstotliwości przesłań w sieci. Podrozdział III.2.1 prezentuje metodę grupowego przesyłania próbek sygnałów pomiarowych i sterujących, pozwalającą kilkakrotnie obniżyć częstotliwość, z jaką transmitowane są dane. Z punktu widzenia obiektu regulacji, dzięki zastosowaniu techniki estymowania stanu i sterowań, w układzie zachowano niezmienną częstotliwość próbkowania, mimo obniżonej częstotliwości transmisji. W podrozdziale III.2.2 zaprezentowano sposób suboptymalnego doboru harmonogramu niejednoczesnego próbkowania wyjść obiektu SIMO. Dzięki niejednoczesnemu prób-

kowaniu zmniejsza się obciążenie sieci, ale konieczne jest przy tym zastosowanie techniki odtwarzania niepodlegających pomiarowi danych w oparciu o model matematyczny obiektu. Podrozdział III.2.3 poświęcono ulepszonemu ekstrapolatorowi pierwszego rzędu (IFOH), w którym zastosowano parametryzację sterowania wielomianem pierwszego stopnia, podwajając w ten sposób (formalnie) ilość wejść obiektu. Zabieg ten pozwala uzyskać lepszą jakość sterowania w układzie z niezmienną częstotliwością próbkowania, lub też ograniczyć tę częstotliwość, bez pogorszenia jakości regulacji. Wreszcie w podrozdziale III.3 opisano metodę uodporniania układu na odrzucanie pakietów w sieci telekomunikacyjnej, przez zastosowanie estymacji stanu i sterowań. Zaprezentowano kilka wersji układu regulacji, odpowiednich dla przypadków różnej lokalizacji sieci telekomunikacyjnej.

Wspólną cechą wszystkich opisanych metod regulacji jest wykorzystanie modelu matematycznego sterowanego obiektu. W zaprezentowanych algorytmach model wykorzystywany był na dwa sposoby: *off-line*, na etapie projektowania układu oraz *on-line*, w trakcie jego pracy. W trybie *off-line* dobierano nastawy regulatorów, gwarantujące asymptotyczną stabilność układu lub osiągnięcie optymalnej jakości regulacji. W trybie *on-line* model wykorzystywany był do estymowania nieznanych sygnałów. Estymacja ta miała charakter odtwarzania stanu (gdy nie był on w całości dostępny pomiarowo), predykcji (gdy dane pomiarowe były opóźnione) lub filtracji (gdy w sygnałach pomiarowych występowały zakłócenia). W poszczególnych częściach pracy nawiązano także do problemu identyfikacji modeli, w sensie oceny wpływu niezgodności obiekt–model na jakość sterowania i warunki stabilności.

Zaprezentowany w pracy materiał stanowi potwierdzenie postawionej w rozdziale *Wprowadzenie* tezy, w myśl której *wykorzystanie prawidłowo zidentyfikowanego modelu procesu w układzie regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego zamkniętą przez sieć telekomunikacyjną umożliwia zastosowanie algorytmów sterowania częściowo uodpornionych na efekty wnoszone przez rozproszony charakter układu regulacji*. Zaprezentowane metody sterowania rozproszonego wykorzystują model obiektu i umożliwiają do pewnego stopnia uodpornienie układu regulacji na zmienne opóźnienia komunikacyjne, gubienie pakietów czy ograniczenie częstotliwości przesłań. Zastosowanie opisanych algorytmów poprawia jakość regulacji i pozwala zachować stabilność systemu.

Za swój wkład własny Autor uważa zebranie i krytyczny przegląd algorytmów sterowania w rozproszonych układach regulacji i na tej podstawie zaproponowanie metod, które są efektywne, przy stosunkowo niskim stopniu złożoności algorytmu. Za swój dorobek autor uznaje również zaproponowanie systematycznego podejścia do problemu buforowania w rozproszonych układach regulacji, a w szczególności wyniki zawarte w podrozdziałach III.1.2.3–III.1.2.5.

W przyszłości Autor zamierza kontynuować badania w dziedzinie systemów rozproszonych. Skupią się one na trzech zagadnieniach, które nie były do tej pory przez niego badane lub też nie poświęcono im należytej uwagi. Są to odpowiednio: systemy sterowania obiektami nieliniowymi, układy poddane zakłóceniom stochastycznym oraz systemy, w których ze wspólnej sieci telekomunikacyjnej korzysta wiele niezależnych układów regulacji.

Rozwiązania opisane w rozprawie bazowały na liniowych modelach obiektów sterowania. Jest to poniekąd uzasadnione prostszą i ujednoczoną analizą tego typu układów oraz faktem, iż w praktyce przemysłowej modele liniowe dominują ze względu na znaczną nieraz trudność prawidłowej

identyfikacji modeli nieliniowych. Z drugiej jednak strony, nie wszystkie przypadki dopuszczają podejście oparte na linearyzacji, zwłaszcza wówczas, gdy zadaniem regulacji nie jest stabilizacja lub gdy nieliniowe charakterystyki procesu nie mają łagodnego charakteru. Powszechnie występującymi nieliniowościami są również ograniczenia na wartości i szybkości zmian sygnałów sterujących, związane z własnościami urządzeń wykonawczych. Przyjęcie nieliniowych modeli stawia przed projektantem układu regulacji dodatkowe wyzwania, z którymi Autor pragnie się w przyszłości zmierzyć.

W niniejszej rozprawie poruszono zagadnienie sterowania w układach z siecią, w której przesył danych ma charakter stochastyczny. Zazwyczaj wykorzystywano jednak jedynie uproszczoną wiedzę o charakterze zmienności opóźnień bądź o zjawisku gubienia danych. Ograniczała się ona do znajomości górnego ograniczenia opóźnienia (podrozdział III.1.1), przybliżonego charakteru rozkładu i jego zmienności w czasie (podrozdział III.1.2) lub maksymalnej ilości następujących po sobie nieudanych transmisji (podrozdział III.3). Wykorzystanie pełniejszej wiedzy o losowym charakterze zjawisk (na przykład opisanie opóźnień za pomocą łańcuchów Markowa) pozwala zwykle uzyskać lepsze wyniki regulacji i jednocześnie mniej zachowawcze warunki stabilności [42, 134]. Zdaniem Autora, ten obszar badań jest tym bardziej atrakcyjny, że metody stochastyczne można stosować również w złożonych układach deterministycznych, gdzie inny sposób analizy jest zbyt skomplikowany.

W praktycznie spotykanych rozproszonych układach regulacji często z jednej, wspólnej sieci przesyłu danych korzysta wiele węzłów sieciowych, należących do odrębnych układów regulacji. Ograniczone zasoby sieci zmuszają poszczególne układy do konkutowania o dostęp do medium i możliwość przesyłu danych. Optymalizacja pracy takiego systemu wymaga całościowego spojrzenia na wszystkie wchodzące w jego skład układy, powiązane faktem korzystania ze wspólnej sieci. Kilka metod projektowania rozważanych systemów opisano w podrozdziałach II.3.1–II.3.2, traktujących o metodzie współprojektowania (*co-design*). W przyszłości Autor zamierza włączyć to zagadnienie do zakresu swoich badań.

Niniejsza rozprawa gromadzi i podsumowuje dotychczasowy dorobek Autora w dziedzinie rozproszonych systemów sterowania. Jednak nie wszystkie uzyskane wyniki zostały w niej zawarte. By ograniczyć objętość pracy, usunięto z niej dwa zagadnienia, którymi Autor również się zajmował. Pierwsze z nich dotyczy wykorzystania predyktora Smitha w systemach rozproszonych, drugie zaś traktuje o dekompozycji układu regulacji i eliminacji sieci telekomunikacyjnej.

Predyktor Smitha służy do sterowania obiektami z opóźnieniem, wydaje się więc atrakcyjnym rozwiązaniem dla rozproszonych systemów sterowania, gdyż opóźnienia są ich wrodzoną cechą. Jeśli jednak zmieniają się one w czasie lub występują dodatkowo inne zjawiska (na przykład gubienie pakietów), konieczne jest wprowadzenie modyfikacji w podstawowej strukturze predyktora Smitha. Zagadnienie to Autor opisał w pracy [121]. Dla prawidłowego funkcjonowania predyktora Smitha konieczna jest znajomość wartości opóźnienia. Jeśli nie ma możliwości jego bezpośredniego pomiaru, można przy pewnych założeniach skorzystać z adaptacyjnego układu regulacji, w którym jest ono ustawicznie estymowane. Propozycję takiego układu Autor podał w artykule [122].

Dodatki

D.1 Zawartość M-pliku poszukującego rozwiązania układu LMI

Poniżej zamieszczono kod źródłowy M-pliku wykorzystywanego w przykładzie III.3 do znalezienia dopuszczalnego rozwiązania V układu nierówności macierzowych (LMI). Istnienie rozwiązania jest warunkiem dostatecznym asymptotycznej stabilności pewnego rozproszonego układu regulacji.

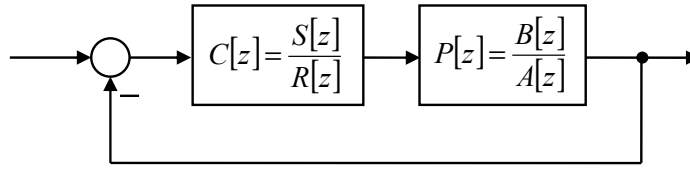
```
a=100, b=40
A=[0 a; 0 0], B=[0; b]
syms delta ksi;
Fi=simple(expm(delta*A))
Gamma=simple(int(expm(ksi*A)*B,ksi,0,delta))
K=[3,2];
Psi=Fi-Gamma*K
delta_min=0.0008, delta_max=0.0072
setlmis([])
lmivar(1,[2,1])
lmiterm([-1,1,1,1],eye(2),eye(2))
for numer=1:11,
    d=delta_min+(numer-1)*(delta_max-delta_min)/10,
    P=subs(Psi,delta,d);
    lmiterm([numer,1,1,1],P.',P);
    lmiterm([numer,1,1,1],[-eye(2),eye(2)]);
end;
uklad=getlmis;
[wskaznik,rozwiazanie]=feasp(uklad)
V=dec2mat(uklad,rozwiazanie,1)
```

D.2 Wyznaczanie transmitancji regulatorów metodą lokowania biegunów

Poniżej zamieszczono rozwiązanie zadania polegającego na wyznaczeniu regulatorów opisanych dyskretnymi transmitancjami $C_1[z]$ i $C_2[z]$, odpowiednio dla obiektów $P_1[z]$ (III.50) i $P_2[z]$ (III.49), w taki sposób, by wszystkie bieguny obu zamkniętych układów regulacji były równe 0.6. Przy projektowaniu regulatorów posłużymy się pomocniczym schematem zamkniętego układu regulacji, przedstawionym na rysunku D.1, na którym zastosowano oznaczenia

$$P[z] = \frac{B[z]}{A[z]}, \quad C[z] = \frac{S[z]}{R[z]}$$

Załóżmy, że transmitancje $P[z]$ oraz $C[z]$ dane są funkcjami wymiernymi, będącymi stosunkami wzajemnie pierwszych wielomianów (odpowiednio $B[z]$ i $A[z]$ oraz $S[z]$ i $R[z]$). Transmitancja za-



Rys. D.1: Schemat układu regulacji wykorzystywany przy projektowaniu regulatorów.

mnkniętego układu regulacji, przedstawionego na rysunku, dana jest wzorem

$$G[z] = \frac{G_o[z]}{1 + G_o[z]}$$

gdzie $G_o[z]$ jest transmitancją układu otwartego

$$G_o[z] = P[z] C[z] = \frac{B[z]}{A[z]} \frac{S[z]}{R[z]} = \frac{B[z] S[z]}{A[z] R[z]}$$

Stąd

$$G[z] = \frac{B[z] S[z]}{A[z] R[z] + B[z] S[z]} \quad (\text{D.1})$$

Zgodnie z założeniami projektowymi, mianownik $M[z]$ transmitancji $G[z] = N[z]/M[z]$ powinien mieć postać wielomianu o wielokrotnym pierwiastku 0.6

$$\begin{aligned} M[z] &= (z - 0.6)^5 = z^5 + m_4 z^4 + m_3 z^3 + m_2 z^2 + m_1 z + m_0 = \\ &= z^5 - 3 z^4 + 3.6 z^4 - 2.16 z^2 + 0.648 z - 0.07776 \end{aligned}$$

Przyrównując mianownik $A[z] R[z] + B[z] S[z]$ wyrażenia (D.1) do $M[z]$, danego powyższym wzorem, otrzymuje się równanie diofantyczne [97]

$$A[z] R[z] + B[z] S[z] = M[z] \quad (\text{D.2})$$

Niewiadomymi w tym równaniu wielomianowym są współczynniki wielomianów $R[z]$ i $S[z]$, opisujących regulator $C[z]$. Wielomian $M[z]$ po prawej stronie znaku równości jest stopnia piątego. Posiada on 6 współczynników zależnych od zadanych biegunów układu zamkniętego (współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej z można przyjąć równy jedności). Stąd, dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania równania diofantycznego, trzeba wielomiany $R[z]$ i $S[z]$ uzależnić od sześciu niewiadomych. Zażądajmy, by transmitancja $C[z]$ regulatora była przynajmniej nieściśle właściwa ($\deg S[z] \leq \deg R[z]$). Wówczas dla uzyskania sześciu niewiadomych współczynników należy przyjąć stopnie obu wielomianów $R[z]$ i $S[z]$ równe 2 ($\deg R[z] = \deg S[z] = 2$)

$$S[z] = s_2 z^2 + s_1 z + s_0, \quad R[z] = r_2 z^2 + r_1 z + r_0$$

Równanie wielomianowe (D.2) można zastąpić układem pięciu równań algebraicznych

$$a_0 r_0 + b_0 s_0 = m_0$$

$$a_1 r_0 + a_0 r_1 + b_1 s_0 + b_0 s_1 = m_1$$

$$a_2 r_0 + a_1 r_1 + a_0 r_2 + b_2 s_0 + b_1 s_1 + b_0 s_2 = m_2$$

$$a_3 r_0 + a_2 r_1 + a_1 r_2 + b_2 s_1 + b_1 s_2 = m_3$$

$$a_3 r_1 + a_2 r_2 + b_2 s_2 = m_4$$

$$a_3 r_2 = m_5$$

gdzie

$$A[z] = a_3 z^3 + z_2 z^2 + z_1 z + a_0$$

$$B[z] = b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

Powyższy układ równań może być zapisany w postaci wektorowo-macierzowej

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & | & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & | & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & | & b_2 & b_1 & b_0 \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 & | & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_3 & a_2 & | & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Jest to układ o postaci $Wz = b$, a jego rozwiązanie dane jest wzorem $z = W^{-1}b$.

W wyniku rozwiązania układu (D.5) dla wielomianów $A[z]$ i $B[z]$ wziętych kolejno z transmitancji $P_1[z]$ (III.50) oraz $P_2[z]$ (III.49), otrzymano wielomiany $R[z]$ i $S[z]$, opisujące regulatory $C_1[z]$ oraz $C_2[z]$. Transmitancje tych regulatorów są następujące

$$C_1[z] = \frac{-0.12864 z^2 + 0.28672 z - 0.15552}{z^2 - 0.93568 z + 0.9712}$$

$$C_2[z] = \frac{-0.01072 z^2 + 0.05216 z - 0.03888}{z^2 - z + 0.62144}$$

D.3 Wyprowadzenie warunku porównywalności układów regulacji

Poniżej pokażemy sposób wyznaczania macierzy K i L regulatora i obserwatora w układach regulacji z odrzucaniem i grupowaniem próbek, gwarantujący porównywalność pracy obu układów. Obliczenia przeprowadzone będą dla przykładu $M = 4$ i $\tau = T$. Rozpoczniemy od rozpatrzenia przypadku sterowania z odrzucaniem próbek w układzie bez zakłóceń ($v \equiv 0$, $w \equiv 0$). Znajdźmy zależność między $x[k+1]$ a $x[k+5]$, zakładając pełną zgodności modelu z obiektem ($\hat{\Phi} = \Phi$, $\hat{\Gamma} = \Gamma$, $\hat{C} = C$). Na podstawie wzorów zamieszczonych na rysunku III.54, dla obiektu **PD** mamy

$$x[k+5] = \Phi x[k+4] + \Gamma u[k+4] \quad (\text{D.7a})$$

$$x[k+4] = \Phi x[k+3] + \Gamma u[k+3] \quad (\text{D.7b})$$

$$x[k+3] = \Phi x[k+2] + \Gamma u[k+2] \quad (\text{D.7c})$$

$$x[k+2] = \Phi x[k+1] + \Gamma u[k+1] \quad (\text{D.7d})$$

Wartości sygnału sterującego, występujące w powyższych równaniach, są takie same i równe

$$u[k+4] = u[k+3] = u[k+2] = u[k+1] = -K_1 \hat{x}[k+1]$$

Na podstawie pięciu podanych wyżej równań można otrzymać wzór

$$x[k+5] = \Phi^4 x[k+1] + (\Phi^3 + \Phi^2 + \Phi + I) \Gamma K_1 \hat{x}[k+1]$$

Dla uproszczenia założmy, że estymata stanu jest równa stanowi (co byłoby prawdą w przypadku równości warunków początkowych obiektu i obserwatora)

$$\hat{x}[k+1] = x[k+1]$$

W takim przypadku poprzednia formuła przyjmuje postać

$$x[k+5] = (\Phi^4 + (\Phi^3 + \Phi^2 + \Phi + I) \Gamma K_1) x[k+1] \quad (\text{D.8})$$

Otrzymane równanie podaje zależność między stanem x w dwóch chwilach czasu oddzielonych „długim” okresem $4T$.

Znajdźmy teraz zależność między $x[k+1]$ a $x[k+5]$ w układzie z grupowaniem próbek. Podobnie jak poprzednio, przyjmujemy założenia o braku zakłóceń i zgodności modelu z obiektem. Na podstawie rysunku III.56 można podać cztery równania opisujące zachowanie się obiektu, identyczne z (D.7a)–(D.7d). W rozpatrywanym układzie wartości sterowań w kolejnych krokach są (w ogólności) różne

$$u[k+1] = -K_M \hat{x}[k+1] \quad (\text{D.9a})$$

$$u[k+2] = -K_M \hat{x}[k+2] \quad (\text{D.9b})$$

$$u[k+3] = -K_M \hat{x}[k+3] \quad (\text{D.9c})$$

$$u[k+4] = -K_M \hat{x}[k+4] \quad (\text{D.9d})$$

Założmy jak poprzednio, że estymata stanu w kolejnych krokach obliczeń równa jest stanowi

$$\hat{x}[k+1] = x[k+1] \quad (\text{D.10a})$$

$$\hat{x}[k+2] = x[k+2] \quad (\text{D.10b})$$

$$\hat{x}[k+3] = x[k+3] \quad (\text{D.10c})$$

$$\hat{x}[k+4] = x[k+4] \quad (\text{D.10d})$$

Wstawmy (D.10a)–(D.10d) do (D.9a)–(D.9d), a następnie (D.9a)–(D.9d) do (D.7a)–(D.7d). Na podstawie czterech otrzymanych w ten sposób równań uzyskujemy

$$x[k+5] = (\Phi - \Gamma K_M)^4 x[k+1] \quad (\text{D.11})$$

Otrzymany wzór podaje zależność między stanem x w dwóch chwilach czasu oddzielonych „długim” okresem $4T$.

Jeśli macierze $(\Phi^4 + (\Phi^3 + \Phi^2 + \Phi + I) \Gamma K_1)$ oraz $(\Phi - \Gamma K_M)^4$ stanu w równaniach (D.8) oraz (D.11) będą miały takie same wartości własne, to można miarodajnie porównywać efekty działania obu regulatorów (w wersji z odrzucaniem i grupowaniem próbek). Spełnienie warunku równości wartości własnych możliwe jest przez odpowiedni dobór macierzy regulatorów K_1 oraz K_M .

W sposób podobny do opisanego wyżej można wyprowadzić warunki, jakie powinny spełniać macierze L_1 i L_M użyte w identycznościowych obserwatorach Luenbergera. Tym razem badać będziemy zależność między $\tilde{x}[k-3]$ a $\tilde{x}[k+1]$ w obu rozpatrywanych układach regulacji (z odrzucaniem i z grupowaniem próbek). Wielkość \tilde{x} zdefiniowana jest jako błąd estymacji stanu (różnica między estymatą \hat{x} a stanem x)

$$\tilde{x}[k] = \hat{x}[k] - x[k]$$

Jak poprzednio założymy brak zakłóceń oraz zgodność modelu z obiektem. Dla układu z odrzucaniem próbek obserwator oraz predyktor stanu opisane są następującymi równaniami

$$\hat{x}[k+1] = \Phi \hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L_1 (y[k] - C \hat{x}[k]) \quad (\text{D.12a})$$

$$\hat{x}[k] = \Phi \hat{x}[k-1] + \Gamma u[k-1]$$

$$\hat{x}[k-1] = \Phi \hat{x}[k-2] + \Gamma u[k-2]$$

$$\hat{x}[k-2] = \Phi \hat{x}[k-3] + \Gamma u[k-3]$$

gdzie $y[k] = C x[k]$. Wzory te można odczytać z rysunku III.54. Trzy ostatnie równania mogą być przekształcone do postaci

$$\hat{x}[k] = \Phi^3 \hat{x}[k-3] + (\Phi^2 + \Phi + I) \Gamma u[k-3] \quad (\text{D.13})$$

ponieważ $u[k-3] = u[k-2] = u[k-1] = u[k]$. Obiekt regulacji opisany jest formułami

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \quad (\text{D.14a})$$

$$x[k] = \Phi x[k-1] + \Gamma u[k-1] \quad (\text{D.14b})$$

$$x[k-1] = \Phi x[k-2] + \Gamma u[k-2] \quad (\text{D.14c})$$

$$x[k-2] = \Phi x[k-3] + \Gamma u[k-3] \quad (\text{D.14d})$$

Kombinacja trzech ostatnich wzorów daje

$$x[k] = \Phi^3 x[k-3] + (\Phi^2 + \Phi + I) \Gamma u[k-3] \quad (\text{D.15})$$

Odejmując (D.14a) od (D.12a) otrzymujemy

$$\tilde{x}[k+1] = \Phi \tilde{x}[k] - L_1 C \tilde{x}[k]$$

Podobnie, odjęcie (D.15) od (D.13) daje

$$\tilde{x}[k] = \Phi^3 \tilde{x}[k-3]$$

Na podstawie dwóch ostatnich wzorów uzyskujemy równanie

$$\tilde{x}[k+1] = (\Phi - L_1 C) \Phi^3 \tilde{x}[k-3] \quad (\text{D.16})$$

Powyższa formuła wiąże ze sobą wartości błędu estymacji w chwilach czasu odległych o $4T$.

Przejdźmy teraz do układu z grupowaniem próbek. Obserwator stanu, przedstawiony na rysunku III.56, opisany jest następującymi wzorami

$$\hat{x}[k+1] = \Phi \hat{x}[k] + \Gamma u[k] + L_M (y[k] - C x[k])$$

$$\hat{x}[k] = \Phi \hat{x}[k-1] + \Gamma u[k-1] + L_M (y[k-1] - C x[k-1])$$

$$\hat{x}[k-1] = \Phi \hat{x}[k-2] + \Gamma u[k-2] + L_M (y[k-2] - C x[k-2])$$

$$\hat{x}[k-2] = \Phi \hat{x}[k-3] + \Gamma u[k-3] + L_M (y[k-3] - C x[k-3])$$

gdzie $y[k-i] = Cx[k-i]$ dla $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Obiekt opisany jest równaniami stanu (D.14a)–(D.14d). Odejmując stronami parami równania obserwatora i obiektu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\tilde{x}[k+1] &= \Phi \tilde{x}[k] - L_M C \tilde{x}[k] \\ \tilde{x}[k] &= \Phi \tilde{x}[k-1] - L_M C \tilde{x}[k-1] \\ \tilde{x}[k-1] &= \Phi \tilde{x}[k-2] - L_M C \tilde{x}[k-2] \\ \tilde{x}[k-2] &= \Phi \tilde{x}[k-3] - L_M C \tilde{x}[k-3]\end{aligned}$$

Kombinacja czterech ostatnich równań daje

$$\tilde{x}[k+1] = (\Phi - L_M C)^4 \tilde{x}[k-3] \quad (\text{D.19})$$

Powyższy wzór wiąże ze sobą wartości błędów estymacji w chwilach czasu odległych o $4T$.

By można było miarodajnie porównywać działanie układów z odrzucaniem i grupowaniem próbek, macierze $(\Phi - L_1 C) \Phi^3$ oraz $(\Phi - L_M C)^4$ w równaniach stanu (D.16) oraz (D.19) powinny mieć te same wartości własne. Można to osiągnąć przez odpowiedni dobór macierzy L_1 i L_M .

Powyżej rozważano konkretny przypadek gdy $M = 4$. W podobny sposób można wyprowadzić warunki porównywalności układów dla dowolnego skończonego $M \geq 2$.

D.4 Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem ZOH

Poniżej zamieszczono wyprowadzenie formuły wskaźnika jakości regulacji w układzie z ekstrapolatorem typu ZOH.

Z założenia obiekt \mathbf{PC} ma jedno wejście, a to oznacza, że sygnał $u(t)$ jest skalar. Stąd składnik $u(t)^T R u(t)$ funkcji podcałkowej w (III.127) można zastąpić przez $R u(t)^2$, otrzymując

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + R u(t)^2] dt \quad (\text{D.20})$$

Całka występująca we powyższym wzorze może być rozbita na sumę całek na przedziałach wyznaczonych przez kolejne chwile próbkowania $t_k = kT$

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} [x(t)^T Q x(t) + R u(t)^2] dt = \sum_{k=0}^{\infty} J_k \quad (\text{D.21})$$

Stosując podstawienie $t = \tau + kT$, całkę J_k można przedstawić w postaci

$$J_k = \int_0^T [x(kT + \tau)^T Q x(kT + \tau) + R u(kT + \tau)^2] d\tau \quad (\text{D.22})$$

Dalej wyprowadzimy zależność wielkości J_k od wartości dyskretnych sygnałów $x[k]$ oraz $u[k]$. W tym celu najpierw we wzorze (III.15) zastosujemy podstawienia

$$t_1 = kT, \quad t_2 = t_1 + \tau = kT + \tau, \quad \tau \in [0, T), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x(kT) = x[k]$$

otrzymując

$$x(kT + \tau) = e^{\tau A} x[k] + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B d\zeta u[k]$$

Całkując przez podstawienie $\sigma = kT + \tau - \zeta$ oraz zamieniając kolejność granic całkowania, dostajemy

$$x(kT + \tau) = \underbrace{e^{\tau A}}_{F^{\text{ZOH}}(\tau)} x[k] + \underbrace{\int_0^\tau e^{\sigma A} B d\sigma}_{G^{\text{ZOH}}(\tau)} u[k]$$

lub inaczej

$$x(kT + \tau) = F^{\text{ZOH}}(\tau) x[k] + G^{\text{ZOH}}(\tau) u[k] \quad (\text{D.23})$$

gdzie

$$F^{\text{ZOH}}(\tau) = e^{\tau A}, \quad G^{\text{ZOH}}(\tau) = \int_0^\tau e^{\sigma A} B d\sigma$$

Dla skrócenia i uproszczenia zapisu wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} F_\tau &= F^{\text{ZOH}}(\tau), & G_\tau &= G^{\text{ZOH}}(\tau) \\ x_{k\tau} &= x(kT + \tau), & u_{k\tau} &= u(kT + \tau), & x_k &= x[k], & u_k &= u[k] \end{aligned}$$

w których równanie (D.23) przyjmuje postać

$$x_{k\tau} = F_\tau x_k + G_\tau u_k \quad (\text{D.24})$$

a wzór (D.22) otrzymuje formę

$$J_k = \int_0^T [x_{k\tau}^\top Q x_{k\tau} + R u_{k\tau}^2] d\tau \quad (\text{D.25})$$

Z zasady działania ekstrapolatora ZOH wynika równość $u_{k\tau} = u[k]$ dla każdego $\tau \in [0, T]$. Wstawiając (D.24) do (D.25), otrzymujemy.

$$J_k = \int_0^T [(F_\tau x_k + G_\tau u_k)^\top Q (F_\tau x_k + G_\tau u_k) + R u_k^2] d\tau$$

a następnie

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^T (x_k^\top F_\tau^\top Q F_\tau x_k + x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_k + \\ &\quad u_k G_\tau^\top Q F_\tau x_k + u_k G_\tau^\top Q G_\tau u_k + R u_k^2) d\tau \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Uwzględniając równości

$$x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_k = u_k G_\tau^\top Q F_\tau x_k, \quad u_k G_\tau^\top Q G_\tau u_k = G_\tau^\top Q G_\tau u_k^2$$

we wzorze (D.26) można zredukować liczbę składników i uprościć go do postaci

$$J_k = \int_0^T [x_k^\top F_\tau^\top Q F_\tau x_k + 2 x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_k + (G_\tau^\top Q G_\tau + R) u_k^2] d\tau$$

Rozbijając całkę na sumę i wyłączając stałe poza znaki całek, dostajemy

$$J_k = x_k^\top \underbrace{\left[\int_0^T F_\tau^\top Q F_\tau d\tau \right]}_{Q^{\text{ZOH}}} x_k + 2 x_k^\top \underbrace{\left[\int_0^T F_\tau^\top Q G_\tau d\tau \right]}_{S^{\text{ZOH}}} u_k + \underbrace{\left[\int_0^T (G_\tau^\top Q G_\tau + R) d\tau \right]}_{R^{\text{ZOH}}} u_k^2$$

lub inaczej

$$J_k = x_k^T Q^{\text{ZOH}} x_k + 2 x_k^T S^{\text{ZOH}} u_k + R^{\text{ZOH}} u_k^2 \quad (\text{D.27})$$

gdzie

$$Q^{\text{ZOH}} = \int_0^T F_\tau^T Q F_\tau d\tau, \quad S^{\text{ZOH}} = \int_0^T F_\tau^T Q G_\tau d\tau, \quad R^{\text{ZOH}} = \int_0^T (G_\tau^T Q G_\tau + R) d\tau$$

Wstawiając (D.27) do (D.21) i wracając do oznaczeń $x[k]$, $u[k]$, otrzymuje się ostatecznie

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q^{\text{ZOH}} x[k] + 2 x[k]^T S^{\text{ZOH}} u[k] + R^{\text{ZOH}} u[k]^2)$$

D.5 Model matematyczny układu regulacji z ekstrapolatorem FOH

Poniżej zamieszczono wyprowadzenie równań stanu opisujących układ regulacji z ekstrapolatorem typu FOH. Wzór (III.124), opisujący pracę ekstrapolatora FOH, można przekształcić do postaci

$$u(t) = \left(1 + \frac{t - kT}{T}\right) u[k] - \frac{t - kT}{T} u[k - 1] \quad (\text{D.28})$$

Stosując we wzorze (III.15) podstawienia $t_1 = kT$ i $t_2 = (k + 1)T$ oraz uwzględniając równość (D.28), otrzymuje się następującą formułę

$$x[k+1] = e^{TA} x[k] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\zeta)A} B \left(\left(1 + \frac{\zeta - kT}{T}\right) u[k] - \frac{\zeta - kT}{T} u[k - 1] \right) d\zeta \quad (\text{D.29})$$

Dokonując w całce zamiany zmiennych $\xi = (k + 1)T - \zeta$, zamieniając miejscami granice całkowania oraz rozbijając ją na sumę dwóch składników, dostajemy

$$x[k+1] = \underbrace{e^{TA}}_{\Phi^{\text{foh}}} x[k] + \underbrace{\int_0^T e^{\xi A} B \left(2 - \frac{\xi}{T}\right) d\xi}_{\Gamma_0^{\text{foh}}} u[k] + \underbrace{\int_0^T e^{\xi A} B \left(\frac{\xi}{T} - 1\right) d\xi}_{\Gamma_1^{\text{foh}}} u[k - 1]$$

lub inaczej

$$x[k+1] = \Phi^{\text{foh}} x[k] + \Gamma_0^{\text{foh}} u[k] + \Gamma_1^{\text{foh}} u[k - 1] \quad (\text{D.30})$$

gdzie

$$\Phi^{\text{foh}} = e^{TA}, \quad \Gamma_0^{\text{foh}} = \int_0^T e^{\xi A} B \left(2 - \frac{\xi}{T}\right) d\xi, \quad \Gamma_1^{\text{foh}} = \int_0^T e^{\xi A} B \left(\frac{\xi}{T} - 1\right) d\xi$$

Podobnie jak poprzednio $y[k] = C^{\text{foh}} x[k]$, gdzie $C^{\text{foh}} = C = I$. Postać wzoru (D.30) sugeruje konieczność wprowadzenia rozszerzonego wektor stanu

$$z[k] = \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k - 1] \end{bmatrix} \quad (\text{D.31})$$

Z jego pomocą oraz na podstawie wyprowadzonych wyżej wzorów, można skonstruować równania stanu z czasem dyskretnym, opisujące rozważany obiekt regulacji

$$\begin{bmatrix} x[k+1] \\ u[k] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi^{\text{foh}} & \Gamma_1^{\text{foh}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^{\text{FOH}}} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k - 1] \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_0^{\text{foh}} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma^{\text{FOH}}} u[k]$$

$$y[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} C^{\text{foh}} & 0 \end{bmatrix}}_{C^{\text{FOH}}} \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k - 1] \end{bmatrix}$$

lub inaczej

$$\begin{aligned} z[k+1] &= \Phi^{\text{FOH}} z[k] + \Gamma^{\text{FOH}} u[k] \\ y[k] &= C^{\text{FOH}} z[k] \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} \Phi^{\text{foh}} & \Gamma^{\text{foh}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} \Gamma_0^{\text{foh}} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^{\text{FOH}} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

D.6 Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem FOH

Poniżej zamieszczono wyprowadzenie formuły wskaźnika jakości regulacji w układzie z ekstrapolatorem typu FOH. Wzór (D.29) otrzymano z (III.15) stosując podstawienie $t_2 = (k+1)T$. Jeśli zamiast tego przyjąć $t_2 = kT + \tau$ dla $0 \leq \tau < T$, uzyskuje się

$$x(kT + \tau) = e^{\tau A} x[k] + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B \left(\left(1 + \frac{\zeta - kT}{T}\right) u[k] - \frac{\zeta - kT}{T} u[k-1] \right) d\zeta$$

Po zastosowaniu zamiany zmiennych $\sigma = kT + \tau - \zeta$, zamianie miejscami granic całkowania i rozbiciu całki na sumę dwóch składników, dostajemy

$$x(kT + \tau) = \underbrace{e^{\tau A}}_{F^{\text{FOH}}(\tau)} x[k] + \underbrace{\int_0^\tau e^{\sigma A} B \left(1 + \frac{\tau - \sigma}{T}\right) d\sigma}_{G^{\text{FOH}}(\tau)} u[k] + \underbrace{\int_0^\tau e^{\sigma A} B \frac{\sigma - \tau}{T} d\sigma}_{H^{\text{FOH}}(\tau)} u[k-1]$$

lub inaczej

$$x(kT + \tau) = F^{\text{FOH}}(\tau) x[k] + G^{\text{FOH}}(\tau) u[k] + H^{\text{FOH}}(\tau) u[k-1] \quad (\text{D.34})$$

gdzie

$$\begin{aligned} F^{\text{FOH}}(\tau) &= e^{\tau A}, \quad G^{\text{FOH}}(\tau) = \int_0^\tau e^{\sigma A} B \left(1 + \frac{\tau - \sigma}{T}\right) d\sigma \\ H^{\text{FOH}}(\tau) &= \int_0^\tau e^{\sigma A} B \frac{\sigma - \tau}{T} d\sigma \end{aligned}$$

Dla uproszczenia dalszych zapisów wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned} F_\tau &= F^{\text{FOH}}(\tau), \quad G_\tau = G^{\text{FOH}}(\tau), \quad H_\tau = H^{\text{FOH}}(\tau) \\ x_{k\tau} &= x(kT + \tau), \quad u_{k\tau} = u(kT + \tau) \end{aligned}$$

Po ich zastosowaniu równania: (D.34) (rozwiązanie równania stanu z czasem ciągłym na przedziale $[kT, (k+1)T)$), (D.28) (sygnał u z ekstrapolatora FOH) i (D.22) (składowy wskaźnik jakości) można zapisać jako

$$x_{k\tau} = F_\tau x_k + G_\tau u_k + H_\tau u_{k-1} \quad (\text{D.35})$$

$$u_{k\tau} = \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) u_k - \frac{\tau}{T} u_{k-1} \quad (\text{D.36})$$

$$J_k = \int_0^T [x_{k\tau}^T Q x_{k\tau} + R u_{k\tau}^2] d\tau \quad (\text{D.37})$$

Wstawiając (D.35) i (D.36) do (D.37) otrzymuje się

$$J_k = \int_0^T \left[(F_\tau u_k + G_\tau u_k + H_\tau u_{k-1})^\top Q (F_\tau u_k + G_\tau u_k + H_\tau u_{k-1}) + R \left(\left(1 + \frac{\tau}{T}\right) u_k - \frac{\tau}{T} u_{k-1} \right)^2 \right] d\tau$$

Po dokonaniu potęgowania i wykonaniu odpowiednich mnożeń dostajemy

$$\begin{aligned} J_k = \int_0^T \left(u_k^\top F_\tau^\top Q F_\tau u_k + u_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_k + u_k^\top F_\tau^\top Q H_\tau u_{k-1} + \right. \\ u_k G_\tau^\top Q F_\tau u_k + u_k G_\tau^\top Q G_\tau u_k + u_k G_\tau^\top Q H_\tau u_{k-1} + \\ \left. u_{k-1} H_\tau^\top Q F_\tau u_k + u_{k-1} H_\tau^\top Q G_\tau u_k + u_{k-1} H_\tau^\top Q H_\tau u_{k-1} + \right. \\ \left. R \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 u_k^2 - 2R \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) \frac{\tau}{T} u_k u_{k-1} + R \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 u_{k-1}^2 \right) d\tau \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Po uwzględnieniu równości

$$\begin{aligned} x[k]^\top F_\tau^\top Q G_\tau u[k] &= u[k] G_\tau^\top Q F_\tau x[k] \\ x[k]^\top F_\tau^\top Q H_\tau u[k-1] &= u[k-1] H_\tau^\top Q F_\tau x[k] \\ u[k] G_\tau^\top Q G_\tau u[k] &= G_\tau^\top Q G_\tau u[k]^2 \\ u[k-1] H_\tau^\top Q H_\tau u[k-1] &= H_\tau^\top Q H_\tau u[k-1]^2 \\ u[k-1] H_\tau^\top Q G_\tau u[k] &= H_\tau^\top Q G_\tau u[k] u[k-1] \end{aligned}$$

i pogrupowaniu składników, wzór (D.38) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} J_k = \int_0^T \left[x[k]^\top F_\tau^\top Q F_\tau x[k] + 2x[k]^\top F_\tau^\top Q G_\tau u[k] + 2x[k]^\top F_\tau^\top Q H_\tau u[k-1] + \right. \\ \left. + \left(H_\tau^\top Q H_\tau + R \left(\frac{\tau}{T}\right)^2 \right) u[k-1]^2 + \left(G_\tau^\top Q G_\tau + R \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 \right) u[k]^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(G_\tau^\top Q H_\tau - R \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\tau^2}{T^2}\right) \right) u[k] u[k-1] \right] d\tau \end{aligned}$$

Dalej, rozbijając całkę na sumę całek i stosując macierze blokowe, można go przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} J_k = \begin{bmatrix} x[k]^\top & u[k-1] \end{bmatrix} \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{F_\tau^\top Q F_\tau}{H_\tau^\top Q F_\tau} & \frac{F_\tau^\top Q H_\tau}{H_\tau^\top Q H_\tau + R \frac{\tau^2}{T^2}} \\ \frac{F_\tau^\top Q G_\tau}{G_\tau^\top Q H_\tau - R \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\tau^2}{T^2}\right)} & \end{bmatrix} d\tau \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k-1] \end{bmatrix} + \\ + 2 \begin{bmatrix} x[k]^\top & u[k-1] \end{bmatrix} \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{F_\tau^\top Q G_\tau}{G_\tau^\top Q H_\tau - R \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\tau^2}{T^2}\right)} \end{bmatrix} d\tau u[k] + \\ + \int_0^T \left(G_\tau^\top Q G_\tau + R \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 \right) d\tau u[k]^2 \end{aligned}$$

w której występuje rozszerzony wektor stanu (D.31). W zwartej formie powyższe równanie przyjmuje postać

$$\begin{aligned} J_k &= z[k]^\top Q^{\text{FOH}} z[k] + 2z[k]^\top S^{\text{FOH}} u[k] + R^{\text{FOH}} u[k]^2 = \\ &= \begin{bmatrix} z[k]^\top & u[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\text{FOH}} & S^{\text{FOH}} \\ S^{\text{FOH}\top} & R^{\text{FOH}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z[k] \\ u[k] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

gdzie

$$Q^{\text{FOH}} = \int_0^T \begin{bmatrix} F_\tau^\text{T} Q F_\tau & F_\tau^\text{T} Q H_\tau \\ H_\tau^\text{T} Q F_\tau & H_\tau^\text{T} Q H_\tau + R \frac{\tau^2}{T^2} \end{bmatrix} d\tau,$$

$$S^{\text{FOH}} = \int_0^T \begin{bmatrix} F_\tau^\text{T} Q G_\tau \\ G_\tau^\text{T} Q H_\tau - R \left(\frac{\tau}{T} + \frac{\tau^2}{T^2} \right) \end{bmatrix} d\tau,$$

$$R^{\text{FOH}} = \int_0^T \left(G_\tau^\text{T} Q G_\tau + R \left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^2 \right) d\tau$$

Wstawiając (D.40) do (D.21) otrzymuje się ostatecznie

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(z[k]^\text{T} Q^{\text{FOH}} z[k] + 2 z[k]^\text{T} S^{\text{FOH}} u[k] + R^{\text{FOH}} u[k]^2 \right)$$

D.7 Model matematyczny układu regulacji z ekstrapolatorem IFOH

Poniżej zamieszczono wyprowadzenie równań stanu opisujących układ regulacji z ekstrapolatorem typu IFOH.

Dokonując w równaniu (III.15) podstawień

$$t_1 = kT, \quad t_2 = (k+1)T$$

oraz wstawiając $u(t)$ określone wzorem (III.125), otrzymujemy formułę

$$x((k+1)T) = e^{((k+1)T-kT)A} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\zeta)A} B (u_1[k] + (\zeta - kT) u_2[k]) d\zeta$$

Po zastosowaniu oznaczeń

$$x[k+1] = x((k+1)T), \quad x[k] = x(kT)$$

następnie zamianie w całce zmiennych według wzoru

$$\xi = (k+1)T - \zeta, \quad \zeta = (k+1)T - \xi, \quad d\zeta = -d\xi, \quad \zeta - kT = T - \xi$$

i wykonaniu kilku przekształceń, dostajemy wzór

$$x[k+1] = \underbrace{e^{TA}}_{\Phi^{\text{ifoh}}} x[k] + \underbrace{\int_0^T e^{\xi A} B d\xi}_{\Gamma_1^{\text{ifoh}}} u_1[k] + \underbrace{\int_0^T e^{\xi A} B (T - \xi) d\xi}_{\Gamma_2^{\text{ifoh}}} u_2[k]$$

lub inaczej

$$x[k+1] = \Phi^{\text{ifoh}} x[k] + \Gamma_1^{\text{ifoh}} u_1[k] + \Gamma_2^{\text{ifoh}} u_2[k] \quad (\text{D.42})$$

gdzie

$$\Phi^{\text{ifoh}} = e^{TA}, \quad \Gamma_1^{\text{ifoh}} = \int_0^T e^{\xi A} B d\xi, \quad \Gamma_2^{\text{ifoh}} = \int_0^T e^{\xi A} B (T - \xi) d\xi$$

Równanie (D.42) można inaczej zapisać jako

$$x[k+1] = \underbrace{\Phi^{\text{ifoh}}}_{\Phi^{\text{IFOH}}} x[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1^{\text{ifoh}} & \Gamma_2^{\text{ifoh}} \end{bmatrix}}_{\Gamma^{\text{IFOH}}} \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix} \quad (\text{D.43})$$

gdzie $u[k] = \begin{bmatrix} u_1[k] & u_2[k] \end{bmatrix}^T$. Na podstawie (D.43) oraz (III.59b) i (III.123), otrzymujemy równania stanu systemu z czasem dyskretnym

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \Phi^{\text{IFOH}} x[k] + \Gamma^{\text{IFOH}} u[k] \\ y[k] &= C^{\text{IFOH}} x[k] \end{aligned}$$

gdzie

$$\Phi^{\text{IFOH}} = \Phi^{\text{ifoh}}, \quad \Gamma^{\text{IFOH}} = \begin{bmatrix} \Gamma_1^{\text{ifoh}} & \Gamma_2^{\text{ifoh}} \end{bmatrix}, \quad C^{\text{IFOH}} = C = I$$

D.8 Wskaźnik jakości regulacji dla układu z ekstrapolatorem IFOH

Poniżej zamieszczono wyprowadzenie formuły wskaźnika jakości regulacji w układzie z ekstrapolatorem typu IFOH. Podstawiając w (III.15)

$$t_1 = kT, \quad t_2 = t_1 + \tau = kT + \tau, \quad \tau \in [0, T)$$

otrzymujemy

$$x(kT + \tau) = e^{((kT+\tau)-kT)A} x(kT) + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B u(\zeta) d\zeta$$

Wstawiając do powyższego (III.125) dostajemy

$$x(kT + \tau) = e^{\tau A} x[k] + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B (u_1[k] + (\zeta - kT) u_2[k]) d\zeta$$

a następnie

$$\begin{aligned} x(kT + \tau) &= e^{\tau A} x[k] + \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B d\zeta u_1[k] + \\ &+ \int_{kT}^{kT+\tau} e^{(kT+\tau-\zeta)A} B (\zeta - kT) d\zeta u_2[k] \end{aligned}$$

Stosując w obu całkach zamianę zmiennych

$$\xi = kT + \tau - \zeta, \quad \zeta = kT + \tau - \xi, \quad d\zeta = -d\xi, \quad \zeta - kT = \tau - \xi$$

uzyskujemy

$$x(kT + \tau) = \underbrace{e^{\tau A}}_{F^{\text{IFOH}}(\tau)} x[k] + \underbrace{\int_0^{\tau} e^{\xi A} B d\xi}_{G^{\text{IFOH}}(\tau)} u_1[k] + \underbrace{\int_0^{\tau} e^{\xi A} B (\tau - \xi) d\xi}_{H^{\text{IFOH}}(\tau)} u_2[k]$$

lub inaczej

$$x(kT + \tau) = F^{\text{IFOH}}(\tau) x[k] + G^{\text{IFOH}}(\tau) u_1[k] + H^{\text{IFOH}}(\tau) u_2[k] \quad (\text{D.45})$$

gdzie

$$F^{\text{IFOH}}(\tau) = e^{\tau A}, \quad G^{\text{IFOH}}(\tau) = \int_0^\tau e^{\xi A} B \, d\xi \quad H^{\text{IFOH}}(\tau) = \int_0^\tau e^{\xi A} B (\tau - \xi) \, d\xi$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$F_\tau = F^{\text{ZOH}}(\tau), \quad G_\tau = G^{\text{ZOH}}(\tau), \quad H_\tau = H^{\text{ZOH}}(\tau)$$

$$x_k = x[k] = x(kT), \quad x_{k\tau} = x(kT + \tau)$$

$$u_{1k} = u_1[k], \quad u_{2k} = u_2[k], \quad u_{k\tau} = u(kT + \tau)$$

wzory (D.45), (III.125) i (D.22) można zapisać odpowiednio w postaci

$$x_{k\tau} = F_\tau x_k + G_\tau u_{1k} + H_\tau u_{2k}$$

$$u_{k\tau} = u_{1k} + u_{2k} \tau$$

$$J_k = \int_0^T [x_{k\tau}^\top Q x_{k\tau} + R u_{k\tau}^2] \, d\tau$$

Wstawiając do ostatniego wzoru dwa przedostatnie dostajemy

$$J_k = \int_0^T \left[(F_\tau x_k + G_\tau u_{1k} + H_\tau u_{2k})^\top Q (F_\tau x_k + G_\tau u_{1k} + H_\tau u_{2k}) + R (u_{1k} + u_{2k} \tau)^2 \right] \, d\tau$$

a następnie

$$J_k = \int_0^T \left(x_k^\top F_\tau^\top Q F_\tau x_k + x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} + x_k^\top F_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} + u_{1k} G_\tau^\top Q F_\tau x_k + u_{1k} G_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} + u_{1k} G_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} + u_{2k} H_\tau^\top Q F_\tau x_k + u_{2k} H_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} + u_{2k} H_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} + R u_{1k}^2 + 2 R u_{1k} u_{2k} \tau + R u_{2k}^2 \tau^2 \right) \, d\tau$$

Powyższe, wobec równości

$$x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} = u_{1k} G_\tau^\top Q F_\tau x_k$$

$$x_k^\top F_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} = u_{2k} H_\tau^\top Q F_\tau x_k$$

$$u_{1k} G_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} = G_\tau^\top Q G_\tau u_{1k}^2$$

$$u_{2k} H_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} = H_\tau^\top Q H_\tau u_{2k}^2$$

$$u_{2k} H_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} = H_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} u_{2k}$$

przekształca się w

$$J_k = \int_0^T \left(x_k^\top F_\tau^\top Q F_\tau x_k + 2 x_k^\top F_\tau^\top Q G_\tau u_{1k} + 2 x_k^\top F_\tau^\top Q H_\tau u_{2k} + (G_\tau^\top Q G_\tau + R) u_{1k}^2 + 2 (G_\tau^\top Q H_\tau + R \tau) u_{1k} u_{2k} + H_\tau^\top Q H_\tau + R \tau^2 \right) u_{2k}^2 \, d\tau$$

a następnie

$$\begin{aligned}
 J_k = & x_k^T \overbrace{\int_0^T F_\tau^T Q F_\tau d\tau}^{Q^{\text{IFOH}}} x_k + 2 x_k^T \overbrace{\int_0^T \begin{bmatrix} F_\tau^T Q G_\tau & F_\tau^T Q H_\tau \end{bmatrix} d\tau}^{S^{\text{IFOH}}} \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} u_{1k} & u_{2k} \end{bmatrix} \overbrace{\int_0^T \begin{bmatrix} (G_\tau^T Q G_\tau + R) & (G_\tau^T Q H_\tau + R\tau) \\ (H_\tau^T Q G_\tau + R\tau) & (H_\tau^T Q H_\tau + R\tau^2) \end{bmatrix} d\tau}^{R^{\text{IFOH}}} \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Otrzymany wynik można zapisać jako

$$J_k = x[k]^T Q^{\text{IFOH}} x[k] + 2 x[k]^T S^{\text{IFOH}} u[k] + u[k]^T R^{\text{IFOH}} u[k]$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 Q^{\text{IFOH}} &= \int_0^T F_\tau^T Q F_\tau d\tau \\
 S^{\text{IFOH}} &= \int_0^T \begin{bmatrix} F_\tau^T Q G_\tau & F_\tau^T Q H_\tau \end{bmatrix} d\tau \\
 R^{\text{IFOH}} &= \int_0^T \begin{bmatrix} (G_\tau^T Q G_\tau + R) & (G_\tau^T Q H_\tau + R\tau) \\ (H_\tau^T Q G_\tau + R\tau) & (H_\tau^T Q H_\tau + R\tau^2) \end{bmatrix} d\tau
 \end{aligned}$$

Ostatecznie, wracając do oznaczeń $x[k]$, $u[k] = \begin{bmatrix} u_1[k] & u_2[k] \end{bmatrix}^T$, mamy

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x[k]^T Q^{\text{ZOH}} x[k] + 2 x[k]^T S^{\text{ZOH}} u[k] + u[k]^T R^{\text{ZOH}} u[k])$$

Bibliografia

- [1] D. Abbott. *Linux for Embedded and Real-time Applications*. Elsevier Science, 2003.
- [2] Ch. T. Abdallah, J. N. Chiasson, and M. Ariola. Stability of communications networks in the presence of delays. In *The 3rd IFAC Conference on Time Delays*, December 2001.
- [3] S. Ahmed, M. Bilal, U. Farooq, and Fazl-e-Hadi. Performance analysis of various routing strategies in mobile ad hoc network using QualNet simulator. In *International Conference on Emerging Technologies – ICET 2007*, pages 62–67, November 2007.
- [4] P. Albertos, A. Crespo, I. Ripoll, M. Vallés, and P. Balbastre. RT control scheduling to reduce control performance degrading. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, December 2000.
- [5] F. Amato. *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Springer, 2006.
- [6] J. Baranowski and A. Tutaj. Continuous state estimation in water tank system. In *CMS 2007 – Computer Methods and Systems*, pages 373–378, November 2007.
- [7] J. Baranowski and A. Tutaj. Comparison of continuous state estimation algorithms in a water tank system. In *Recent advances in control and automation – XVI National Conference on Control*, pages 73–82, Warszawa, 2008. Academic Publishing House EXIT.
- [8] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L. H. Keel. *Robust Control – The Parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [9] S. Białas. *Macierze – wybrane problemy*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków, 2006.
- [10] E. Bianchi, L. Dozio, G. L. Ghiringhelli, and P. Mantegazza. Complex control systems, applications of DIAPM-RTAI at DIAPM. In *Realtime Linux Workshop*, Vienna, 1999.
- [11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- [12] B. Brahimi, E. Rondeau, and Ch. Aubrun. Comparison between networked control system behaviour based on CAN and switched Ethernet networks. In *2nd Workshop on Networked Control Systems: Tolerant to fault*, November 2006.

- [13] M. S. Branicky, V. Liberatore, and S. M. Phillips. Networked control system co-simulation for co-design. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 3341–3346, June 2003.
- [14] M. S. Branicky, S. M. Phillips, and W. Zhang. Scheduling and feedback co-design for networked control systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [15] I. N. Bronsztejn and K. A. Siemiendiajew. *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 11th edition, 1995.
- [16] M. Busłowicz. *Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach*, volume 48 of *Rozprawy Naukowe*. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok, 1997.
- [17] M. Busłowicz. *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, volume 1 of *Monografie*. Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa – Białystok, 2000.
- [18] A. Cervin, K.-E. Årzén, D. Henriksson, M. L. Camps, P. Balbastre, I. Ripoll, and A. Crespo. Control loop timing analysis using TrueTime and Jitterbug. In *Proceedings of the 2006 IEEE Computer Aided Control Systems Design Symposium*, October 2006.
- [19] A. Cervin, D. Henriksson, B. Lincoln, and K.-E. Årzén. Jitterbug and TrueTime: Analysis tools for real-time control systems. In *Proceedings of the 2nd Workshop on Real-Time Tools*, Copenhagen, Denmark, August 2002.
- [20] A. Cervin, M. Ohlin, and D. Henriksson. Simulation of networked control systems using TrueTime. In *Proceedings of 3rd International Workshop on Networked Control Systems: Tolerant to Faults*, Nancy, France, June 2007. Invited talk.
- [21] J. Chen, Z. Wang, and Y. Sun. Real-time capability analysis for switch industrial Ethernet traffic priority-based. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 525–529, Glasgow, Scotland, UK, September 2002.
- [22] M.-Y. Chow and Y. Tipsuwan. Gain adaptation of networked DC motor controllers based on QoS variations. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 50(5), October 2003.
- [23] N.-Y. Chow and Y. Tipsuwan. Network-based control systems: A tutorial. In *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 1593–1602, 2001.
- [24] F. Ciancetta, G. Bucci, B. D’Apice, C. Di Nucci, and M. T. Todisco. A distributed measurement system based on peer-to-peer architecture for river monitoring. In *IEEE Symposium on Virtual Environments, Human-Computer Interfaces and Measurement Systems*, pages 87–92, Ostuni, June 2007.

- [25] J. Colandairaj, G. W. Irwin, and W. G. Scanlon. Analysis and co-simulation of an IEEE 802.11B wireless networked control system. In *16th IFAC World Congress in Prague*, Prague, 2005.
- [26] P. M. Colom. *Analysis and Design of Real-Time Control Systems with Varying Control Timing Constraints*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2002.
- [27] S. Czerni, E. Tabaczkiewicz, J. Iwańska, Z. Pędzińska, and P. Brykczyński. *Leksykon Naukowo-Techniczny*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 3rd edition, 1984.
- [28] A. Damen and S. Weiland. Robust control (draft version). <http://www.cs.ele.tue.nl>, July 2002. Measurement and Control Group, Department of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology.
- [29] S. Davies. Industrial Ethernet – the fundamentals of EtherNet/IP – EtherNet/IP has reached the million-node landmark, but what is making this protocol so attractive to industrial control engineers? *IET Computing & Control Engineering Journal*, 18:42–45, February–March 2007.
- [30] I. Diouri, JP. Georges, and E. Rondeau. Accommodation of the service offered by the network for networked control systems. In *2nd Workshop on Networked Control Systems: Tolerant to Faults*, November 2006.
- [31] M. Doğruel and Ü. Özgüner. Stability of a set of matrices: A control theoretic approach. In *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, pages 1324–1329, New Orleans, LA, December 1995.
- [32] B. P. Douglass. *Real-Time Design Patterns: Robust Scalable Architecture for Real-Time Systems*. Addison Wesley, 2002.
- [33] L. Dozio and P. Mantegazza. Linux real time application interface (RTAI) in low cost high performance motion control. In *Motion Control 2003, a conference of ANIPLA, Associazione Nazionale Italiana per l'Automazione (National Italian Association for Automation)*, Milano, Italy, March 2003.
- [34] L. Dozio and P. Mantegazza. Real time distributed control systems using RTAI. In *Sixth IEEE International Symposium on Object-Oriented Real-Time Distributed Computing*, pages 11–18, Hakodate, Hokkaido, Japan, 14-16 May 2003.
- [35] J. T. Duda. *Modele matematyczne, struktury i algorytmy nadrzędnego sterowania komputerowego*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, Kraków, 2003.
- [36] A. Emadi, editor. *Handbook of Automotive Power Electronics and Motor Drives*. CRC Press, 2005.
- [37] J. Feld. PROFINET – scalable factory communication for all applications. In *Proceedings of IEEE International Workshop on Factory Communication Systems*, pages 33–38, September 2004.

- [38] W. Findeisen, editor. *Poradnik inżyniera. Automatyka*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1st edition, 1969.
- [39] G. Franklin, D. Powell, and M. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*. Adison-Wesley, Reading, 1990.
- [40] H. Ye G. C. Walsh and L. G. Bushnell. Stability analysis of networked control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(3), May 2002.
- [41] J. Gáamiz-Caro and A. Grau. Message delay in distributed control systems through Ethernet. In *16th IFAC World Congress in Prague*, Prague, Czech Republic, July 2005.
- [42] L. El Ghaoui and M. Ait-Rami. Robust state-feedback stabilization of jump linear systems via LMIs. Submitted to *International Journal of Control*, december 1994.
- [43] H. Górecki. *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1st edition, 1971.
- [44] W. Grega. *Sterowanie cyfrowe w czasie rzeczywistym*. Wydawnictwo Wydziału Elektrotechniki, Automatyki Informatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie, Kraków, 1st edition, 1999.
- [45] W. Grega. Problemy rozproszonej regulacji cyfrowej. *Pomiary Automatyka Robotyka*, 1, 2001.
- [46] W. Grega. *Metody i algorytmy sterowania cyfrowego w układach scentralizowanych i rozproszonych*, volume 7 of *Monografie*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, Kraków, 2004.
- [47] W. Grega and K. Kołek. Monitoring and control of heat distribution. In *Proceedings of 3rd International Carpatian Control Conference*, pages 439–444, Malenovice, Czech Republic, May 2002.
- [48] W. Grega and K. Kołek. Simulation and real-time control: from Simulink to industrial applications. In *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications and International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 104–109, Glasgow, Scotland, U.K., 2002.
- [49] W. Grega and P. Rotter. Regulacja adaptacyjna dla rozproszonego układu sterowania. *Automatyka. Półrocznik Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 6(2):219–235, 2002.
- [50] W. Grega and A. Tutaj. Network traffic reduction by sample grouping for distributed control systems. In *NeCST 2007 – 3rd International Workshop on Networked Control Systems Tolerant to Faults*, pages 1–8, Nancy, France, June 2007.
- [51] S. Guberinić, G. Šenborn, and B. Lazić. *Optimal traffic control. Urban intersection*. CRC Press, 2008.

- [52] C. N. Hadjicostis and R. Touri. Feedback control utilizing packet dropping network links. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1205–1210, Urbana, IL, USA, December 2002.
- [53] F. Hanssen and P. Jansen. Real-time communication protocols: An overview. Technical report, Centre for Telematics and Information Technology, 2003. Technical report.
- [54] F. Hanssen, P. G. Jansen, H. Scholten, and S. Mullender. RTnet: a distributed real-time protocol for broadcast-capable networks. In *Joint International Conference on Autonomic and Autonomous Systems and International Conference on Networking and Services*, October 2005.
- [55] M. S. Hasan, Ch. Harding, H. Yu, and A. Griffiths. Modeling delay and packet drop in networked control systems using network simulator NS2. *International Journal of Automation and Computing*, 2:187–194, 2005.
- [56] A. Hassibi, S. P. Boyd, and J. P. How. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events. In *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [57] U. Hatnik and S. Altmann. Using ModelSim, Matlab/Simulink and NS for simulation of distributed systems. In *International Conference on Parallel Computing in Electrical Engineering*, pages 114–119, September 2004.
- [58] D. Henriksson, A. Cervin, and K.-E. Årzén. Truetime: simulation of control loops under shared computer resources. In *15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, Spain, July 2002.
- [59] S. Holzner. *Programowanie w Microsoft C/C++ v. 7.0*. Intersoftland, 1993.
- [60] J. Huang. Neurocontrol of telerobotic system with time delays. In *Neuro-Fuzzy Control of Industrial Systems with Actuator Nonlinearities*, chapter 8, pages 151–170. SIAM, 2002.
- [61] Inteco Ltd., Kraków. *RT-DAC4/PCI Multi I/O Board XILINX version User's Manual*, 2002.
- [62] A. Jezierska. Raport: Obraz polskiego rynku przemysłowego wykorzystania technologii bezprzewodowej. *Control Engineering Polska*, wrzesień 2007.
- [63] K. Ji. *Real-Time Control over Networks*. PhD thesis, Texas A&M University, May 2006.
- [64] K. Ji and W.-j. Kim. Stochastic optimal control and network co-design for networked control systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 5(5):515–525, October 2007.
- [65] T. Kaczorek. *Teoria układów regulacji automatycznej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2nd edition, 1977.
- [66] T. Kaczorek. *Macierze w automatyce i elektrotechnice*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1st edition, 1984.

- [67] T. Kaczorek. *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2nd edition, 1998.
- [68] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [69] N. Kakanakov, M. Shopov, G. Spasov, and H. Hristev. Performance evaluation of switched Ethernet as communication media in controller networks. In *International Conference on Computer Systems and Technologies*, 2007.
- [70] Y. H. Kim, H. S. Park, and W. H. Kwon. A scheduling method for network-based control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 718–722, June 1998.
- [71] J. Kiszka, B. Wagner, Y. Zhang, and J. Broenink. RTnet – A flexible hard real-time networking framework. In *10th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, Catania, Italy, September 2005.
- [72] J. Korbicz and M. Z. Zgurowski. *Estymacja i sterowanie stochastyczne układami o parametrach rozłożonych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1st edition, 1991.
- [73] I. Kousik, D. Ghosh, and I. Murthy. A heuristic procedure for leasing channels in telecommunications networks. *The Journal of the Operational Research Society*, 44(7):659–672, July 1993.
- [74] S. Kowshik, G. Baliga, S. Graham, and L. Sha. Co-design based approach to improve robustness in networked control systems. In *International Conference on Dependable Systems and Networks*, pages 454–463, 2005.
- [75] G. Leen, D. Heffernan, and A. Dunne. Digital networks in the automotive vehicle. *Computing & Control Engineering Journal*, 10(6):257–266, 1999.
- [76] W. S. Levine, editor. *The Control Handbook*. CRC Press in cooperation with IEEE Press, New York, 1996.
- [77] F.-L. Lian, J. Moyne, and D. Tilbury. Analysis and modeling of networked control systems: MIMO case with multiple time delays. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 6, pages 4306–4312, Arlington, VA, USA, 2001.
- [78] F.-L. Lian, J. R. Moyne, and D. M. Tilbury. Performance evaluation of control networks: Ethernet, ControlNet, and DeviceNet. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):66–83, February 2001.
- [79] F.-L. Lian, J. R. Moyne, and D. M. Tilbury. Network design consideration for distributed control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(2):297–307, March 2002.
- [80] Z.-J. Liu, W.-H. Qi, Z. Jia, and P. Huang. System integration control of HVAC in intelligent building. In *Proceedings of International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, volume 2, pages 1125–1128, August 2004.

- [81] M. Lord and D. Memmi. NetSim: a simulation and visualization software for information network modeling. In *International MCETECH Conference on e-Technologies*, pages 167–177, Januar 2008.
- [82] R. Luck and A. Ray. An observer-based compensator for distributed delays. *Automatica*, 26(5):903–908, 1990.
- [83] S. Mascolo, D. Cavendish, and M. Gerla. ATM rate based congestion control using a Smith predictor. *Performance Evaluation, Special Issue on ATM Traffic Control*, 31(1–2), November 1997.
- [84] The MathWorks, Inc. *Control System Toolbox for Use with MATLAB*, 5th edition, 2002. Jeden z oodręczników towarzyszący programowi MATLAB.
- [85] P. S. Maybeck. *Stochastic models, estimation, and control*, volume 1. Academic Press, 1979.
- [86] W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1st edition, 1991.
- [87] W. Mitkowski. *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996.
- [88] W. Mitkowski. *Systemy dynamiczne. Materiały uzupełniające do wykładów*. Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków, 2000.
- [89] L. A. Montestruque and P. J. Antsaklis. Model-based networked control systems – stability. Technical report, University of Notre Dame, Notre Dame, Department of Electrical Engineering, January 2001. ISIS Technical Report ISIS-2002-001.
- [90] L. A. Montestruque and P. J. Antsaklis. State and output feedback control in model-based networked control systems. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1620–1625, December 2002.
- [91] L. A. Montestruque and P. J. Antsaklis. On the model-based control of networked systems. *Automatica*, 39:1837–1843, October 2003.
- [92] L. A. Montestruque and P. J. Antsaklis. Stochastic stability for model based networked control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, June 4–6 2003.
- [93] M. Morawski and A. M. Zajączkowski. Network based control of the magnetic levitation systems. In *XXXI IC-SPETO 2008 – Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów*, maj 2008.
- [94] K. M. Moudgalya. *Digital Control*. John Wiley & Sons, 2007.
- [95] J. Moyne and D. Tilbury. Performance metrics for industrial Ethernet. The Industrial Ethernet Book, April 2007.

- [96] B. Mrozek and Z. Mrozek. *MATLAB – Uniwersalne środowisko do obliczeń naukowo-technicznych*. Wydawnictwo PLJ, Warszawa, 3rd edition, 1996.
- [97] A. Niederliński, J. Mościński, and Z. Ogonowski. *Regulacja adaptacyjna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1995.
- [98] S. Oh and S. Sastry. Approximate estimation of distributed networked control systems. In *American Control Conference*, New York, NY, July 2007.
- [99] P. G. Otanez, J. T. Parrott, J. R. Moyne, and D. M. Tilbury. The implications of Ethernet as a control network. In *Global Powertrain Conference*, Ann Arbor, MI, September 2002.
- [100] H. S. Park, Y. H. Kim, D.-S. Kim, and W. H. Kwon. A scheduling method for network-based control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(3), May 2002.
- [101] R. Piggin. EtherNet/IP – control in real time. *Computing & Control Engineering Journal*, 17:28–31, December–Januar 2006.
- [102] D. E. Quevedo, E. I. Silva, and G. C. Goodwin. Packetized predictive control over erasure channels. In *Proceedings of the 2007 American Control Conference*, pages 1003–1008, New York City, USA, July 2007.
- [103] J. Rusek. *Elektrotechnika z elementami napędów*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 3rd edition, 1996.
- [104] L. Samaranayake and S. Alahakoon. Condition monitoring and distributed real-time control of industrial drive systems via Ethernet. In *Proceedings of the Invited lecture for the annual general meeting, Central province of the Institute of Engineers Sri Lanka, IESL*, pages 32–38, Kandy, Sri Lanka, September 2003.
- [105] L. Samaranayake, S. Alahakoon, and K. Walgama. Speed controller strategies for distributed motion control via Ethernet. In *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 322–327, 2003.
- [106] S. Schneider. Making Ethernet work in real time. *Sensors*, 17(11):32, November 2000.
- [107] P. Seiler and R. Sengupta. An H_∞ approach to networked control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):356–364, 2005.
- [108] M. A. Seminario, C. C. Insaurralde, J. F. Jimenez, and J. M. Giron-Sierra. Hardware in the loop laboratory simulation to test a distributed avionic system. In *The 24th Digital Avionics Systems Conference*, volume 2, October–November 2005.
- [109] L. Sharpe. Setting a standard for building control. *IEE Review*, 47:35–39, July 2001.
- [110] D. Simon. *Optimal state estimation. Kalman, H infinity, and nonlinear approaches*. Willey Interscience, 2006.

- [111] T. Skeie, S. Johannessen, and Ch. Brunner. Ethernet in substation automation. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 43–51, June 2002.
- [112] P. Skruch. Odtwarzanie sygnału analogowego z dyskretnego ciągu próbek. *Automatyka. Półrocznik Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 6(2):201–217, 2002.
- [113] C. A. Smith. *Automated Continuous Process Control*. Willey Interscience, 2002.
- [114] T. Söderström and P. Stoica. *Identyfikacja systemów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997.
- [115] P. Tatjewski. *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych. Struktury i algorytmy*, volume 5 of *Monografie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2002.
- [116] M. H. ten Berge, B. Orlic, and J. F. Broenink. Co-simulation of networked embedded control systems, a CSP-like process-oriented approach. In *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design*, Munich, Germany, October 2006.
- [117] Y. Tipsuwan and M.-Y. Chow. Gain adaptation of networked mobile robot to compensate QoS deterioration. In *IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, volume 4, pages 3146–3151, November 2002.
- [118] Y. Tipsuwan and M.-Y. Chow. Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 11:1099–1111, 2003.
- [119] P. Tona. Teaching process control with Scilab and Scicos. In *American Control Conference*, page 6, June 2006.
- [120] A. Tutaj. Poprawa jakości regulacji programowej przez zastosowanie dynamicznego sygnału feedforward. *Automatyka. Półrocznik Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 8(1):93–102, 2004.
- [121] A. Tutaj. Zastosowanie zmodyfikowanych wersji predyktora Smitha w rozproszonych układach regulacji. *Automatyka. Półrocznik Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie*, 9(3):483–497, 2005.
- [122] A. Tutaj. Adaptacyjny układ regulacji z predyktorem Smitha z możliwością zastosowania w systemach rozproszonych. Artykuł przyjęty do druku w *Automatyce, półroczniku AGH*, 2008.
- [123] F. van der Heijden, R. P. W. Duin, D. de Ridder, and D. M. J. Tax. *Classification, Parameter Estimation and State Estimation. An Engineering Approach using MATLAB*. John Wiley & Sons, 2004.
- [124] A. Varga. Using the OMNeT++ discrete event simulation system in education. *IEEE Transactions on Education*, 42:11, November 1999.
- [125] Ch. Venkatramani. *The Design, Implementation and Evaluation of RETHER: A Real-Time Ethernet Protocol*. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, November 1996.

- [126] G. C. Walsh, O. Beldiman, and L. Bushnell. Error encoding algorithms for networked control systems. *Automatica*, 38:261–267, 2002.
- [127] G. C. Walsh, O. Beldiman, and L. G. Bushnell. Asymptotic behavior of networked control systems. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1448–1453, Kohala Coast, Island of Hawai'i, Hawai'i USA, August 1999.
- [128] G. C. Walsh, O. Beldiman, and L. G. Bushnell. Error encoding algorithms for networked control systems. In *Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control*, pages 4933–4938, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [129] G. C. Walsh, H. Ye, and L. G. Bushnell. Stability analysis of networked control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1999.
- [130] R. L. Williams and D. A. Lawrence. *Linear State-Space Control Systems*. John Wiley & Sons, 2007.
- [131] B. Wittenmark. Sample-induced delays in synchronous multirate systems. In *European Control Conference*, Porto, Portugal, Januar 2001.
- [132] B. Wittenmark, B. Bastian, and J. Nilsson. Analysis of time delay in synchronous and asynchronous control loops. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 283–288, Tampa, Florida, USA, December 1998.
- [133] B. Wittenmark, J. Nilsson, and M. Törngren. Timing problems in real-time control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pages 2000–2004, Seattle, Washington, USA, June 1995.
- [134] L. Xiao, A. Hassibi, and J. P. How. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, June 2000.
- [135] Z. Yi and P. A. Heng. Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(1), February 2002.
- [136] J. K. Yook, D. M. Tilbury, and N. R. Soparkar. Performance evaluation of distributed control systems with reduced communication. In *Proceedings of the Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, 2000.
- [137] J. K. Yook, D. M. Tilbury, and N. R. Soparkar. Trading computation for bandwidth: Reducing communication in distributed control systems using state estimators. Submitted to the IEEE Transaction on Control System Technology, 2000.
- [138] J. K. Yook, D. M. Tilbury, and N. R. Soparkar. Trading computation for bandwidth: State estimators for reduced communication in distributed control systems. In *Proceedings of the 2000 Japan-USA Symposium on Flexible Automation*, Ann Arbor, Michigan, USA, July 23-26 2000.

- [139] A. Zalewski. *Programowanie w językach C i C++ z wykorzystaniem pakietu Borland C++*, volume 21 of *BUM – biblioteka użytkownika mikrokomputerów*. Nakom, Poznań, 1994.
- [140] A. Zalewski and R. Cegięła. *Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, volume 25 of *BUM – Biblioteka użytkownika mikrokomputerów*. Nakom, Poznań, 1996.
- [141] W. Zhang. *Stability Analysis of Networked Control Systems*. PhD thesis, Case Western Reserve University, August 2001. Department of Electrical Engineering and Computer Science.
- [142] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 84–99, February 2001.
- [143] Q.-Ch. Zhong and G. Weiss. A unified Smith predictor based on the spectral decomposition of the plant. *International Journal of Control*, 77(15):1362–1371, 2004.

(III.42a)

(D.7a), (D.7b), (D.7c), (D.7d)

(D.10a), (D.10b), (D.10c), (D.10d)

(D.9a), (D.9b), (D.9c), (D.9d)

(D.14a), (D.14b), (D.14c), (D.14d)

(III.148a), (III.148b), (III.148c), (III.148d), (III.148e), (III.148f)

(III.154a), (III.154b), (III.154c), (III.154d), (III.154e), (III.154f)

(III.136a), (III.136b), (III.136c)

(III.133a), (III.133b), (III.133c)
